

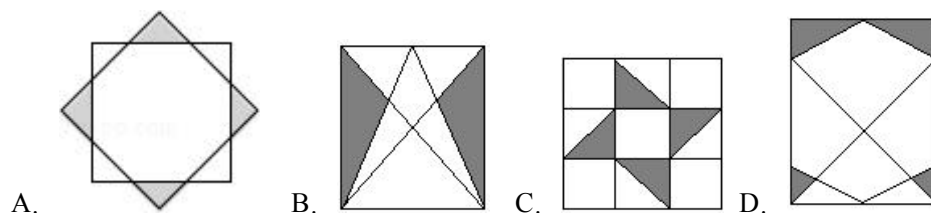
2016 年辽宁省抚顺市中考数学试卷

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2016•抚顺) 3 的相反数是 ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. -3 C. 3 D. $\frac{1}{3}$

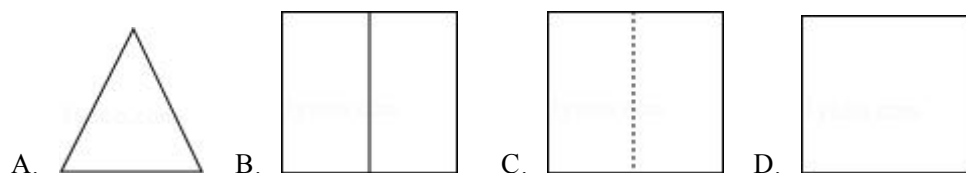
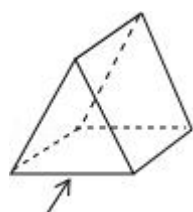
2. (3 分) (2016•抚顺) 下列图形既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



3. (3 分) (2016•抚顺) 函数 $y = \sqrt{3-x}$ 中自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \geq 3$ B. $x > 3$ C. $x \leq 3$ D. $x < 3$

4. (3 分) (2016•抚顺) 下图所示几何体的主视图是 ()



5. (3 分) (2016•抚顺) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^2 + 4a - 4 = (a+2)^2$ B. $a^2 + a^2 = a^4$ C. $(-2ab)^2 = -4a^2b^2$ D. $a^4 \div a = a^3$

6. (3 分) (2016•抚顺) 一次函数 $y = 2x - 4$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于 A, B 两点, O 为原点, 则 $\triangle AOB$ 的面积是 ()

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

7. (3 分) (2016•抚顺) 下列调查中最适合采用全面调查的是 ()

- A. 调查某批次汽车的抗撞击能力
B. 端午节期间, 抚顺市食品安全检查部门调查市场上粽子的质量情况
C. 调查某班 40 名同学的视力情况
D. 调查某池塘中现有鱼的数量

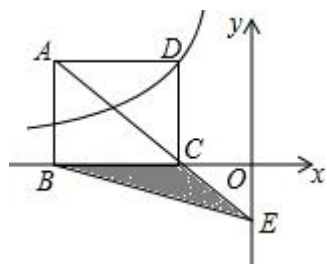
8. (3分) (2016•抚顺) 下列事件是必然事件的为 ()

- A. 购买一张彩票, 中奖
- B. 通常加热到 100°C 时, 水沸腾
- C. 任意画一个三角形, 其内角和是 360°
- D. 射击运动员射击一次, 命中靶心

9. (3分) (2016•抚顺) 某公司今年销售一种产品, 一月份获得利润 10 万元, 由于产品畅销, 利润逐月增加, 一季度共获利 36.4 万元, 已知 2 月份和 3 月份利润的月增长率相同. 设 2, 3 月份利润的月增长率为 x , 那么 x 满足的方程为 ()

- A. $10(1+x)^2=36.4$
- B. $10+10(1+x)^2=36.4$
- C. $10+10(1+x)+10(1+2x)=36.4$
- D. $10+10(1+x)+10(1+x)^2=36.4$

10. (3分) (2016•抚顺) 如图, 矩形 ABCD 的顶点 D 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x<0$) 的图象上, 顶点 B, C 在 x 轴上, 对角线 AC 的延长线交 y 轴于点 E, 连接 BE, 若 $\triangle BCE$ 的面积是 6, 则 k 的值为 ()



- A. -6
- B. -8
- C. -9
- D. -12

二、填空题 (本题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. (3分) (2016•抚顺) 2016 年我国约有 9 400 000 人参加高考, 将 9 400 000 用科学记数法表示为_____.

12. (3分) (2016•抚顺) 分解因式: $a^2b-2ab+b=$ _____.

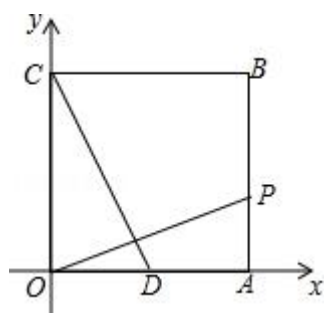
13. (3分) (2016•抚顺) 不等式组 $\begin{cases} x+6 \geq 3x+4 \\ 5x+5 > 4x-2 \end{cases}$ 的解集是_____.

14. (3分) (2016•抚顺) 某校九年二班在体育加试中全班所有学生的得分情况如表所示:

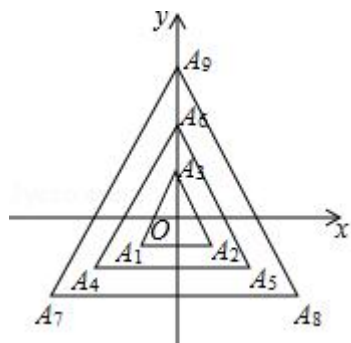
分数段 (分)	15 - 19	20 - 24	25 - 29	30
人数	1	5	9	25

从九年二班的学生中随机抽取一人, 恰好是获得 30 分的学生的概率为_____.

15. (3分) (2016•抚顺) 八年三班五名男生的身高(单位: 米)分别为 1.68, 1.70, 1.68, 1.72, 1.75, 则这五名男生身高的中位数是_____米.
16. (3分) (2016•抚顺) 若关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 - x + 1 = 0$ 有实数根, 则 a 的取值范围为_____.
17. (3分) (2016•抚顺) 如图, 点 B 的坐标为 $(4, 4)$, 作 $BA \perp x$ 轴, $BC \perp y$ 轴, 垂足分别为 A, C , 点 D 为线段 OA 的中点, 点 P 从点 A 出发, 在线段 AB, BC 上沿 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 运动, 当 $OP = CD$ 时, 点 P 的坐标为_____.



18. (3分) (2016•抚顺) 如图, $\triangle A_1A_2A_3, \triangle A_4A_5A_6, \triangle A_7A_8A_9, \dots, \triangle A_{3n-2}A_{3n-1}A_{3n}$ (n 为正整数) 均为等边三角形, 它们的边长依次为 2, 4, 6, $\dots, 2n$, 顶点 $A_3, A_6, A_9, \dots, A_{3n}$ 均在 y 轴上, 点 O 是所有等边三角形的中心, 则点 A_{2016} 的坐标为_____.

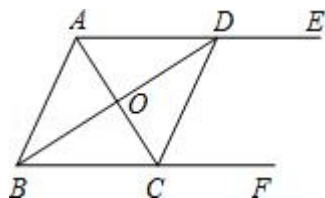


三、解答题 (第 19 题 10 分, 第 20 题 12 分, 共 22 分)

19. (10分) (2016•抚顺) 先化简, 再求值: $\frac{x}{x^2 - 1} \div (1 + \frac{1}{x-1})$, 其中 $x = \sqrt{2} - 1$.

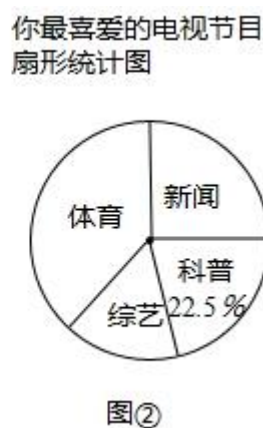
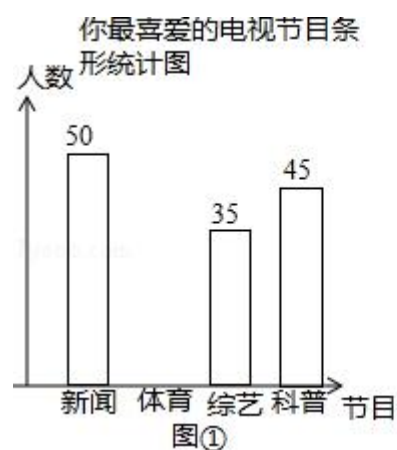
20. (12 分) (2016•抚顺) 如图, $AE \parallel BF$, AC 平分 $\angle BAE$, 且交 BF 于点 C , BD 平分 $\angle ABF$, 且交 AE 于点 D , AC 与 BD 相交于点 O , 连接 CD

- (1) 求 $\angle AOD$ 的度数;
- (2) 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形.



四、解答题 (第 21 题 12 分, 第 22 题 12 分, 共 24 分)

21. (12 分) (2016•抚顺) 某电视台为了解本地区电视节目的收视情况, 对部分广州开展了“你最喜爱的电视节目”的问卷调查 (每人只填写一项), 根据收集的数据绘制了下面两幅不完整的统计图, 根据要求回答下列问题:

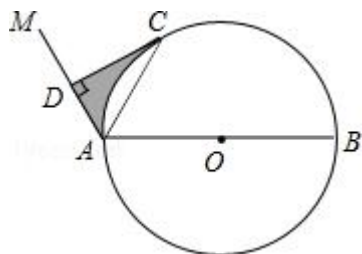


- (1) 本次问卷调查共调查了_____名观众;
- (2) 图②中最喜爱“新闻节目”的人数占调查总人数的百分比为_____, “综艺节目”在扇形统计图中所对应的圆心角的度数为_____;
- (3) 补全图①中的条形统计图;
- (4) 现有最喜爱“新闻节目” (记为 A), “体育节目” (记为 B), “综艺节目” (记为 C), “科普节目” (记为 D) 的观众各一名, 电视台要从四人中随机抽取两人参加联谊活动, 请用列表或画树状图的方法, 求出恰好抽到最喜爱“B”和“C”两位观众的概率.

22. (12 分) (2016•抚顺) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 是 $\odot O$ 上一点, 连接 AC , $\angle MAC = \angle CAB$, 作 $CD \perp AM$, 垂足为 D .

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\angle ACD = 30^\circ$, $AD = 4$, 求图中阴影部分的面积.

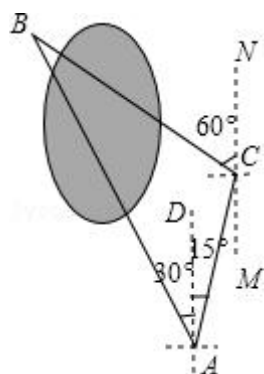


五、解答题 (满分 12 分)

23. (12 分) (2016•抚顺) 小明要测量公园北湖水隔开的两棵大树 A 和 B 之间的距离, 他在 A 处测得大树 B 在 A 的北偏西 30° 方向, 他从 A 处出发向北偏东 15° 方向走了 200 米到达 C 处, 测得大树 B 在 C 的北偏西 60° 方向.

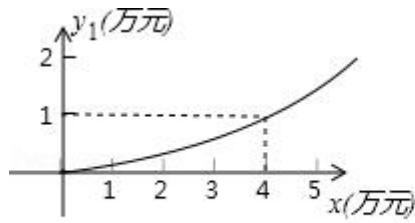
(1) 求 $\angle ABC$ 的度数;

(2) 求两棵大树 A 和 B 之间的距离 (结果精确到 1 米) (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{6} \approx 2.449$)

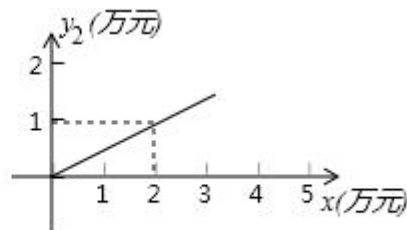


六、解答题 (满分 12 分)

24. (12 分) (2016•抚顺) 有一家苗圃计划植桃树和柏树, 根据市场调查与预测, 种植桃树的利润 y_1 (万元) 与投资成本 x (万元) 满足如图①所示的二次函数 $y_1=ax^2$; 种植柏树的利润 y_2 (万元) 与投资成本 x (万元) 满足如图②所示的正比例函数 $y_2=kx$.



图①



图②

- (1) 分别求出利润 y_1 (万元) 和利润 y_2 (万元) 关于投资成本 x (万元) 的函数关系式;
- (2) 如果这家苗圃以 10 万元资金投入种植桃树和柏树, 桃树的投资成本不低于 2 万元且不高于 8 万元, 苗圃至少获得多少利润? 最多能获得多少利润?

七、解答题 (满分 12 分)

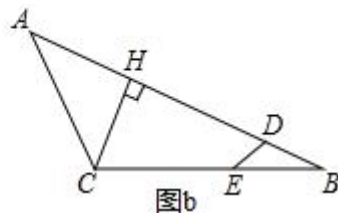
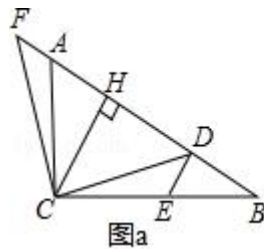
25. (12 分) (2016•抚顺) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC > AC$, 点 E 在 BC 上, $CE=CA$, 点 D 在 AB 上, 连接 DE , $\angle ACB + \angle ADE = 180^\circ$, 作 $CH \perp AB$, 垂足为 H .

(1) 如图 a, 当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, 连接 CD , 过点 C 作 $CF \perp CD$ 交 BA 的延长线于点 F .

①求证: $FA=DE$;

②请猜想三条线段 DE , AD , CH 之间的数量关系, 直接写出结论;

(2) 如图 b, 当 $\angle ACB = 120^\circ$ 时, 三条线段 DE , AD , CH 之间存在怎样的数量关系? 请证明你的结论.



八、解答题 (满分 14 分)

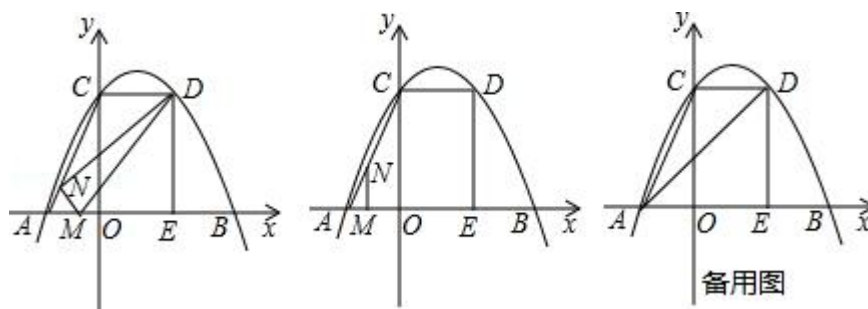
26. (14 分) (2016•抚顺) 如图, 抛物线 $y = -\frac{2}{9}x^2 + bx + c$ 经过点 A (-3, 0), 点 C (0, 4), 作 $CD \parallel x$ 轴交抛物线于点 D, 作 $DE \perp x$ 轴, 垂足为 E, 动点 M 从点 E 出发在线段 EA 上以每秒 2 个单位长度的速度向点 A 运动, 同时动点 N 从点 A 出发在线段 AC 上以每秒 1 个单位长度的速度向点 C 运动, 当一个点到达终点时, 另一个点也随之停止运动, 设运动时间为 t 秒.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 设 $\triangle DMN$ 的面积为 S , 求 S 与 t 的函数关系式;

(3) ①当 $MN \parallel DE$ 时, 直接写出 t 的值;

②在点 M 和点 N 运动过程中, 是否存在某一时刻, 使 $MN \perp AD$? 若存在, 直接写出此时 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



2016 年辽宁省抚顺市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2016•抚顺) 3 的相反数是 ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. -3 C. 3 D. $\frac{1}{3}$

【考点】相反数.

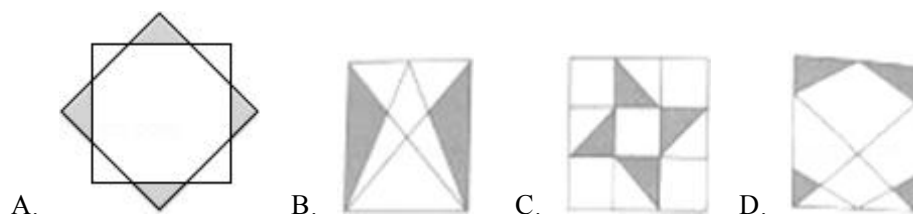
【分析】根据相反数的定义即可求解.

【解答】解：3 的相反数是 -3 ,

故选 B.

【点评】本题考查了相反数的定义，熟练相反数的定义是解题的关键.

2. (3 分) (2016•抚顺) 下列图形既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【考点】中心对称图形；轴对称图形.

【分析】根据中心对称图形的定义旋转 180° 后能够与原图形完全重合即是中心对称图形，以及轴对称图形的定义即可判断出.

【解答】解：A、该图形既是轴对称图形又是中心对称图形，故本选项正确；

B、该图形是轴对称图形，但不是中心对称图形，故本选项错误；

C、该图形是中心对称图形，但不是轴对称图形，故本选项错误；

D、该图形既不是中心对称图形，也不是轴对称图形，故本选项错误；

故选：A.

【点评】此题主要考查了中心对称图形与轴对称的定义，根据定义得出图形形状是解决问题的关键.

3. (3 分) (2016•抚顺) 函数 $y=\sqrt{3-x}$ 中自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \geq 3$ B. $x > 3$ C. $x \leq 3$ D. $x < 3$

【考点】函数自变量的取值范围.

【分析】根据被开方数大于等于 0 列式计算即可得解.

【解答】解：由题意得 $3-x \geq 0$,

解得 $x \leq 3$.

故选：C.

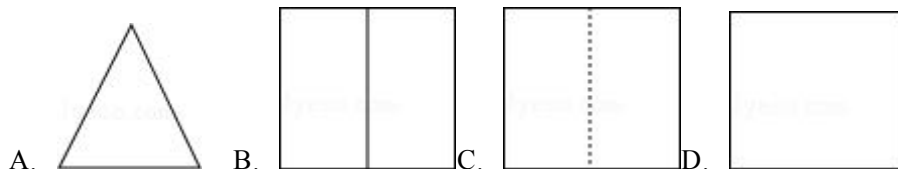
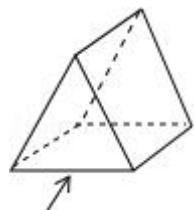
【点评】本题考查了函数自变量的范围，一般从三个方面考虑：

(1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；

(2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；

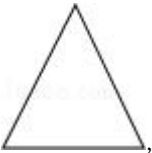
(3) 当函数表达式是二次根式时, 被开方数非负.

4. (3 分) (2016•抚顺) 下图所示几何体的主视图是 ()



【考点】简单几何体的三视图.

【分析】根据主视图的意义和几何体得出即可.

【解答】解: 几何体的主视图是 

故选 A.

【点评】本题考查了简单几何体的三视图的应用, 能理解三视图的意义是解此题的关键.

5. (3 分) (2016•抚顺) 下列运算正确的是 ()

A. $a^2+4a-4=(a+2)^2$ B. $a^2+a^2=a^4$ C. $(-2ab)^2=-4a^2b^2$ D. $a^4\div a=a^3$

【考点】同底数幂的除法; 合并同类项; 幂的乘方与积的乘方; 因式分解-运用公式法.

【分析】根据完全平方公式; 合并同类项法则: 把同类项的系数相加, 所得结果作为系数, 字母和字母的指数不变; 积的乘方法则: 把每一个因式分别乘方, 再把所得的幂相乘; 同底数幂相除, 底数不变指数相减, 对各选项分析判断后利用排除法求解.

【解答】解: A、 $a^2+4a+4=(a+2)^2$, 故 A 错误;

B、 $a^2+a^2=2a^2$, 故 B 错误;

C、 $(-2ab)^2=4a^2b^2$, 故 C 错误;

D、 $a^4\div a=a^3$, 故 D 正确.

故选: D.

【点评】本题考查完全平方公式、合并同类项、积的乘方、同底数幂的除法, 熟练掌握运算性质和法则是解题的关键.

6. (3 分) (2016•抚顺) 一次函数 $y=2x-4$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于 A, B 两点, O 为原点, 则 $\triangle AOB$ 的面积是 ()

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

【考点】一次函数图象上点的坐标特征.

【分析】由直线解析式可求得 A、B 两点的坐标, 从而可求得 OA 和 OB 的长, 再利用三角形的面积可求得答案.

【解答】解:

在 $y=2x-4$ 中, 令 $y=0$ 可得 $x=2$, 令 $x=0$ 可得 $y=-4$,

$$\begin{aligned} \therefore A(2, 0), B(0, -4), \\ \therefore OA=2, OB=4, \\ \therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4, \end{aligned}$$

故选 B.

【点评】 本题主要考查一次函数与坐标轴的交点，掌握函数图象与坐标轴的交点的求法是解题的关键.

7. (3 分) (2016•抚顺) 下列调查中最适合采用全面调查的是 ()

- A. 调查某批次汽车的抗撞击能力
- B. 端午节期间，抚顺市食品安全检查部门调查市场上粽子的质量情况
- C. 调查某班 40 名同学的视力情况
- D. 调查某池塘中现有鱼的数量

【考点】 全面调查与抽样调查.

【分析】 根据普查得到的调查结果比较准确，但所费人力、物力和时间较多，而抽样调查得到的调查结果比较近似判断即可.

【解答】 解：A、调查某批次汽车的抗撞击能力，破坏力强，适宜抽查；

B、端午节期间，抚顺市食品安全检查部门调查市场上粽子的质量情况，范围比较广，适宜抽查；

C、调查某班 40 名同学的视力情况，调查范围比较小，适宜全面调查；

D、调查某池塘中现有鱼的数量，调查难度大，适宜抽查，

故选 C.

【点评】 本题考查的是抽样调查和全面调查的区别，选择普查还是抽样调查要根据所要考查的对象的特征灵活选用，一般来说，对于具有破坏性的调查、无法进行普查、普查的意义或价值不大，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查，事关重大的调查往往选用普查.

8. (3 分) (2016•抚顺) 下列事件是必然事件的为 ()

- A. 购买一张彩票，中奖
- B. 通常加热到 100°C 时，水沸腾
- C. 任意画一个三角形，其内角和是 360°
- D. 射击运动员射击一次，命中靶心

【考点】 随机事件.

【分析】 根据必然事件、不可能事件、随机事件的概念可区别各类事件.

【解答】 解：A、购买一张彩票，中奖，是随机事件；

B、通常加热到 100°C 时，水沸腾，是必然事件；

C、任意画一个三角形，其内角和是 360° ，是不可能事件；

D、射击运动员射击一次，命中靶心，是随机事件；

故选：B.

【点评】 本题考查了必然事件，解决本题需要正确理解必然事件、不可能事件、随机事件的概念. 必然事件指在一定条件下一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件. 不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件.

9. (3分) (2016•抚顺) 某公司今年销售一种产品, 一月份获得利润 10 万元, 由于产品畅销, 利润逐月增加, 一季度共获利 36.4 万元, 已知 2 月份和 3 月份利润的月增长率相同. 设 2, 3 月份利润的月增长率为 x , 那么 x 满足的方程为 ()

- A. $10(1+x)^2=36.4$ B. $10+10(1+x)^2=36.4$
C. $10+10(1+x)+10(1+2x)=36.4$ D. $10+10(1+x)+10(1+x)^2=36.4$

【考点】由实际问题抽象出一元二次方程.

【分析】等量关系为: 一月份利润+一月份的利润 $\times$ (1+增长率)+一月份的利润 $\times$ (1+增长率) $^2=34.6$, 把相关数值代入计算即可.

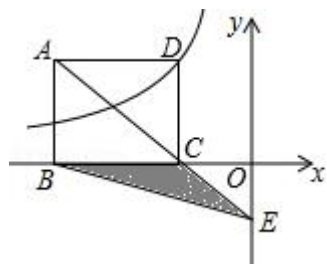
【解答】解: 设二、三月份的月增长率是 x , 依题意有

$$10+10(1+x)+10(1+x)^2=36.4,$$

故选 D.

【点评】主要考查一元二次方程的应用; 求平均变化率的方法为: 若设变化前的量为 a , 变化后的量为 b , 平均变化率为 x , 则经过两次变化后的数量关系为 $a(1\pm x)^2=b$.

10. (3分) (2016•抚顺) 如图, 矩形 ABCD 的顶点 D 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x<0$) 的图象上, 顶点 B, C 在 x 轴上, 对角线 AC 的延长线交 y 轴于点 E, 连接 BE, 若 $\triangle BCE$ 的面积是 6, 则 k 的值为 ()



- A. -6 B. -8 C. -9 D. -12

【考点】反比例函数系数 k 的几何意义; 矩形的性质; 平行线分线段成比例.

【专题】数形结合.

【分析】先设 $D(a, b)$, 得出 $CO=-a$, $CD=AB=b$, $k=ab$, 再根据 $\triangle BCE$ 的面积是 6, 得出 $BC \times OE=12$, 最后根据 $AB \parallel OE$, 得出 $\frac{BC}{OC}=\frac{AB}{EO}$, 即 $BC \cdot EO=AB \cdot CO$, 求得 ab 的值即可.

【解答】解: 设 $D(a, b)$, 则 $CO=-a$, $CD=AB=b$,

$\because$ 矩形 ABCD 的顶点 D 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x<0$) 的图象上,

$$\therefore k=ab,$$

$\because \triangle BCE$ 的面积是 6,

$$\therefore \frac{1}{2} \times BC \times OE=6, \text{ 即 } BC \times OE=12,$$

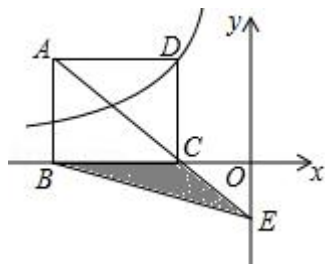
$\because AB \parallel OE$,

$$\therefore \frac{BC}{OC}=\frac{AB}{EO}, \text{ 即 } BC \cdot EO=AB \cdot CO,$$

$$\therefore 12=b \times (-a), \text{ 即 } ab=-12,$$

$$\therefore k=-12,$$

故选 (D).



【点评】 本题主要考查了反比例函数系数 k 的几何意义，矩形的性质以及平行线分线段成比例定理的综合应用，能很好地考核学生分析问题，解决问题的能力。解题的关键是将 $\triangle BCE$ 的面积与点 D 的坐标联系在一起，体现了数形结合的思想方法。

二、填空题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

11. (3 分) (2016•抚顺) 2016 年我国约有 9 400 000 人参加高考，将 9 400 000 用科学记数法表示为 9.4×10^6 。

【考点】 科学记数法—表示较大的数。

【分析】 数据绝对值大于 10 或小于 1 时科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式。其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同。当原数绝对值大于 10 时， n 是正数；当原数的绝对值小于 1 时， n 是负数。

【解答】 解：9 400 000 = 9.4×10^6 ；

故答案为： 9.4×10^6 。

【点评】 题考查的是科学记数法。任意一个绝对值大于 10 或绝对值小于 1 的数都可写成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ 。对于绝对值大于 10 的数，指数 n 等于原数的整数位数减去 1。

12. (3 分) (2016•抚顺) 分解因式： $a^2b - 2ab + b = b(a-1)^2$ 。

【考点】 提公因式法与公式法的综合运用。

【分析】 先提取公因式 b ，再利用完全平方公式进行二次分解。

【解答】 解： $a^2b - 2ab + b$ ，
 $= b(a^2 - 2a + 1)$ ，... (提取公因式)
 $= b(a-1)^2$ 。... (完全平方公式)

【点评】 本题考查了提公因式法，公式法分解因式，提取公因式后利用完全平方公式进行二次分解，注意要分解彻底。

13. (3 分) (2016•抚顺) 不等式组 $\begin{cases} x+6 \geq 3x+4 \\ 5x+5 > 4x-2 \end{cases}$ 的解集是 $-7 < x \leq 1$ 。

【考点】 解一元一次不等式组。

【分析】 分别解出不等式组中两个不等式的解，合在一起即可得出不等式组的解集。

【解答】 解： $\begin{cases} x+6 \geq 3x+4 \text{ ①} \\ 5x+5 > 4x-2 \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①，得 $x \leq 1$ ；

解不等式②，得 $x > -7$ 。

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-7 < x \leq 1$ 。

故答案为： $-7 < x \leq 1$ 。

【点评】本题考查了解一元一次不等式组，解题的关键是熟练掌握解不等式组的方法．本题属于基础题，难度不大，解集该题型题目时，熟练掌握解不等式（或不等式组）的方法是关键．

14. (3 分) (2016•抚顺) 某校九年二班在体育加试中全班所有学生的得分情况如表所示：

分数段 (分)	15 - 19	20 - 24	25 - 29	30
人数	1	5	9	25

从九年二班的学生中随机抽取一人，恰好是获得 30 分的学生的概率为 $\frac{5}{8}$ ．

【考点】概率公式．

【分析】根据统计表的意义，将各组的频数相加可得班级的总人数；读表可得恰好是获得 30 分的学生的频数，计算可得答案．

【解答】解：该班共有 $1+5+9+25=40$ 人．

$$P(30) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8},$$

故答案为： $\frac{5}{8}$ ．

【点评】主要考查的是概率的求法．如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$ ．

15. (3 分) (2016•抚顺) 八年三班五名男生的身高（单位：米）分别为 1.68，1.70，1.68，1.72，1.75，则这五名男生身高的中位数是 1.70 米．

【考点】中位数．

【分析】先把这些数从小到大排列，找出最中间的数即可得出答案．

【解答】解：把这些数从小到大排列为：1.68，1.68，1.70，1.72，1.75，
最中间的数是 1.70，
则这五名男生身高的中位数是 1.70 米；
故答案为：1.70．

【点评】此题考查了中位数，中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（最中间两个数的平均数），叫做这组数据的中位数，如果中位数的概念掌握得不好，不把数据按要求重新排列，就会错误地将这组数据最中间的那个数当作中位数．

16. (3 分) (2016•抚顺) 若关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 - x + 1 = 0$ 有实数根，则 a 的取值范围为 $a \leq \frac{5}{4}$ 且 $a \neq 1$ ．

【考点】根的判别式．

【分析】由一元二次方程 $(a-1)x^2 - x + 1 = 0$ 有实数根，则 $a-1 \neq 0$ ，即 $a \neq 1$ ，且 $\Delta \geq 0$ ，即 $\Delta = (-1)^2 - 4(a-1) = 5 - 4a \geq 0$ ，然后解两个不等式得到 a 的取值范围．

【解答】解： $\because$ 一元二次方程 $(a-1)x^2 - x + 1 = 0$ 有实数根，

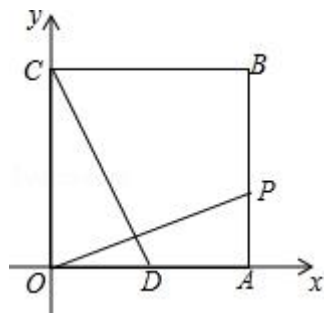
$$\therefore a-1 \neq 0 \text{ 即 } a \neq 1, \text{ 且 } \Delta \geq 0, \text{ 即有 } \Delta = (-1)^2 - 4(a-1) = 5 - 4a \geq 0, \text{ 解得 } a \leq \frac{5}{4},$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } a \leq \frac{5}{4} \text{ 且 } a \neq 1.$$

故答案为: $a \leq \frac{5}{4}$ 且 $a \neq 1$.

【点评】 本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$. 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta=0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根. 同时考查了一元二次方程的定义.

17. (3 分) (2016•抚顺) 如图, 点 B 的坐标为 (4, 4), 作 $BA \perp x$ 轴, $BC \perp y$ 轴, 垂足分别为 A, C, 点 D 为线段 OA 的中点, 点 P 从点 A 出发, 在线段 AB、BC 上沿 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 运动, 当 $OP=CD$ 时, 点 P 的坐标为 (2, 4) 或 (4, 2).



【考点】 全等三角形的判定与性质; 坐标与图形性质.

【分析】 分两种情况①当点 P 在正方形的边 AB 上时, 根据正方形的性质用 HL 判断出 $Rt\triangle OCD \cong Rt\triangle OAP$, 得出 $AP=2$, 得出点 P 的坐标, ②当点 P 在正方形的边 BC 上时, 同①的方法即可.

【解答】 解: ①当点 P 在正方形的边 AB 上时,

在 $Rt\triangle OCD$ 和 $Rt\triangle OAP$ 中 $\begin{cases} OC=OA \\ CD=OP \end{cases}$,

$\therefore Rt\triangle OCD \cong Rt\triangle OAP$,

$\therefore OD=AP$,

$\because$ 点 D 是 OA 中点,

$\therefore OD=AD=\frac{1}{2}OA$,

$\therefore AP=\frac{1}{2}AB=2$,

$\therefore P(4, 2)$,

②当点 P 在正方形的边 BC 上时,

同①的方法, 得出 $CP=\frac{1}{2}BC=2$,

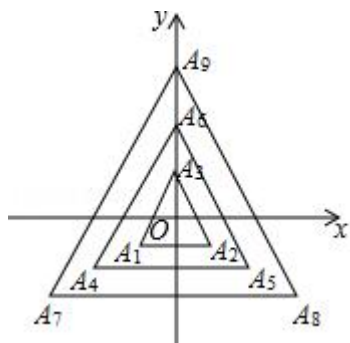
$\therefore P(2, 4)$

$\therefore P(2, 4)$ 或 $(4, 2)$

故答案为 (2, 4) 或 (4, 2)

【点评】 此题是全等三角形的判定和性质, 主要考查了正方形的性质, 全等三角形的判定和性质, 解本题的关键是判断出 $Rt\triangle OCD \cong Rt\triangle OAP$.

18. (3 分) (2016•抚顺) 如图, $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_4A_5A_6$, $\triangle A_7A_8A_9$, ..., $\triangle A_{3n-2}A_{3n-1}A_{3n}$ (n 为正整数) 均为等边三角形, 它们的边长依次为 2, 4, 6, ..., $2n$, 顶点 $A_3, A_6, A_9, \dots, A_{3n}$ 均在 y 轴上, 点 O 是所有等边三角形的中心, 则点 A_{2016} 的坐标为 $(0, 448\sqrt{3})$.



【考点】等边三角形的性质；规律型：点的坐标.

【分析】先关键等边三角形的性质和已知条件得出 A_3 的坐标，根据每一个三角形有三个顶点确定出 A_{2016} 所在的三角形，再求出相应的三角形的边长以及 A_{2016} 的纵坐标的长度，即可得解；

【解答】解：∵ $\triangle A_1A_2A_3$ 为等边三角形，边长为 2，点 $A_3, A_6, A_9, \dots, A_{3n}$ 均在 y 轴上，点 O 是所有等边三角形的中心，

∴ A_3 的坐标为 $(0, \frac{2}{3}\sqrt{3})$,

∵ $2016 \div 3 = 672$,

∴ A_{2016} 是第 672 个等边三角形的第 3 个顶点，

∴ 点 A_{2016} 的坐标为 $(0, \frac{2}{3} \times \frac{1344}{2} \sqrt{3})$,

即点 A_{2016} 的坐标为 $(0, 448\sqrt{3})$;

故答案为： $(0, 448\sqrt{3})$.

【点评】本题是点的变化规律的考查，主要利用了等边三角形的性质，确定出点 A_3 和 A_{2016} 所在三角形是解题的关键.

三、解答题（第 19 题 10 分，第 20 题 12 分，共 22 分）

19. (10 分) (2016•抚顺) 先化简，再求值： $\frac{x}{x^2-1} \div (1 + \frac{1}{x-1})$ ，其中 $x = \sqrt{2} - 1$.

【考点】分式的化简求值.

【分析】分式的化简，要熟悉混合运算的顺序，分子、分母能因式分解的先因式分解；除法要统一为乘法运算，注意化简后，将 $x = \sqrt{2} - 1$ ，代入化简后的式子求出即可.

【解答】解： $\frac{x}{x^2-1} \div (1 + \frac{1}{x-1})$
 $= \frac{x}{(x-1)(x+1)} \div (\frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1})$
 $= \frac{x}{(x-1)(x+1)} \div \frac{x}{x-1}$
 $= \frac{x}{(x-1)(x+1)} \times \frac{x-1}{x}$

$$= \frac{1}{x+1},$$

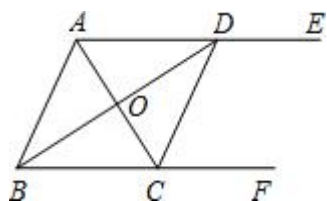
$$\text{把 } x = \sqrt{2} - 1, \text{ 代入原式} = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点评】此题主要考查了分式混合运算，要注意分子、分母能因式分解的先因式分解；除法要统一为乘法运算是解题关键.

20. (12 分) (2016•抚顺) 如图， $AE \parallel BF$ ， AC 平分 $\angle BAE$ ，且交 BF 于点 C ， BD 平分 $\angle ABF$ ，且交 AE 于点 D ， AC 与 BD 相交于点 O ，连接 CD

(1) 求 $\angle AOD$ 的度数；

(2) 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.



【考点】菱形的判定.

【分析】(1) 首先根据角平分线的性质得到 $\angle DAC = \angle BAC$ ， $\angle ABD = \angle DBC$ ，然后根据平行线的性质得到 $\angle DAB + \angle CBA = 180^\circ$ ，从而得到 $\angle BAC + \angle ABD = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC)$

$= \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$ ，得到答案 $\angle AOD = 90^\circ$ ；

(2) 根据平行线的性质得出 $\angle ADB = \angle DBC$ ， $\angle DAC = \angle BCA$ ，根据角平分线定义得出 $\angle DAC = \angle BAC$ ， $\angle ABD = \angle DBC$ ，求出 $\angle BAC = \angle ACB$ ， $\angle ABD = \angle ADB$ ，根据等腰三角形的判定得出 $AB = BC = AD$ ，根据平行四边形的判定得出四边形 $ABCD$ 是平行四边形，即可得出答案.

【解答】解：(1) $\because AC$ 、 BD 分别是 $\angle BAD$ 、 $\angle ABC$ 的平分线，

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC, \angle ABD = \angle DBC,$$

$$\because AE \parallel BF,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle CBA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABD = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ;$$

(2) 证明： $\because AE \parallel BF$,

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC, \angle DAC = \angle BCA,$$

$\because AC$ 、 BD 分别是 $\angle BAD$ 、 $\angle ABC$ 的平分线，

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC, \angle ABD = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACB, \angle ABD = \angle ADB,$$

$$\therefore AB = BC, AB = AD$$

$$\therefore AD = BC,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

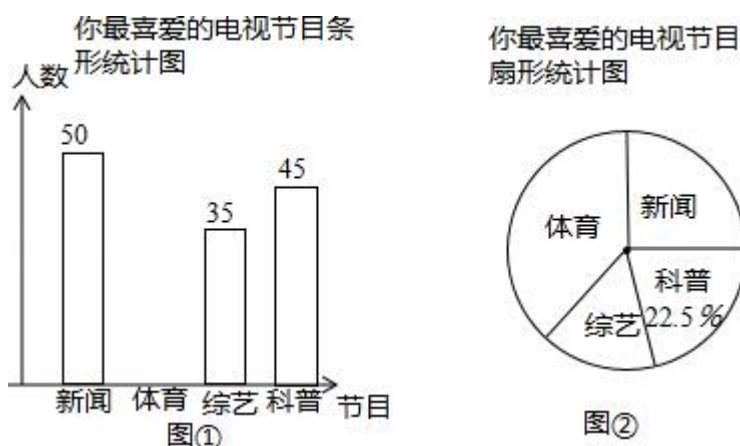
$$\because AD = AB,$$

∴ 四边形 ABCD 是菱形.

【点评】 本题考查了等腰三角形的性质，平行四边形的判定，菱形的判定的应用，能得出四边形 ABCD 是平行四边形是解此题的关键.

四、解答题 (第 21 题 12 分, 第 22 题 12 分, 共 24 分)

21. (12 分) (2016•抚顺) 某电视台为了解本地区电视节目的收视情况, 对部分广州开展了“你最喜爱的电视节目”的问卷调查 (每人只填写一项), 根据收集的数据绘制了下面两幅不完整的统计图, 根据要求回答下列问题:



- (1) 本次问卷调查共调查了 200 名观众;
- (2) 图②中最喜爱“新闻节目”的人数占调查总人数的百分比为 40%, “综艺节目”在扇形统计图中所对应的圆心角的度数为 63°;
- (3) 补全图①中的条形统计图;
- (4) 现有最喜爱“新闻节目” (记为 A), “体育节目” (记为 B), “综艺节目” (记为 C), “科普节目” (记为 D) 的观众各一名, 电视台要从四人中随机抽取两人参加联谊活动, 请用列表或画树状图的方法, 求出恰好抽到最喜爱“B”和“C”两位观众的概率.

【考点】 列表法与树状图法; 扇形统计图; 条形统计图.

【分析】 (1) 用喜欢科普节目的人数除以它所占的百分比即可得到调查的总人数;

(2) 用喜爱“新闻节目”的人数除以调查总人数得到它所占的百分比, 然后用 360° 乘以喜欢“综艺节目”的人数所占的百分比得到综艺节目”在扇形统计图中所对应的圆心角的度数;

(3) 用调查的总人数分别减去喜欢新闻、综艺、科普的人数得到喜欢体育的人数, 然后补全图①中的条形统计图;

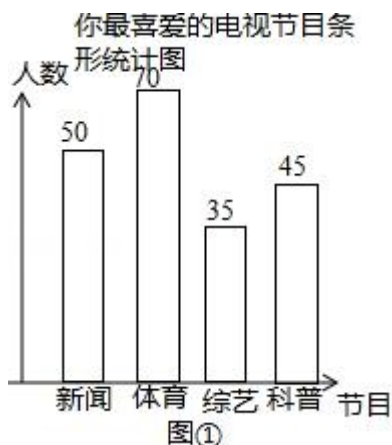
(4) 画树状图展示所有 12 种等可能的结果数, 再找出抽到最喜爱“B”和“C”两位观众的结果数, 然后根据概率公式求解.

【解答】 解: (1) 本次问卷调查共调查的观众数为 $45 \div 22.5\% = 200$ (人);

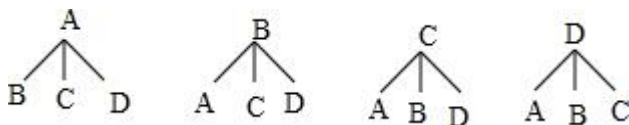
(2) 图②中最喜爱“新闻节目”的人数占调查总人数的百分比为 $50 \div 200 = 40\%$; “综艺节目”在扇形统计图中所对应的圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{35}{200} = 63^\circ$;

故答案为 200, 40%, 63° ;

(3) 最喜爱“新闻节目”的人数为 $200 - 50 - 35 - 45 = 70$ (人), 如图,



(4) 画树状图为:



共有 12 种等可能的结果数, 恰好抽到最喜爱“B”和“C”两位观众的结果数为 2,

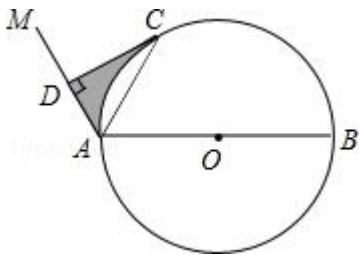
所以恰好抽到最喜爱“B”和“C”两位观众的概率 $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

【点评】 本题考查了列表法与树状图法: 通过列表法或树状图法展示所有等可能的结果求出 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 然后根据概率公式求出事件 A 或 B 的概率. 也考查了统计图.

22. (12 分) (2016•抚顺) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 是 $\odot O$ 上一点, 连接 AC, $\angle MAC = \angle CAB$, 作 $CD \perp AM$, 垂足为 D.

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\angle ACD = 30^\circ$, $AD = 4$, 求图中阴影部分的面积.



【考点】 切线的判定; 扇形面积的计算.

【分析】 (1) 先证明 $OC \parallel AM$, 由 $CD \perp AM$, 推出 $OC \perp CD$ 即可解决问题.

(2) 根据 $S_{\text{阴}} = S_{\triangle ACD} - (S_{\text{扇形} OAC} - S_{\triangle AOC})$ 计算即可.

【解答】 解: (1) 连接 OC.

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA,$$

$$\because \angle MAC = \angle OAC,$$

$$\therefore \angle MAC = \angle OCA,$$

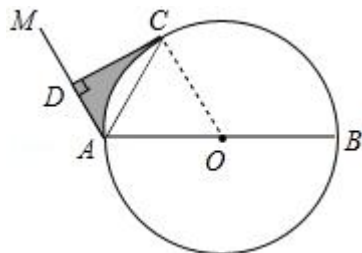
$$\therefore OC \parallel AM,$$

$$\because CD \perp AM,$$

$$\therefore OC \perp CD,$$

$$\therefore CD \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线.}$$

$$\begin{aligned}
(2) & \text{ 在 } \text{Rt}\triangle ACD \text{ 中, } \because \angle ACD=30^\circ, AD=4, \angle ADC=90^\circ, \\
& \therefore AC=2AD=8, CD=\sqrt{3}AD=4\sqrt{3}, \\
& \because \angle MAC=\angle OAC=60^\circ, OA=OC, \\
& \therefore \triangle AOC \text{ 是等边三角形,} \\
& \therefore S_{\text{阴}}=S_{\triangle ACD} - (S_{\text{扇形 } OAC} - S_{\triangle AOC}) \\
& = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} - \left(\frac{60 \cdot \pi \cdot 8^2}{360} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 \right) \\
& = 24\sqrt{3} - \frac{32}{3}\pi.
\end{aligned}$$



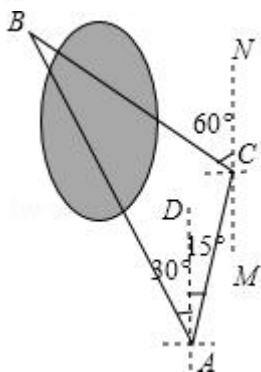
【点评】本题考查切线的判定、扇形的面积，解题的关键是熟练掌握切线的判定方法，学会利用分割法求面积，属于中考常考题型.

五、解答题 (满分 12 分)

23. (12 分) (2016•抚顺) 小明要测量公园北湖水隔开的两棵大树 A 和 B 之间的距离，他在 A 处测得大树 B 在 A 的北偏西 30° 方向，他从 A 处出发向北偏东 15° 方向走了 200 米到达 C 处，测得大树 B 在 C 的北偏西 60° 方向.

(1) 求 $\angle ABC$ 的度数;

(2) 求两棵大树 A 和 B 之间的距离 (结果精确到 1 米) (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{6} \approx 2.449$)



【考点】解直角三角形的应用-方向角问题.

【专题】计算题.

【分析】(1) 先利用平行线的性质得 $\angle ACM=\angle DAC=15^\circ$ ，再利用平角的定义计算出 $\angle ACB=105^\circ$ ，然后根据三角形内角和计算 $\angle ABC$ 的度数;

(2) 作 $CH \perp AB$ 于 H，如图，易得 $\triangle ACH$ 为等腰直角三角形，则 $AH=CH=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=100\sqrt{2}$.

在 $\text{Rt}\triangle BCH$ 中利用含 30° 的直角三角形三边的关系得到 $BH=\sqrt{3}CH=100\sqrt{6}$, $AB=AH+BH=100\sqrt{2}+100\sqrt{6}$ ，然后进行近似计算即可.

【解答】解: (1) $\because CM \parallel AD$,

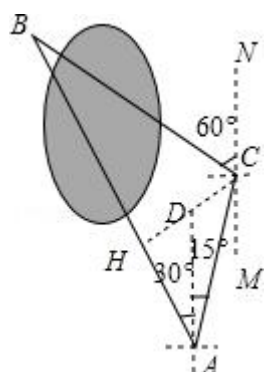
$\therefore \angle ACM = \angle DAC = 15^\circ$,
 $\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle BCN - \angle ACM = 180^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 105^\circ$,
 而 $\angle BAC = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$,
 $\therefore \angle ABC = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ$;

(2) 作 $CH \perp AB$ 于 H , 如图,

$\therefore \angle BAC = 45^\circ$,
 $\therefore \triangle ACH$ 为等腰直角三角形,
 $\therefore AH = CH = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 200 = 100\sqrt{2}$,

在 $Rt\triangle BCH$ 中, $\therefore \angle HBC = 30^\circ$,
 $\therefore BH = \sqrt{3}CH = 100\sqrt{6}$,
 $\therefore AB = AH + BH = 100\sqrt{2} + 100\sqrt{6} \approx 141.4 + 244.9 \approx 386$.

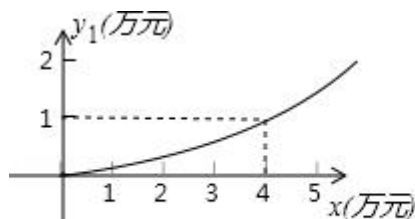
答: 两棵大树 A 和 B 之间的距离约为 386 米.



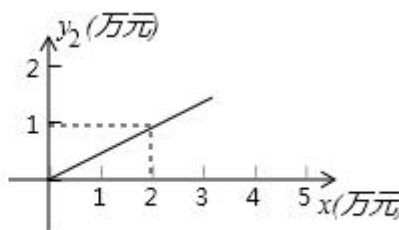
【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 方向角问题: 在解决有关方向角的问题中, 一般要根据题意理清图形中各角的关系, 有时所给的方向角并不一定在直角三角形中, 需要用到两直线平行内错角相等或一个角的余角等知识转化为所需要的角. 解决此题的关键作 $CH \perp AB$ 构建含特殊角的直角三角形.

六、解答题 (满分 12 分)

24. (12 分) (2016•抚顺) 有一家苗圃计划植桃树和柏树, 根据市场调查与预测, 种植桃树的利润 y_1 (万元) 与投资成本 x (万元) 满足如图①所示的二次函数 $y_1 = ax^2$; 种植柏树的利润 y_2 (万元) 与投资成本 x (万元) 满足如图②所示的正比例函数 $y_2 = kx$.



图①



图②

- (1) 分别求出利润 y_1 (万元) 和利润 y_2 (万元) 关于投资成本 x (万元) 的函数关系式;
- (2) 如果这家苗圃以 10 万元资金投入种植桃树和柏树, 桃树的投资成本不低于 2 万元且不高出 8 万元, 苗圃至少获得多少利润? 最多能获得多少利润?

【考点】 二次函数的应用; 一元一次不等式的应用; 一次函数的应用.

【分析】 (1) 利用待定系数法求两个函数的解析式;

(2) 根据总投资成本为 10 万元, 设种植桃树的投资成本 x 万元, 总利润为 W 万元, 则种植柏树的投资成本 $(10-x)$ 万元, 列函数关系式, 发现是二次函数, 画出函数图象, 找出当 $2 \leq x \leq 8$ 时的最小利润和最大利润.

【解答】解: (1) 把 $(4, 1)$ 代入 $y_1 = ax^2$ 中得:

$$16a = 1,$$

$$a = \frac{1}{16},$$

$$\therefore y_1 = \frac{1}{16}x^2,$$

把 $(2, 1)$ 代入 $y_2 = kx$ 中得:

$$2k = 1,$$

$$k = \frac{1}{2},$$

$$\therefore y_2 = \frac{1}{2}x;$$

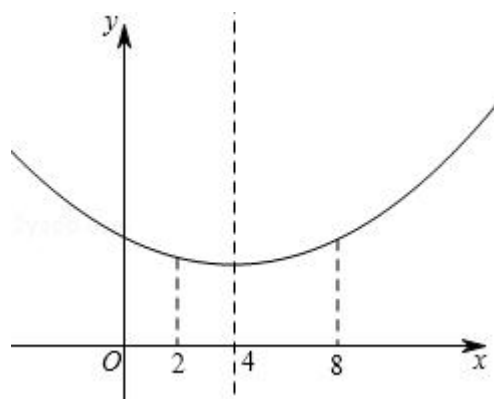
(2) 设种植桃树的投资成本 x 万元, 总利润为 W 万元, 则种植柏树的投资成本 $(10-x)$ 万元,

$$\text{则 } W = y_1 + y_2 = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}(10-x) = \frac{1}{16}(x-4)^2 + 4,$$

由图象得: 当 $2 \leq x \leq 8$ 时, 当 $x=4$ 时, W 有最小值, $W_{\text{小}} = 4$,

当 $x=8$ 时, W 有最大值, $W_{\text{大}} = \frac{1}{16}(8-4)^2 + 4 = 5$,

答: 苗圃至少获得 4 万元利润, 最多能获得 8 万元利润.



【点评】本题是二次函数和一次函数的应用, 考查了利用待定系数法求函数的解析式; 对于二次函数, 在求最值问题时, 不一定是顶点坐标, 要根据实际情况和图象结合考虑, 得出结论.

七、解答题 (满分 12 分)

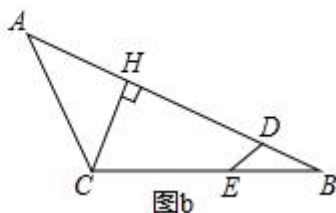
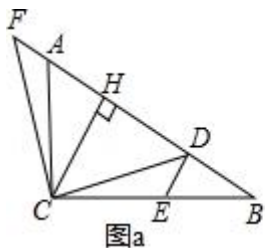
25. (12 分) (2016•抚顺) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC > AC$, 点 E 在 BC 上, $CE = CA$, 点 D 在 AB 上, 连接 DE , $\angle ACB + \angle ADE = 180^\circ$, 作 $CH \perp AB$, 垂足为 H .

(1) 如图 a, 当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, 连接 CD , 过点 C 作 $CF \perp CD$ 交 BA 的延长线于点 F .

①求证: $FA = DE$;

②请猜想三条线段 DE , AD , CH 之间的数量关系, 直接写出结论;

(2) 如图 b, 当 $\angle ACB=120^\circ$ 时, 三条线段 DE, AD, CH 之间存在怎样的数量关系? 请证明你的结论.



【考点】 三角形综合题.

【分析】 (1) ①根据 ASA 证明 $\triangle AFC \cong \triangle EDC$, 可得结论;

②结论是: $DE+AD=2CH$, 根据 CH 是等腰直角 $\triangle FCD$ 斜边上的中线得: $FD=2CH$, 再进行等量代换可得结论;

(2) 如图 b, 根据 (1) 作辅助线, 构建全等三角形, 证明 $\triangle FAC \cong \triangle DEC$ 得 $AF=DE$, $FC=CD$, 得等腰 $\triangle FDC$, 由三线合一的性质得 CH, 是底边中线和顶角平分线, 得直角 $\triangle CHD$, 利用三角函数得出 HD 与 CH 的关系, 从而得出结论.

【解答】 证明: (1) ① $\because CF \perp CD$,

$$\therefore \angle FCD=90^\circ,$$

$$\because \angle ACB=90^\circ,$$

$$\therefore \angle FCA + \angle ACD = \angle ACD + \angle DCE,$$

$$\therefore \angle FCA = \angle DCE,$$

$$\because \angle FAC = 90^\circ + \angle B, \quad \angle CED = 90^\circ + \angle B,$$

$$\therefore \angle FAC = \angle CED,$$

$$\because AC=CE,$$

$$\therefore \triangle AFC \cong \triangle EDC,$$

$$\therefore FA=DE,$$

② $DE+AD=2CH$, 理由是:

$$\because \triangle AFC \cong \triangle EDC,$$

$$\therefore CF=CD,$$

$$\because CH \perp AB,$$

$$\therefore FH=HD,$$

在 $Rt\triangle FCD$ 中, CH 是斜边 FD 的中线,

$$\therefore FD=2DH,$$

$$\therefore AF+AD=2CH,$$

$$\therefore DE+AD=2CH;$$

(2) $AD+DE=2\sqrt{3}CH$, 理由是:

如图 b, 作 $\angle FCD=\angle ACB$, 交 BA 延长线于 F,

$$\because \angle FCA + \angle ACD = \angle ACD + \angle DCB,$$

$$\therefore \angle FCA = \angle DCB,$$

$$\because \angle EDA=60^\circ,$$

$$\therefore \angle EDB=120^\circ,$$

$$\because \angle FAC=120^\circ + \angle B, \quad \angle CED=120^\circ + \angle B,$$

$$\therefore \angle FAC = \angle CED,$$

$$\because AC=CE,$$

$$\therefore \triangle FAC \cong \triangle DEC,$$

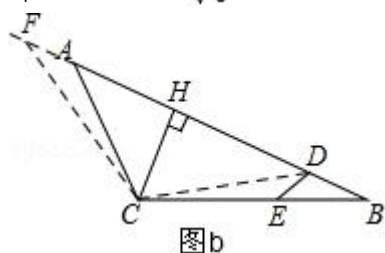
$\therefore AF=DE, FC=CD,$
 $\therefore CH \perp FD,$
 $\therefore FH=HD, \angle FCH=\angle HCD=60^\circ,$

在 $Rt\triangle CHD$ 中, $\tan 60^\circ = \frac{DH}{CH},$

$\therefore DH = \sqrt{3}CH,$

$\therefore AD+DE=AD+AF=FD=2DH=2\sqrt{3}CH,$

即: $AD+DE=2\sqrt{3}CH.$



【点评】 本题是三角形的综合题, 综合考查了全等三角形、等腰三角形三线合一、直角三角形的性质, 本题从第一问中三条线段的数量关系, 引申到第二问中非垂直关系的数量关系, 运用了相同的方法, 构建全等三角形, 将线段转化到同一条直线上或同一三角形中确定其数量关系, 都运用了等腰三角形三线合一的性质.

八、解答题 (满分 14 分)

26. (14 分) (2016•抚顺) 如图, 抛物线 $y = -\frac{2}{9}x^2 + bx + c$ 经过点 A (-3, 0), 点 C (0, 4),

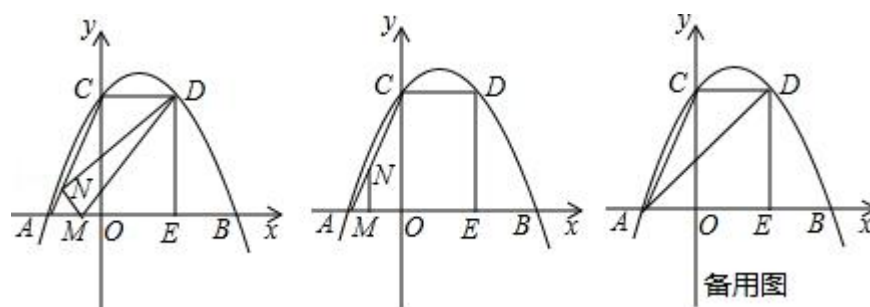
作 $CD \parallel x$ 轴交抛物线于点 D, 作 $DE \perp x$ 轴, 垂足为 E, 动点 M 从点 E 出发在线段 EA 上以每秒 2 个单位长度的速度向点 A 运动, 同时动点 N 从点 A 出发在线段 AC 上以每秒 1 个单位长度的速度向点 C 运动, 当一个点到达终点时, 另一个点也随之停止运动, 设运动时间为 t 秒.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 设 $\triangle DMN$ 的面积为 S, 求 S 与 t 的函数关系式;

(3) ①当 $MN \parallel DE$ 时, 直接写出 t 的值;

②在点 M 和点 N 运动过程中, 是否存在某一时刻, 使 $MN \perp AD$? 若存在, 直接写出此时 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



【考点】 二次函数综合题.

【分析】 (1) 根据抛物线 $y = -\frac{2}{9}x^2 + bx + c$ 经过点 A (-3, 0), 点 C (0, 4), 可以求得 b、c 的值, 从而可以求得抛物线的解析式;

(2) 要求 $\triangle DMN$ 的面积, 根据题目中的信息可以得到梯形 $AEDC$ 的面积、 $\triangle ANM$ 的面积、 $\triangle MDE$ 的面积、 $\triangle CND$ 的面积, 从而可以解答本题;

(3) ①根据 $MN \parallel DE$, 可以得到 $\triangle AMN$ 和 $\triangle AOC$ 相似, 从而可以求得 t 的值;

②根据题目中的条件可以求得点 N 、点 M 、点 A 、点 D 的坐标, 由 $AD \perp MN$ 可以求得相应的 t 的值.

【解答】解: (1) $\because$ 抛物线 $y = -\frac{2}{9}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$, 点 $C(0, 4)$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{2}{9} \times (-3)^2 + b \times (-3) + c = 0 \\ c = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ c = 4 \end{cases},$$

即抛物线的解析式为: $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 4$;

(2) 作 $NH \perp AM$ 于点 H , 如由图 1 所示,

$$\because y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 4,$$

$$\therefore \text{对称轴 } x = -\frac{\frac{2}{3}}{2 \times (-\frac{2}{9})} = \frac{3}{2},$$

$\because$ 点 $A(-3, 0)$, 点 $C(0, 4)$, $CD \parallel x$ 轴交抛物线于点 D , $DE \perp x$ 轴, 垂足为 E ,

$\therefore$ 点 $D(3, 4)$, 点 $E(3, 0)$, $OA=3$, $OC=4$,

$\therefore AC=5$, $AE=6$, $CD=3$,

$\because NH \perp AM$, $AN=tME=2t$,

$\therefore \triangle ANH \sim \triangle ACO$, $AM=6-2t$,

$$\therefore \frac{AN}{AC} = \frac{NH}{CO},$$

$$\text{即 } \frac{t}{5} = \frac{NH}{4}, \text{ 得 } NH=0.8t,$$

$$\therefore S = S_{\text{梯形} AEDC} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle DME} - S_{\triangle CDN}$$

$$= \frac{1}{2}(3+6) \times 4 - \frac{1}{2} \times (6-2t) \times 0.8t - \frac{1}{2} \times 2t \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times (4-0.8t)$$

$$= 0.8t^2 - 5.2t + 12,$$

即 S 与 t 的函数关系式是 $S = 0.8t^2 - 5.2t + 12$ ($0 < t \leq 3$);

(3) ①当 $MN \parallel DE$ 时, t 的值是 $\frac{30}{13}$,

理由: 如右图 2 所示

$\because MN \parallel DE$, $AE=6$, $AC=5$, $AO=3$,

$\therefore AM=6-2t$, $AN=t$, $\triangle AMN \sim \triangle AOC$,

$$\therefore \frac{AM}{AO} = \frac{AN}{AC},$$

$$\text{即 } \frac{6-2t}{3} = \frac{t}{5},$$

$$\text{解得, } t = \frac{30}{13};$$

②存在某一时刻, 使 $MN \perp AD$, 此时 t 的值是 $\frac{90}{47}$,

理由: 如右图 3 所示,

设过点 $A(-3, 0)$, $C(0, 4)$ 的直线的解析式为 $y=kx+b$,

$$\text{则 } \begin{cases} -3k+b=0 \\ b=4 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} k=\frac{4}{3} \\ b=4 \end{cases},$$

即直线 AC 的解析式为 $y=\frac{4}{3}x+4$,

$$\therefore NH=0.8t,$$

$\therefore$ 点 N 的纵坐标为 $0.8t$,

$$\text{将 } y=0.8t \text{ 代入 } y=\frac{4}{3}x+4 \text{ 得 } x=0.6t-3,$$

$$\therefore \text{点 } N(0.6t-3, 0.8t)$$

$$\therefore \text{点 } E(3, 0), ME=2t,$$

$$\therefore \text{点 } M(3-2t, 0),$$

$$\therefore \text{点 } A(-3, 0), \text{点 } D(3, 4), \text{点 } M(3-2t, 0), \text{点 } N(0.6t-3, 0.8t), AD \perp MN,$$

$$\therefore \frac{4-0}{3-(-3)} \cdot \frac{0.8t-0}{(0.6t-3)-(3-2t)} = -1,$$

$$\text{解得, } t = \frac{90}{47}.$$

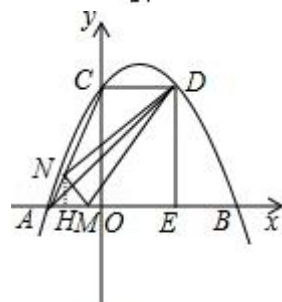


图3

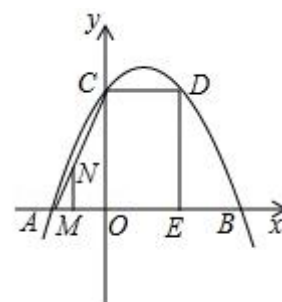


图2

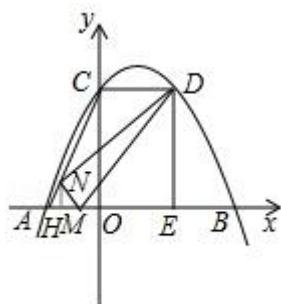


图1

【点评】 本题考查二次函数综合题，解题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，运用三角形的相似，数形结合的思想解答问题.