

2016 年辽宁省葫芦岛市中考数学试卷

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

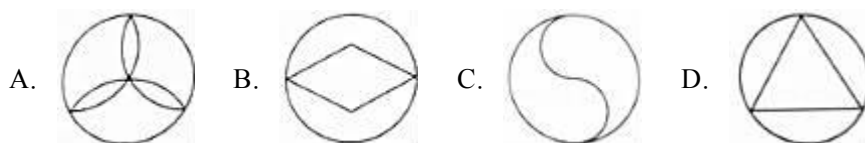
1. 4 的相反数是（ ）

- A. 4 B. -4 C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

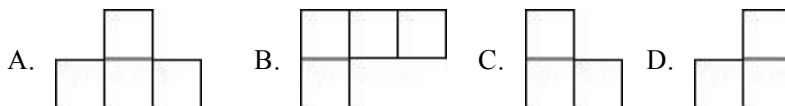
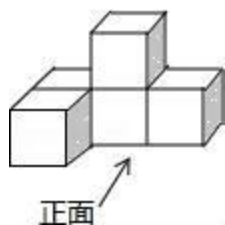
2. 下列运算正确的是（ ）

- A. $-a(a-b) = -a^2 - ab$ B. $(2ab)^2 \div a^2b = 4ab$ C. $2ab \cdot 3a = 6a^2b$ D. $(a-1)(1-a) = a^2 - 1$

3. 下列图形既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



4. 如图是由 5 个相同的小正方体构成的几何体，其左视图是（ ）



5. 九年级两名男同学在体育课上各练习 10 次立定跳远，平均成绩均为 2.20 米，要判断哪一名同学的成绩比较稳定，通常需要比较这两名同学立定跳远成绩的（ ）

- A. 方差 B. 众数 C. 平均数 D. 中位数

6. 下列一元二次方程中有两个相等实数根的是（ ）

- A. $2x^2 - 6x + 1 = 0$ B. $3x^2 - x - 5 = 0$ C. $x^2 + x = 0$ D. $x^2 - 4x + 4 = 0$

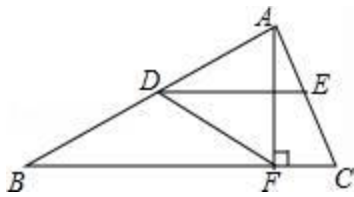
7. 在一个不透明的布袋中装有若干个只有颜色不同的小球，如果袋中有红球 5 个，黄球 4 个，其余为白球，从袋子中随机摸出一个球，“摸出黄球”的概率为 $\frac{1}{3}$ ，则袋中白球的个数为（ ）

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 12

8. A, B 两种机器人都被用来搬运化工原料，A 型机器人比 B 型机器人每小时多搬运 40 千克，A 型机器人搬运 1200 千克所用时间与 B 型机器人搬运 800 千克所用时间相等。设 B 型机器人每小时搬运化工原料 x 千克，根据题意可列方程为（ ）

- A. $\frac{1200}{x+40} = \frac{800}{x}$ B. $\frac{1200}{x-40} = \frac{800}{x}$
C. $\frac{1200}{x} = \frac{800}{x-40}$ D. $\frac{1200}{x} = \frac{800}{x+40}$

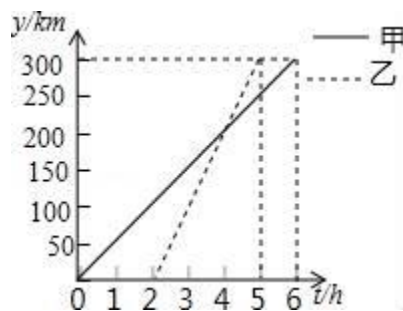
9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别是边 AB, AC 的中点， $AF \perp BC$ ，垂足为点 F， $\angle ADE = 30^\circ$ ， $DF = 4$ ，则 BF 的长为（ ）



A. 4 B. 8 C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

10. 甲、乙两车从 A 城出发前往 B 城，在整个行驶过程中，汽车离开 A 城的距离 y (km) 与行驶时间 t (h) 的函数图象如图所示，下列说法正确的有 ()

- ①甲车的速度为 50km/h ②乙车用了 3h 到达 B 城
③甲车出发 4h 时，乙车追上甲车 ④乙车出发后经过 1h 或 3h 两车相距 50km.



A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题 (本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分)

11. 在“2016 丝绸之路”国际投资贸易洽谈会上，我省销售的产品和合作项目签约金额为 730000000 元，将 730000000 用科学记数法表示为_____.

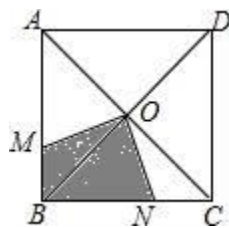
12. 分解因式: $a^3 - 4a =$ _____.

13. 某广告公司全体员工年薪的具体情况如表:

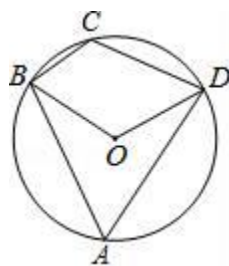
年薪/万元	25	15	10	6	4
人数	1	1	3	3	2

则该公司全体员工年薪的中位数是_____万元.

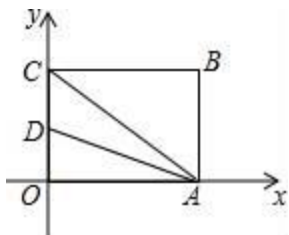
14. 如图，一只蚂蚁在正方形 ABCD 区域内爬行，点 O 是对角线的交点， $\angle MON = 90^\circ$ ，OM, ON 分别交线段 AB, BC 于 M, N 两点，则蚂蚁停留在阴影区域的概率为_____.



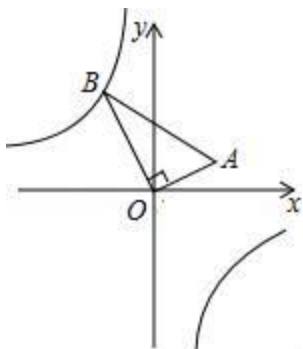
15. 如图，A, B, C, D 是 $\odot O$ 上的四个点， $\angle C = 110^\circ$ ，则 $\angle BOD =$ _____度.



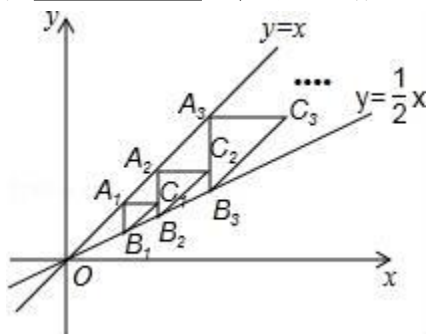
16. 如图，四边形 OABC 为矩形，点 A, C 分别在 x 轴和 y 轴上，连接 AC，点 B 的坐标为 (4, 3)， $\angle CAO$ 的平分线与 y 轴相交于点 D，则点 D 的坐标为_____.



17. 如图，在 $\triangle AOB$ 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ，点 A 的坐标为 (2, 1)， $BO = 2\sqrt{5}$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 B，则 k 的值为_____.



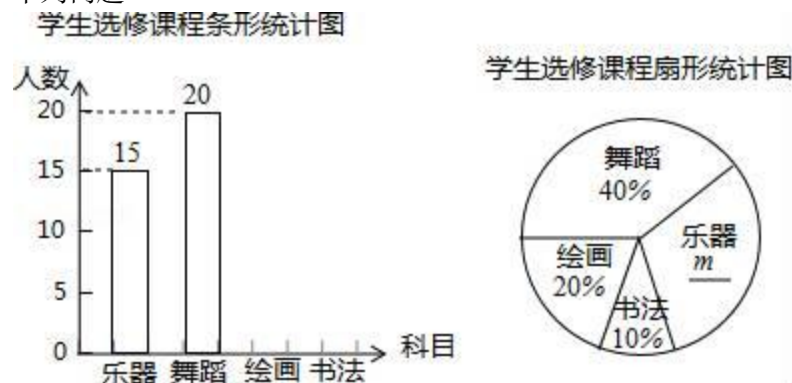
18. 如图，点 $A_1(2, 2)$ 在直线 $y=x$ 上，过点 A_1 作 $A_1B_1 \parallel y$ 轴交直线 $y = \frac{1}{2}x$ 于点 B_1 ，以点 A_1 为直角顶点， A_1B_1 为直角边在 A_1B_1 的右侧作等腰直角 $\triangle A_1B_1C_1$ ，再过点 C_1 作 $A_2B_2 \parallel y$ 轴，分别交直线 $y=x$ 和 $y = \frac{1}{2}x$ 于 A_2, B_2 两点，以点 A_2 为直角顶点， A_2B_2 为直角边在 A_2B_2 的右侧作等腰直角 $\triangle A_2B_2C_2$...，按此规律进行下去，则等腰直角 $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为_____。（用含正整数 n 的代数式表示）



三、解答题（第 19 小题 10 分，第 20-25 小题各 12 分，第 26 小题 14 分，共 96 分）

19. 先化简： $(2x - \frac{x^2+1}{x}) \div \frac{x^2-2x+1}{x}$ ，然后从 0, 1, -2 中选择一个适当的数作为 x 的值代入求值.

20. 某学校计划开设四门选修课：乐器、舞蹈、绘画、书法. 为提前了解学生的选修情况，学校采取随机抽样的方法进行问卷调查（每个被调查的学生必须选择而且只能选择其中一门）. 对调查结果进行了整理，绘制成如下两幅不完整的统计图，请结合图中所给信息解答下列问题：

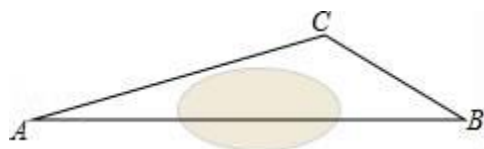


- (1) 本次调查的学生共有_____人，在扇形统计图中，m 的值是_____；
- (2) 将条形统计图补充完整；
- (3) 在被调查的学生中，选修书法的有 2 名女同学，其余为男同学，现要从中随机抽取 2 名同学代表学校参加某社区组织的书法活动，请直接写出所抽取的 2 名同学恰好是 1 名男同学和 1 名女同学的概率.

21. 在纪念中国抗日战争胜利 70 周年之际，某公司决定组织员工观看抗日战争题材的影片，门票有甲乙两种，甲种票比乙种票每张贵 6 元；买甲种票 10 张，乙种票 15 张共用去 660 元.

- (1) 求甲、乙两种门票每张各多少元？
- (2) 如果公司准备购买 35 张门票且购票费用不超过 1000 元，那么最多可购买多少张甲种票？

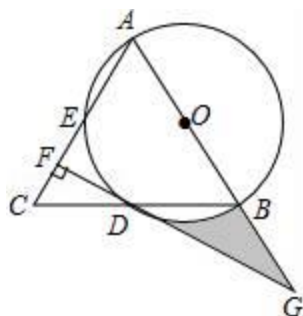
22. 在一次课外实践活动中，同学们要测量某公园人工湖两侧 A, B 两个凉亭之间的距离. 如图，现测得 $\angle ABC=30^\circ$ ， $\angle CBA=15^\circ$ ， $AC=200$ 米，请计算 A, B 两个凉亭之间的距离（结果精确到 1 米）（参考数据： $\sqrt{2}\approx 1.414$ ， $\sqrt{3}\approx 1.732$ ）



23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 分别交线段 BC ， AC 于点 D ， E ，过点 D 作 $DF \perp AC$ ，垂足为 F ，线段 FD ， AB 的延长线相交于点 G 。

(1) 求证： DF 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $CF=1$ ， $DF=\sqrt{3}$ ，求图中阴影部分的面积。



24. 某文具店购进一批纪念册，每本进价为20元，出于营销考虑，要求每本纪念册的售价不低于20元且不高于28元，在销售过程中发现该纪念册每周的销售量 y （本）与每本纪念册的售价 x （元）之间满足一次函数关系：当销售单价为22元时，销售量为36本；当销售单价为24元时，销售量为32本。

(1) 请直接写出 y 与 x 的函数关系式；

(2) 当文具店每周销售这种纪念册获得150元的利润时，每本纪念册的销售单价是多少元？

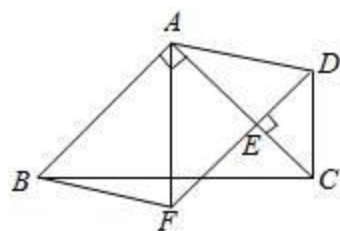
(3) 设该文具店每周销售这种纪念册所获得的利润为 w 元，将该纪念册销售单价定为多少元时，才能使文具店销售该纪念册所获利润最大？最大利润是多少？

25. 如图①, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC$, 点 E 在 AC 上 (且不与点 A , C 重合), 在 $\triangle ABC$ 的外部作 $\triangle CED$, 使 $\angle CED=90^\circ$, $DE=CE$, 连接 AD , 分别以 AB , AD 为邻边作平行四边形 $ABFD$, 连接 AF .

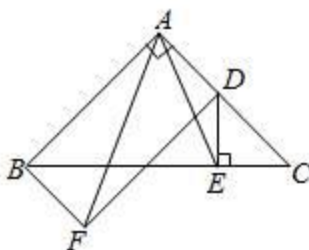
(1) 请直接写出线段 AF , AE 的数量关系_____;

(2) 将 $\triangle CED$ 绕点 C 逆时针旋转, 当点 E 在线段 BC 上时, 如图②, 连接 AE , 请判断线段 AF , AE 的数量关系, 并证明你的结论;

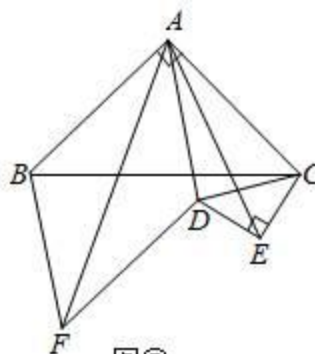
(3) 在图②的基础上, 将 $\triangle CED$ 绕点 C 继续逆时针旋转, 请判断 (2) 问中的结论是否发生变化? 若不变, 结合图③写出证明过程; 若变化, 请说明理由.



图①



图②



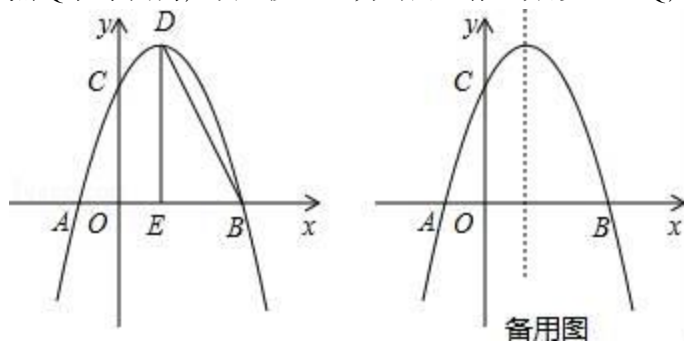
图③

26. 如图, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A , 点 B , 与 y 轴交于点 C , 点 B 坐标为 $(6, 0)$, 点 C 坐标为 $(0, 6)$, 点 D 是抛物线的顶点, 过点 D 作 x 轴的垂线, 垂足为 E , 连接 BD .

(1) 求抛物线的解析式及点 D 的坐标;

(2) 点 F 是抛物线上的动点, 当 $\angle FBA = \angle BDE$ 时, 求点 F 的坐标;

(3) 若点 M 是抛物线上的动点, 过点 M 作 $MN \parallel x$ 轴与抛物线交于点 N , 点 P 在 x 轴上, 点 Q 在平面内, 以线段 MN 为对角线作正方形 $MPNQ$, 请直接写出点 Q 的坐标.



2016 年辽宁省葫芦岛市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 4 的相反数是（ ）

- A. 4 B. -4 C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

【考点】相反数.

【分析】根据相反数的性质，互为相反数的两个数和为 0，采用逐一检验法求解即可.

【解答】解：根据概念，(4 的相反数) + (4) = 0，则 4 的相反数是 -4.

故选：B.

2. 下列运算正确的是（ ）

- A. $-a(a-b) = -a^2 - ab$ B. $(2ab)^2 \div a^2b = 4ab$ C. $2ab \cdot 3a = 6a^2b$ D. $(a-1)(1-a) = a^2 - 1$

【考点】整式的混合运算.

【分析】A、原式利用单项式乘以多项式法则计算得到结果，即可作出判断；

B、原式先计算乘方运算，再计算除法运算得到结果，即可作出判断；

C、原式利用单项式乘以单项式法则计算得到结果，即可作出判断；

D、原式变形后，利用完全平方公式化简得到结果，即可作出判断.

【解答】解：A、原式 = $-a^2 + ab$ ，错误；

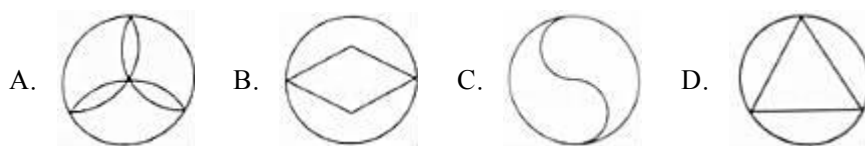
B、原式 = $4a^2b^2 \div a^2b = 4b$ ，错误；

C、原式 = $6a^2b$ ，正确；

D、原式 = $-(a-1)^2 = -a^2 + 2a - 1$ ，错误，

故选 C

3. 下列图形既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【考点】中心对称图形；轴对称图形.

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念求解，由于圆既是轴对称又是中心对称图形，故只考虑圆内图形的对称性即可.

【解答】解：A、既是轴对称图形，不是中心对称图形；

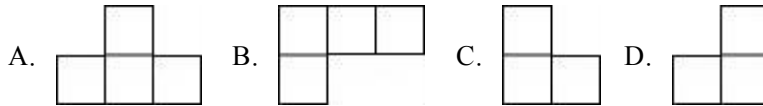
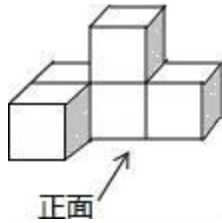
B、既是轴对称图形，又是中心对称图形；

C、不是轴对称图形，是中心对称图形；

D、只是轴对称图形，不是中心对称图形.

故选 B.

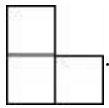
4. 如图是由 5 个相同的小正方体构成的几何体，其左视图是（ ）



【考点】简单组合体的三视图.

【分析】几何体的左视图有 2 列，每列小正方形数目分别为 2，1；据此画出图形即可求解.

【解答】解：观察图形可知，如图是由 5 个相同的小正方体构成的几何体，其左视图是



故选：C.

5. 九年级两名男同学在体育课上各练习 10 次立定跳远，平均成绩均为 2.20 米，要判断哪一名同学的成绩比较稳定，通常需要比较这两名同学立定跳远成绩的（ ）

A. 方差 B. 众数 C. 平均数 D. 中位数

【考点】统计量的选择.

【分析】根据方差的意义：是反映一组数据波动大小，稳定程度的量；方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，反之也成立. 故要判断哪一名学生的成绩比较稳定，通常需要比较这 2 名学生立定跳远成绩的方差.

【解答】解：由于方差能反映数据的稳定性，需要比较这 2 名学生立定跳远成绩的方差.
故选：A.

6. 下列一元二次方程中有两个相等实数根的是（ ）

A. $2x^2 - 6x + 1 = 0$ B. $3x^2 - x - 5 = 0$ C. $x^2 + x = 0$ D. $x^2 - 4x + 4 = 0$

【考点】根的判别式.

【分析】由根的判别式为 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，挨个计算四个选项中的 Δ 值，由此即可得出结论.

【解答】解：A、 $\because \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 28 > 0$,

$\therefore$ 该方程有两个不相等的实数根;

B、 $\because \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 61 > 0$,

$\therefore$ 该方程有两个不相等的实数根;

C、 $\because \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 0 = 1 > 0$,

$\therefore$ 该方程有两个不相等的实数根;

D、 $\because \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$,

$\therefore$ 该方程有两个相等的实数根.

故选 D.

7. 在一个不透明的布袋中装有若干个只有颜色不同的小球，如果袋中有红球 5 个，黄球 4 个，其余为白球，从袋子中随机摸出一个球，“摸出黄球”的概率为 $\frac{1}{3}$ ，则袋中白球的个数为 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 12

【考点】概率公式.

【分析】首先设袋中白球的个数为 x 个，然后根据概率公式，可得： $\frac{4}{5+4+x} = \frac{1}{3}$ ，解此分式方程即可求得答案.

【解答】解：设袋中白球的个数为 x 个，

根据题意得： $\frac{4}{5+4+x} = \frac{1}{3}$ ，

解得： $x=3$.

经检验： $x=3$ 是原分式方程的解.

$\therefore$ 袋中白球的个数为 3 个.

故选 B.

8. A, B 两种机器人都被用来搬运化工原料，A 型机器人比 B 型机器人每小时多搬运 40 千克，A 型机器人搬运 1200 千克所用时间与 B 型机器人搬运 800 千克所用时间相等. 设 B 型机器人每小时搬运化工原料 x 千克，根据题意可列方程为 ()

A. $\frac{1200}{x+40} = \frac{800}{x}$ B. $\frac{1200}{x-40} = \frac{800}{x}$
C. $\frac{1200}{x} = \frac{800}{x-40}$ D. $\frac{1200}{x} = \frac{800}{x+40}$

【考点】由实际问题抽象出分式方程.

【分析】根据 A、B 两种机器人每小时搬运化工原料间的关系可得出 A 型机器人每小时搬运化工原料 $(x+40)$ 千克，再根据 A 型机器人搬运 1200 千克所用时间与 B 型机器人搬运 800 千克所用时间相等即可列出关于 x 的分式方程，由此即可得出结论.

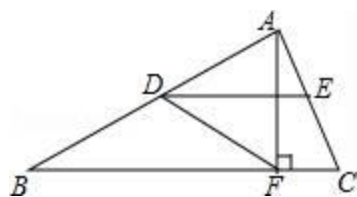
【解答】解：设 B 型机器人每小时搬运化工原料 x 千克，则 A 型机器人每小时搬运化工原料 $(x+40)$ 千克，

$\therefore$ A 型机器人搬运 1200 千克所用时间与 B 型机器人搬运 800 千克所用时间相等，

$\therefore \frac{1200}{x+40} = \frac{800}{x}$.

故选 A.

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别是边 AB, AC 的中点， $AF \perp BC$ ，垂足为点 F， $\angle ADE = 30^\circ$ ， $DF = 4$ ，则 BF 的长为 ()



A. 4 B. 8 C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

【考点】三角形中位线定理；含 30° 度角的直角三角形；直角三角形斜边上的中线.

【分析】先利用直角三角形斜边中线性性质求出 AB，再在 RT△ABF 中，利用 30 角所对的直角边等于斜边的一半，求出 AF 即可解决问题.

【解答】解：在 RT△ABF 中， $\because \angle AFB=90^\circ$ ， $AD=DB$ ， $DF=4$ ，

$$\therefore AB=2DF=8,$$

$$\because AD=DB, AE=EC,$$

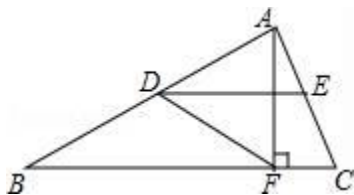
$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABF = 30^\circ,$$

$$\therefore AF = \frac{1}{2}AB = 4,$$

$$\therefore BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}.$$

故选 D.



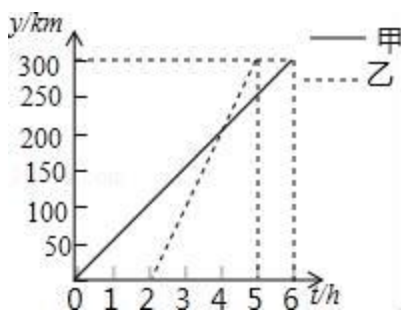
10. 甲、乙两车从 A 城出发前往 B 城，在整个行驶过程中，汽车离开 A 城的距离 y (km) 与行驶时间 t (h) 的函数图象如图所示，下列说法正确的有 ()

①甲车的速度为 50km/h

②乙车用了 3h 到达 B 城

③甲车出发 4h 时，乙车追上甲车

④乙车出发后经过 1h 或 3h 两车相距 50km.



A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【考点】一次函数的应用.

【分析】根据路程、时间和速度之间的关系判断出①正确；

根据函数图象上的数据得出乙车到达 B 城用的时间，判断出②正确；

根据甲的速度和走的时间得出甲车出发 4h 时走的总路程，再根据乙的总路程和所走的总时间求出乙的速度，再乘以 2 小时，求出甲车出发 4h 时，乙走的总路程，从而判断出③正确；再根据速度×时间=总路程，即可判断出乙车出发后经过 1h 或 3h，两车相距的距离，从而判断出④正确.

【解答】解：①甲车的速度为 $\frac{300}{6} = 50\text{km/h}$ ，故本选项正确；

②乙车到达 B 城用的时间为： $5 - 2 = 3\text{h}$ ，故本选项正确；

③甲车出发 4h，所走路程是： $50 \times 4 = 200$ (km)，甲车出发 4h 时，乙走的路程是： $\frac{300}{3} \times 2 = 200$ (km)，则乙车追上甲车，

故本选项正确;

④当乙车出发 1h 时, 两车相距: $50 \times 3 - 100 = 50$ (km),

当乙车出发 3h 时, 两车相距: $100 \times 3 - 50 \times 5 = 50$ (km),

故本选项正确;

故选 D.

二、填空题 (本题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. 在“2016 丝绸之路”国际投资贸易洽谈会上, 我省销售的产品和合作项目签约金额为 730000000 元, 将 730000000 用科学记数法表示为 7.3×10^8 .

【考点】科学记数法—表示较大的数.

【分析】利用科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】解: 730000000 用科学记数法表示为: 7.3×10^8 .

故答案为: 7.3×10^8 .

12. 分解因式: $a^3 - 4a = a(a+2)(a-2)$.

【考点】提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】原式提取 a , 再利用平方差公式分解即可.

【解答】解: 原式 $= a(a^2 - 4)$

$= a(a+2)(a-2)$.

故答案为: $a(a+2)(a-2)$

13. 某广告公司全体员工年薪的具体情况如表:

年薪/万元	25	15	10	6	4
人数	1	1	3	3	2

则该公司全体员工年薪的中位数是 8 万元.

【考点】中位数.

【分析】根据中位数的定义进行解答即可.

【解答】解: $\because$ 共有 $1+1+3+3+2=10$ 个人,

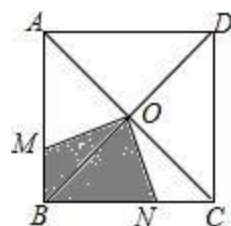
$\therefore$ 中位数是第 5 和第 6 个数的平均数,

$\therefore$ 中位数是 $(10+6) \div 2 = 8$ (万元);

故答案为 8.

14. 如图, 一只蚂蚁在正方形 ABCD 区域内爬行, 点 O 是对角线的交点, $\angle MON = 90^\circ$, OM,

ON 分别交线段 AB, BC 于 M, N 两点, 则蚂蚁停留在阴影区域的概率为 $\frac{1}{4}$.



【考点】几何概率.

【分析】根据正方形的性质可得出“ $\angle MBO = \angle NCO = 45^\circ$ ， $OB = OC$ ， $\angle BOC = 90^\circ$ ”，通过角的计算可得出 $\angle MOB = \angle NOC$ ，由此即可证出 $\triangle MOB \cong \triangle NOC$ ，同理可得出 $\triangle AOM \cong \triangle BON$ ，从而可得知 $S_{\text{阴影}} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形 } ABCD}$ ，再根据几何概率的计算方法即可得出结论.

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，点 O 是对角线的交点，
 $\therefore \angle MBO = \angle NCO = 45^\circ$ ， $OB = OC$ ， $\angle BOC = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle MON = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle MOB + \angle BON = 90^\circ$ ， $\angle BON + \angle NOC = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle MOB = \angle NOC$.

在 $\triangle MOB$ 和 $\triangle NOC$ 中，有 $\begin{cases} \angle MOB = \angle NOC \\ OB = OC \\ \angle MBO = \angle NCO \end{cases}$ ，

$\therefore \triangle MOB \cong \triangle NOC$ (ASA).

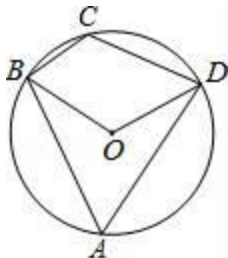
同理可得： $\triangle AOM \cong \triangle BON$.

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle BOC} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形 } ABCD}$.

$\therefore$ 蚂蚁停留在阴影区域的概率 $P = \frac{S_{\text{阴影}}}{S_{\text{正方形 } ABCD}} = \frac{1}{4}$.

故答案为： $\frac{1}{4}$.

15. 如图， A, B, C, D 是 $\odot O$ 上的四个点， $\angle C = 110^\circ$ ，则 $\angle BOD =$ 140 度.



【考点】圆周角定理；圆内接四边形的性质.

【分析】根据圆内接四边形对角互补和，同弧所对的圆心角是圆周角的二倍可以解答本题.

【解答】解： $\because A, B, C, D$ 是 $\odot O$ 上的四个点， $\angle C = 110^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，

$\therefore \angle C + \angle A = 180^\circ$ ，

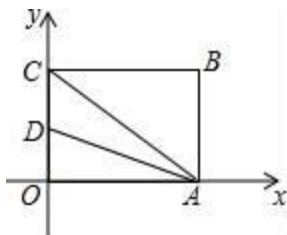
$\therefore \angle A = 70^\circ$ ，

$\therefore \angle BOD = 2\angle A$ ，

$\therefore \angle BOD = 140^\circ$ ，

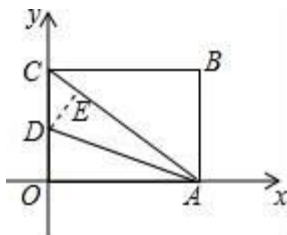
故答案为：140.

16. 如图，四边形 $OABC$ 为矩形，点 A, C 分别在 x 轴和 y 轴上，连接 AC ，点 B 的坐标为 $(4, 3)$ ， $\angle CAO$ 的平分线与 y 轴相交于点 D ，则点 D 的坐标为 $(0, \frac{4}{3})$.



【考点】矩形的性质；坐标与图形性质.

【分析】过 D 作 $DE \perp AC$ 于 E，根据矩形的性质和 B 的坐标求出 $OC=AB=3$ ， $OA=BC=4$ ， $\angle CCOA=90^\circ$ ，求出 $OD=DE$ ，根据勾股定理求出 $OA=AE=4$ ， $AC=5$ ，在 $Rt\triangle DEC$ 中，根据勾股定理得出 $DE^2+EC^2=CD^2$ ，求出 OD，即可得出答案.



【解答】解：过 D 作 $DE \perp AC$ 于 E，

$\because$ 四边形 ABCO 是矩形，B (4, 3)，
 $\therefore OC=AB=3$ ， $OA=BC=4$ ， $\angle CCOA=90^\circ$ ，
 $\because AD$ 平分 $\angle OAC$ ，
 $\therefore OD=DE$ ，
 由勾股定理得： $OA^2=AD^2-OD^2$ ， $AE^2=AD^2-DE^2$ ，
 $\therefore OA=AE=4$ ，

由勾股定理得： $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ，

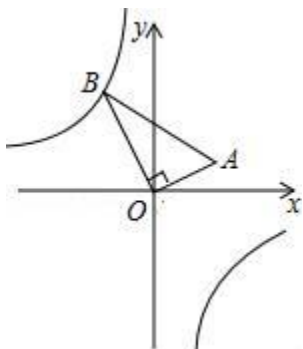
在 $Rt\triangle DEC$ 中， $DE^2+EC^2=CD^2$ ，
 即 $OD^2+(5-4)^2=(3-OD)^2$ ，

解得： $OD=\frac{4}{3}$ ，

所以 D 的坐标为 $(0, \frac{4}{3})$ ，

故答案为： $(0, \frac{4}{3})$.

17. 如图，在 $\triangle AOB$ 中， $\angle AOB=90^\circ$ ，点 A 的坐标为 (2, 1)， $BO=2\sqrt{5}$ ，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 B，则 k 的值为 -8 .



【考点】反比例函数图象上点的坐标特征；相似三角形的判定与性质.

【分析】根据 $\angle AOB=90^\circ$ ，先过点 A 作 $AC \perp x$ 轴，过点 B 作 $BD \perp x$ 轴，构造相似三角形，再利用相似三角形的对应边成比例，列出比例式进行计算，求得点 B 的坐标，进而得出 k 的值.

【解答】解：过点 A 作 $AC \perp x$ 轴，过点 B 作 $BD \perp x$ 轴，垂足分别为 C、D，则 $\angle OCA = \angle BDO = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle DBO + \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC + \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBO = \angle AOC,$$

$$\therefore \triangle DBO \sim \triangle COA,$$

$$\therefore \frac{BO}{OA} = \frac{BD}{OC} = \frac{DO}{CA},$$

$$\because \text{点 A 的坐标为 } (2, 1),$$

$$\therefore AC = 1, OC = 2,$$

$$\therefore AO = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

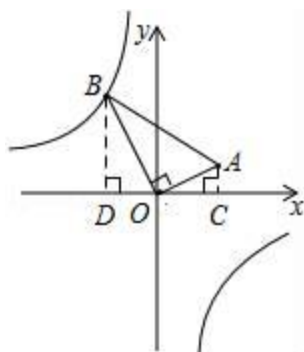
$$\therefore \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{BD}{2} = \frac{DO}{1}, \text{ 即 } BD = 4, DO = 2,$$

$$\therefore B(-2, 4),$$

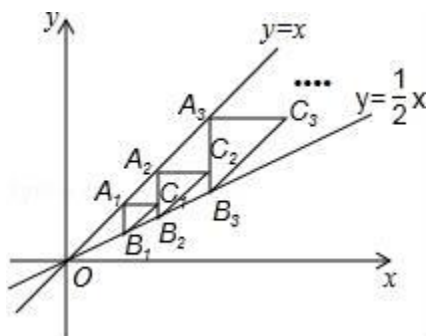
$$\because \text{反比例函数 } y = \frac{k}{x} \text{ 的图象经过点 B,}$$

$$\therefore k \text{ 的值为 } -2 \times 4 = -8.$$

故答案为：-8



18. 如图，点 $A_1(2, 2)$ 在直线 $y=x$ 上，过点 A_1 作 $A_1B_1 \parallel y$ 轴交直线 $y = \frac{1}{2}x$ 于点 B_1 ，以点 A_1 为直角顶点， A_1B_1 为直角边在 A_1B_1 的右侧作等腰直角 $\triangle A_1B_1C_1$ ，再过点 C_1 作 $A_2B_2 \parallel y$ 轴，分别交直线 $y=x$ 和 $y = \frac{1}{2}x$ 于 A_2, B_2 两点，以点 A_2 为直角顶点， A_2B_2 为直角边在 A_2B_2 的右侧作等腰直角 $\triangle A_2B_2C_2 \dots$ ，按此规律进行下去，则等腰直角 $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为 $\frac{3^{2n-2}}{2^{2n-1}}$. (用含正整数 n 的代数式表示)



【考点】一次函数图象上点的坐标特征；等腰直角三角形.

【分析】先根据点 A_1 的坐标以及 $A_1B_1 \parallel y$ 轴，求得 B_1 的坐标，进而得到 A_1B_1 的长以及 $\triangle A_1B_1C_1$ 面积，再根据 A_2 的坐标以及 $A_2B_2 \parallel y$ 轴，求得 B_2 的坐标，进而得到 A_2B_2 的长以及 $\triangle A_2B_2C_2$ 面积，最后根据变换规律，求得 A_nB_n 的长，进而得出 $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积即可.

【解答】解： $\because$ 点 $A_1 (2, 2)$ ， $A_1B_1 \parallel y$ 轴交直线 $y = \frac{1}{2}x$ 于点 B_1 ，

$$\therefore B_1 (2, 1)$$

$$\therefore A_1B_1 = 2 - 1 = 1, \text{ 即 } \triangle A_1B_1C_1 \text{ 面积} = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2};$$

$$\therefore A_1C_1 = A_1B_1 = 1,$$

$$\therefore A_2 (3, 3),$$

又 $\because A_2B_2 \parallel y$ 轴，交直线 $y = \frac{1}{2}x$ 于点 B_2 ，

$$\therefore B_2 (3, \frac{3}{2}),$$

$$\therefore A_2B_2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \text{ 即 } \triangle A_2B_2C_2 \text{ 面积} = \frac{1}{2} \times (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{8};$$

以此类推，

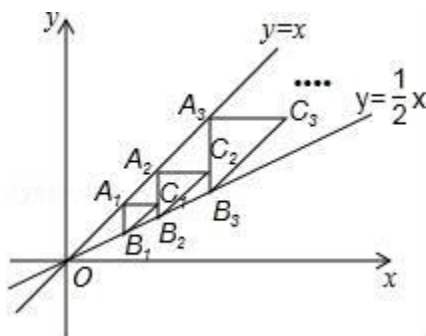
$$A_3B_3 = \frac{9}{4}, \text{ 即 } \triangle A_3B_3C_3 \text{ 面积} = \frac{1}{2} \times (\frac{9}{4})^2 = \frac{81}{32};$$

$$A_4B_4 = \frac{27}{8}, \text{ 即 } \triangle A_4B_4C_4 \text{ 面积} = \frac{1}{2} \times (\frac{27}{8})^2 = \frac{729}{128};$$

...

$$\therefore A_nB_n = (\frac{3}{2})^{n-1}, \text{ 即 } \triangle A_nB_nC_n \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times [(\frac{3}{2})^{n-1}]^2 = \frac{3^{2n-2}}{2^{2n-1}}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{3^{2n-2}}{2^{2n-1}}$$



三、解答题 (第 19 小题 10 分, 第 20-25 小题各 12 分, 第 26 小题 14 分, 共 96 分)

19. 先化简: $(2x - \frac{x^2+1}{x}) \div \frac{x^2-2x+1}{x}$, 然后从 0, 1, -2 中选择一个适当的数作为 x

的值代入求值.

【考点】 分式的化简求值.

【分析】 先根据分式混合运算的法则把原式进行化简, 再选取合适的 x 的值代入进行计算即可.

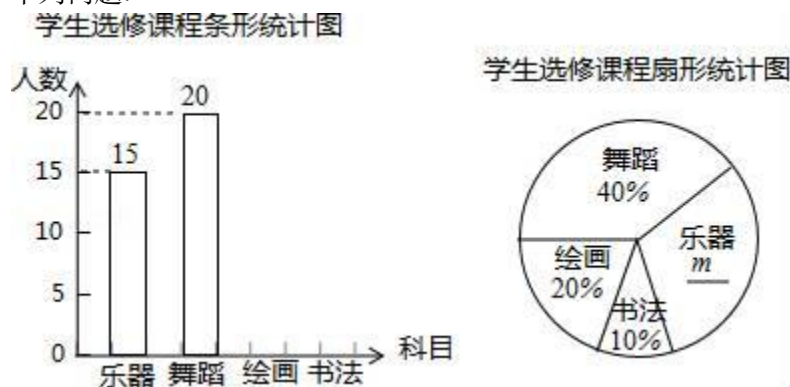
【解答】 解: 原式 = $(\frac{2x^2}{x} - \frac{x^2+1}{x}) \div \frac{(x-1)^2}{x}$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{x} \cdot \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}.$$

当 x = -2 时, 原式 = $\frac{-2+1}{-2-1} = \frac{1}{3}.$

20. 某学校计划开设四门选修课: 乐器、舞蹈、绘画、书法. 为提前了解学生的选修情况, 学校采取随机抽样的方法进行问卷调查 (每个被调查的学生必须选择而且只能选择其中一门). 对调查结果进行了整理, 绘制成如下两幅不完整的统计图, 请结合图中所给信息解答下列问题:



- (1) 本次调查的学生共有 50 人, 在扇形统计图中, m 的值是 30%;
- (2) 将条形统计图补充完整;

(3) 在被调查的学生中，选修书法的有 2 名女同学，其余为男同学，现要从中随机抽取 2 名同学代表学校参加某社区组织的书法活动，请直接写出所抽取的 2 名同学恰好是 1 名男同学和 1 名女同学的概率。

【考点】列表法与树状图法；扇形统计图；条形统计图.

【分析】(1) 首先用选舞蹈课的人数除以它占本次调查的学生总人数的百分率，求出本次调查的学生共有多少人；然后用选乐器课的人数除以本次调查的学生总人数，求出在扇形统计图中，m 的值是多少即可；

(2) 首先用本次调查的学生总人数乘参加绘画课、书法课的人数占总人数的百分率，求出参加绘画课、书法课的人数各是多少；然后根据参加绘画课、书法课的人数，将条形统计图补充完整即可；

(3) 首先判断出在被调查的学生中，选修书法的有 3 名男同学，2 名女同学，然后应用列表法，写出所抽取的 2 名同学恰好是 1 名男同学和 1 名女同学的概率是多少即可.

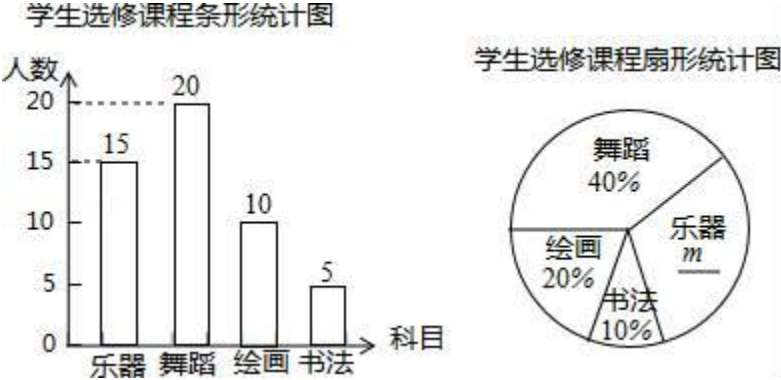
【解答】解：(1) $20 \div 40\% = 50$ (人)

$$15 \div 50 = 30\%$$

答：本次调查的学生共有 50 人，在扇形统计图中，m 的值是 30%.

$$(2) 50 \times 20\% = 10 \text{ (人)}$$

$$50 \times 10\% = 5 \text{ (人)}$$



$$(3) \because 5 - 2 = 3 \text{ (名)},$$

$\therefore$ 选修书法的 5 名同学中，有 3 名男同学，2 名女同学，

	男	男	男	女	女
男	/	(男, 男)	(男, 男)	(男, 女)	(男, 女)
男	(男, 男)	/	(男, 男)	(男, 女)	(男, 女)
男	(男, 男)	(男, 男)	/	(男, 女)	(男, 女)
女	(女, 男)	(女, 男)	(女, 男)	/	(女, 女)
女	(女, 男)	(女, 男)	(女, 男)	(女, 女)	/

所有等可能的情况有 20 种，所抽取的 2 名同学恰好是 1 名男同学和 1 名女同学的情况有 12 种，

$$\text{则 } P(\text{一男一女}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

答：所抽取的 2 名同学恰好是 1 名男同学和 1 名女同学的概率是 $\frac{3}{5}$.

故答案为：50、30%.

21. 在纪念中国抗日战争胜利 70 周年之际, 某公司决定组织员工观看抗日战争题材的影片, 门票有甲乙两种, 甲种票比乙种票每张贵 6 元; 买甲种票 10 张, 乙种票 15 张共用去 660 元.

(1) 求甲、乙两种门票每张各多少元?

(2) 如果公司准备购买 35 张门票且购票费用不超过 1000 元, 那么最多可购买多少张甲种票?

【考点】一元一次不等式的应用; 一元一次方程的应用.

【分析】(1) 设乙种门票每张 x 元, 则甲种门票每张 $(x+6)$ 元, 根据“买甲种票 10 张, 乙种票 15 张共用去 660 元”列方程即可求解;

(2) 设可购买 y 张甲种票, 则购买 $(35-y)$ 张乙种票, 根据购票费用不超过 1000 元列出不等式即可求解.

【解答】解: (1) 设乙种门票每张 x 元, 则甲种门票每张 $(x+6)$ 元, 根据题意得 $10(x+6)+15x=660$,
解得 $x=24$.

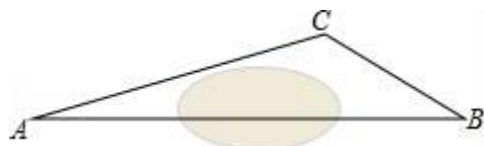
答: 甲、乙两种门票每张各 30 元、24 元;

(2) 设可购买 y 张甲种票, 则购买 $(35-y)$ 张乙种票, 根据题意得 $30y+24(35-y) \leq 1000$,

解得 $y \leq 26\frac{2}{3}$.

答: 最多可购买 26 张甲种票.

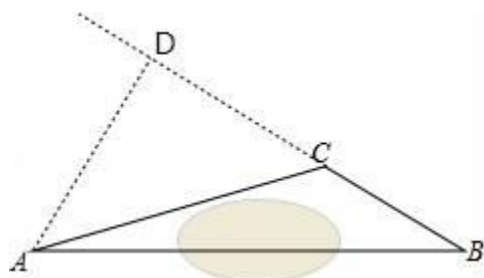
22. 在一次课外实践活动中, 同学们要测量某公园人工湖两侧 A, B 两个凉亭之间的距离. 如图, 现测得 $\angle ABC=30^\circ$, $\angle CBA=15^\circ$, $AC=200$ 米, 请计算 A, B 两个凉亭之间的距离 (结果精确到 1 米) (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$)



【考点】解直角三角形的应用.

【分析】过点 A 作 $AD \perp BC$, 交 BC 延长线于点 D, 根据 $\angle ABC=30^\circ$ 、 $\angle CBA=15^\circ$ 求得 $\angle CAD=45^\circ$, RT $\triangle ACD$ 中由 $AC=200$ 米知 $AD=AC \cos \angle CAD$, 再根据 $AB = \frac{AD}{\sin \angle B}$ 可得答案.

【解答】解: 过点 A 作 $AD \perp BC$, 交 BC 延长线于点 D,



$\because \angle B=30^\circ$,

$\therefore \angle BAD=60^\circ$,

又 $\because \angle BAC=15^\circ$,

$$\therefore \angle CAD = 45^\circ,$$

在 $\text{RT}\triangle ACD$ 中, $\because AC = 200$ 米,

$$\therefore AD = AC \cos \angle CAD = 200 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2} \text{ (米)},$$

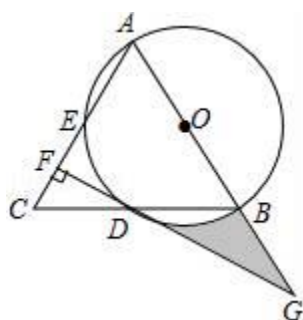
$$\therefore AB = \frac{AD}{\sin \angle B} = \frac{100\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 200\sqrt{2} \approx 283 \text{ (米)},$$

答: A, B 两个凉亭之间的距离约为 283 米.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 分别交线段 BC , AC 于点 D , E , 过点 D 作 $DF \perp AC$, 垂足为 F , 线段 FD , AB 的延长线相交于点 G .

(1) 求证: DF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $CF = 1$, $DF = \sqrt{3}$, 求图中阴影部分的面积.



【考点】 切线的判定; 等腰三角形的性质; 扇形面积的计算.

【分析】 (1) 连接 AD 、 OD , 由 AB 为直径可得出点 D 为 BC 的中点, 由此得出 OD 为 $\triangle BAC$ 的中位线, 再根据中位线的性质即可得出 $OD \perp DF$, 从而证出 DF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) $CF = 1$, $DF = \sqrt{3}$, 通过解直角三角形得出 $CD = 2$ 、 $\angle C = 60^\circ$, 从而得出 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 再利用分割图形求面积法即可得出阴影部分的面积.

【解答】 (1) 证明: 连接 AD 、 OD , 如图所示.

$\because AB$ 为直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\because AC = AB,$$

$\therefore$ 点 D 为线段 BC 的中点.

$\because$ 点 O 为 AB 的中点,

$\therefore OD$ 为 $\triangle BAC$ 的中位线,

$$\therefore OD \parallel AC,$$

$$\because DF \perp AC,$$

$$\therefore OD \perp DF,$$

$\therefore DF$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 解: 在 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中, $CF = 1$, $DF = \sqrt{3}$,

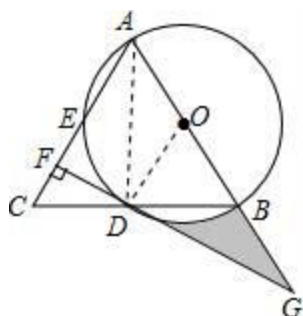
$$\therefore \tan \angle C = \frac{DF}{CF} = \sqrt{3}, \quad CD = 2,$$

$$\therefore \angle C = 60^\circ,$$

$$\because AC = AB,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\begin{aligned}
&\therefore AB=4. \\
&\because OD \parallel AC, \\
&\therefore \angle DOG = \angle BAC = 60^\circ, \\
&\therefore DG = OD \cdot \tan \angle DOG = 2\sqrt{3}, \\
&\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ODG} - S_{\text{扇形} OBD} = \frac{1}{2} DG \cdot OD - \frac{60}{360} \pi OB^2 = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3} \pi.
\end{aligned}$$



24. 某文具店购进一批纪念册，每本进价为 20 元，出于营销考虑，要求每本纪念册的售价不低于 20 元且不高于 28 元，在销售过程中发现该纪念册每周的销售量 y （本）与每本纪念册的售价 x （元）之间满足一次函数关系：当销售单价为 22 元时，销售量为 36 本；当销售单价为 24 元时，销售量为 32 本。

(1) 请直接写出 y 与 x 的函数关系式；

(2) 当文具店每周销售这种纪念册获得 150 元的利润时，每本纪念册的销售单价是多少元？

(3) 设该文具店每周销售这种纪念册所获得的利润为 w 元，将该纪念册销售单价定为多少元时，才能使文具店销售该纪念册所获利润最大？最大利润是多少？

【考点】 二次函数的应用；一元二次方程的应用。

【分析】 (1) 设 $y=kx+b$ ，根据题意，利用待定系数法确定出 y 与 x 的函数关系式即可；

(2) 根据题意结合销量 $\times$ 每本的利润 = 150，进而求出答案；

(3) 根据题意结合销量 $\times$ 每本的利润 = w ，进而利用二次函数增减性求出答案。

【解答】 解：(1) 设 $y=kx+b$ ，

$$\text{把 } (22, 36) \text{ 与 } (24, 32) \text{ 代入得：} \begin{cases} 22k+b=36 \\ 24k+b=32 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} k=-2 \\ b=80 \end{cases},$$

$$\text{则 } y = -2x + 80;$$

(2) 设当文具店每周销售这种纪念册获得 150 元的利润时，每本纪念册的销售单价是 x 元，根据题意得： $(x-20)y=150$ ，

$$\text{则 } (x-20)(-2x+80)=150,$$

$$\text{整理得： } x^2 - 60x + 875 = 0,$$

$$(x-25)(x-35)=0,$$

$$\text{解得： } x_1=25, x_2=35 \text{ (不合题意舍去),}$$

答：每本纪念册的销售单价是 25 元；

(3) 由题意可得：

$$w = (x-20)(-2x+80)$$

$$= -2x^2 + 120x - 1600$$

$$= -2(x - 30)^2 + 200,$$

此时当 $x=30$ 时, w 最大,

又 $\because$ 售价不低于 20 元且不高于 28 元,

$\therefore x < 30$ 时, y 随 x 的增大而增大, 即当 $x=28$ 时, $w_{\text{最大}} = -2(28 - 30)^2 + 200 = 192$ (元),

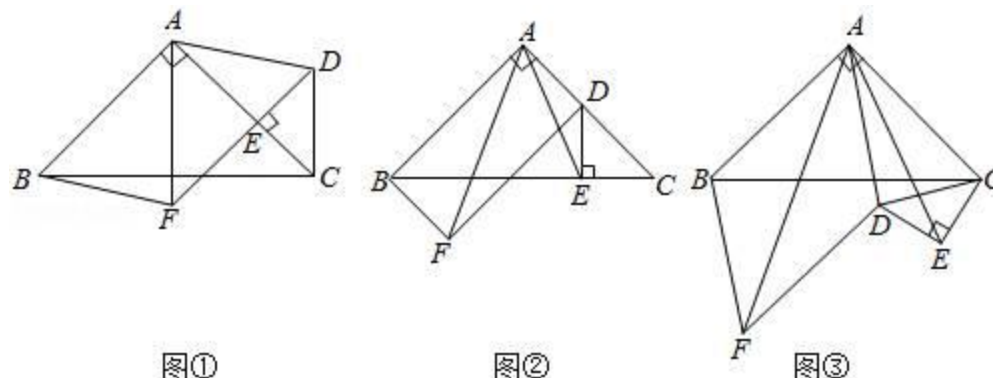
答: 该纪念册销售单价定为 28 元时, 才能使文具店销售该纪念册所获利润最大, 最大利润是 192 元.

25. 如图①, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC$, 点 E 在 AC 上 (且不与点 A, C 重合), 在 $\triangle ABC$ 的外部作 $\triangle CED$, 使 $\angle CED=90^\circ$, $DE=CE$, 连接 AD , 分别以 AB, AD 为邻边作平行四边形 $ABFD$, 连接 AF .

(1) 请直接写出线段 AF, AE 的数量关系 $AF=\sqrt{2}AE$;

(2) 将 $\triangle CED$ 绕点 C 逆时针旋转, 当点 E 在线段 BC 上时, 如图②, 连接 AE , 请判断线段 AF, AE 的数量关系, 并证明你的结论;

(3) 在图②的基础上, 将 $\triangle CED$ 绕点 C 继续逆时针旋转, 请判断 (2) 问中的结论是否发生变化? 若不变, 结合图③写出证明过程; 若变化, 请说明理由.



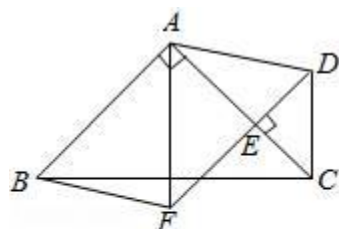
【考点】 四边形综合题.

【分析】 (1) 如图①中, 结论: $AF=\sqrt{2}AE$, 只要证明 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形即可.

(2) 如图②中, 结论: $AF=\sqrt{2}AE$, 连接 EF , DF 交 BC 于 K , 先证明 $\triangle EKF \cong \triangle EDA$ 再证明 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形即可.

(3) 如图③中, 结论不变, $AF=\sqrt{2}AE$, 连接 EF , 延长 FD 交 AC 于 K , 先证明 $\triangle EDF \cong \triangle ECA$, 再证明 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形即可.

【解答】 解: (1) 如图①中, 结论: $AF=\sqrt{2}AE$.

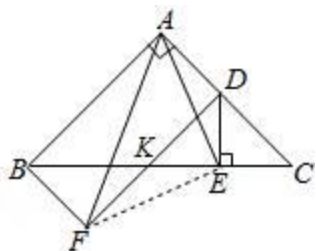


图①

理由: $\because$ 四边形 $ABFD$ 是平行四边形,

$\therefore AB=DF$,
 $\because AB=AC$,
 $\therefore AC=DF$,
 $\because DE=EC$,
 $\therefore AE=EF$,
 $\because \angle DEC=\angle AEF=90^\circ$,
 $\therefore \triangle AEF$ 是等腰直角三角形,
 $\therefore AF=\sqrt{2}AE$.
 故答案为 $AF=\sqrt{2}AE$.

(2) 如图②中, 结论: $AF=\sqrt{2}AE$.

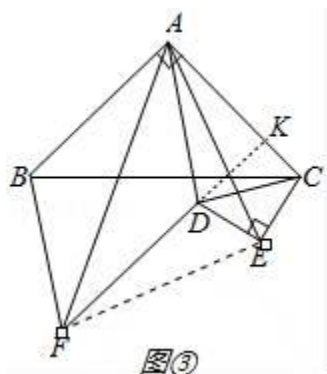


图②

理由: 连接 EF, DF 交 BC 于 K.
 $\because$ 四边形 ABFD 是平行四边形,
 $\therefore AB \parallel DF$,
 $\therefore \angle DKE = \angle ABC = 45^\circ$,
 $\therefore \angle EKF = 180^\circ - \angle DKE = 135^\circ$,
 $\because \angle ADE = 180^\circ - \angle EDC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$,
 $\therefore \angle EKF = \angle ADE$,
 $\because \angle DKC = \angle C$,
 $\therefore DK = DC$,
 $\because DF = AB = AC$,
 $\therefore KF = AD$,
 在 $\triangle EKF$ 和 $\triangle EDA$ 中,

$$\begin{cases} EK = DK \\ \angle EKF = \angle ADE \\ KF = AD \end{cases}$$
 $\therefore \triangle EKF \cong \triangle EDA$,
 $\therefore EF = EA, \angle KEF = \angle AED$,
 $\therefore \angle FEA = \angle BED = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle AEF$ 是等腰直角三角形,
 $\therefore AF = \sqrt{2}AE$.

(3) 如图③中, 结论不变, $AF = \sqrt{2}AE$.



理由：连接 EF，延长 FD 交 AC 于 K.

$$\because \angle EDF = 180^\circ - \angle KDC - \angle EDC = 135^\circ - \angle KDC,$$

$$\angle ACE = (90^\circ - \angle KDC) + \angle DCE = 135^\circ - \angle KDC,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle ACE,$$

$$\because DF = AB, AB = AC,$$

$$\therefore DF = AC$$

在 $\triangle EDF$ 和 $\triangle ECA$ 中，

$$\begin{cases} DF = AC \\ \angle EDF = \angle ACE, \\ DE = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EDF \cong \triangle ECA,$$

$$\therefore EF = EA, \angle FED = \angle AEC,$$

$$\therefore \angle FEA = \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 是等腰直角三角形,}$$

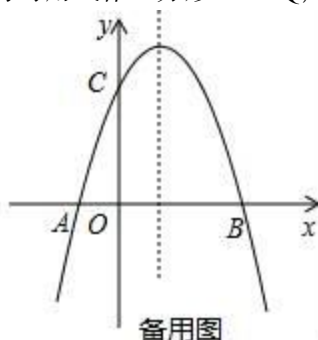
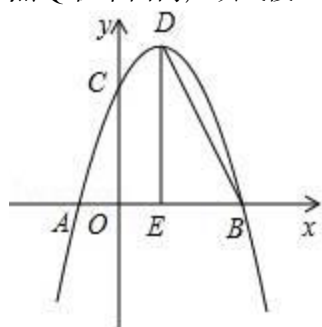
$$\therefore AF = \sqrt{2}AE.$$

26. 如图，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A，点 B，与 y 轴交于点 C，点 B 坐标为 (6, 0)，点 C 坐标为 (0, 6)，点 D 是抛物线的顶点，过点 D 作 x 轴的垂线，垂足为 E，连接 BD.

(1) 求抛物线的解析式及点 D 的坐标；

(2) 点 F 是抛物线上的动点，当 $\angle FBA = \angle BDE$ 时，求点 F 的坐标；

(3) 若点 M 是抛物线上的动点，过点 M 作 $MN \parallel x$ 轴与抛物线交于点 N，点 P 在 x 轴上，点 Q 在平面内，以线段 MN 为对角线作正方形 MPNQ，请直接写出点 Q 的坐标.



【考点】 二次函数综合题.

【分析】 (1) 由点 B、C 的坐标利用待定系数法即可求出抛物线的解析式，再利用配方法将抛物线解析式变形为顶点式即可得出结论；

(2) 设线段 BF 与 y 轴交点为点 F'，设点 F' 的坐标为 (0, m)，由相似三角形的判定及性质可得出点 F' 的坐标，根据点 B、F' 的坐标利用待定系数法可求出直线 BF 的解析式，联立直线 BF 和抛物线的解析式成方程组，解方程组即可求出点 F 的坐标；

(3) 设对角线 MN、PQ 交于点 O'，如图 2 所示．根据抛物线的对称性结合正方形的性质可得出点 P、Q 的位置，设出点 Q 的坐标为 (2, 2n)，由正方形的性质可得出点 M 的坐标为 (2-n, n)．由点 M 在抛物线图象上，即可得出关于 n 的一元二次方程，解方程可求出 n 值，代入点 Q 的坐标即可得出结论．

【解答】解：(1) 将点 B (6, 0)、C (0, 6) 代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 中，

$$\text{得：} \begin{cases} 0 = -18 + 6b + c \\ 6 = c \end{cases}, \text{解得：} \begin{cases} b = 2 \\ c = 6 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$.

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8,$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 (2, 8).

(2) 设线段 BF 与 y 轴交点为点 F'，设点 F' 的坐标为 (0, m)，如图 1 所示．

$$\therefore \angle F'BO = \angle FBA = \angle BDE, \angle F'OB = \angle BED = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle F'BO \sim \triangle BDE,$$

$$\therefore \frac{OF'}{OB} = \frac{BE}{DE}.$$

$$\therefore \text{点 B (6, 0), 点 D (2, 8),}$$

$$\therefore \text{点 E (2, 0), BE} = 6 - 4 = 4, DE = 8 - 0 = 8, OB = 6,$$

$$\therefore OF' = \frac{BE}{DE} \cdot OB = 3,$$

$$\therefore \text{点 F' (0, 3) 或 (0, -3).}$$

设直线 BF 的解析式为 $y = kx + 3$,

$$\text{则有 } 0 = 6k + 3 \text{ 或 } 0 = 6k - 3,$$

$$\text{解得：} k = -\frac{1}{2} \text{ 或 } k = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{直线 BF 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + 3 \text{ 或 } y = \frac{1}{2}x - 3.$$

$$\text{联立直线 BF 与抛物线的解析式得：} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \end{cases} \text{① 或 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \end{cases} \text{②},$$

$$\text{解方程组①得：} \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{7}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore \text{点 F 的坐标为 } (-1, \frac{7}{2});$$

$$\text{解方程组②得：} \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{9}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (舍去),}$$

∴ 点 F 的坐标为 $(-3, -\frac{9}{2})$.

综上所述：点 F 的坐标为 $(-1, \frac{7}{2})$ 或 $(-3, -\frac{9}{2})$.

(3) 设对角线 MN、PQ 交于点 O'，如图 2 所示.

∵ 点 M、N 关于抛物线对称轴对称，且四边形 MPNQ 为正方形，

∴ 点 P 为抛物线对称轴与 x 轴的交点，点 Q 在抛物线对称轴上，

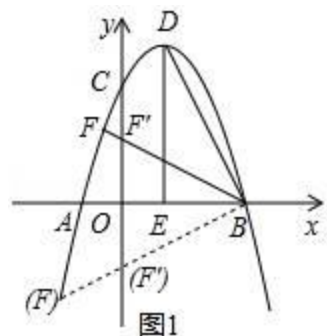
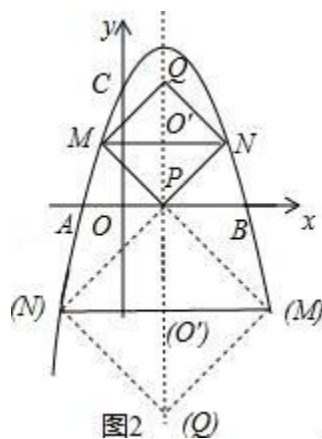
设点 Q 的坐标为 $(2, 2n)$ ，则点 M 的坐标为 $(2-n, n)$.

∵ 点 M 在抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ 的图象上，

∴ $n = -\frac{1}{2}(2-n)^2 + 2(2-n) + 6$ ，即 $n^2 + 2n - 16 = 0$ ，

解得： $n_1 = \sqrt{17} - 1$ ， $n_2 = -\sqrt{17} - 1$.

∴ 点 Q 的坐标为 $(2, \sqrt{17} - 1)$ 或 $(2, -\sqrt{17} - 1)$.



2016 年 8 月 27 日