

2016 年辽宁省丹东市中考数学试卷

一、选择题（下列各题的备选答案中，只有一个是正确的。每小题 3 分，共 24 分）

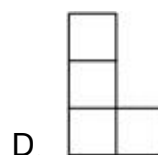
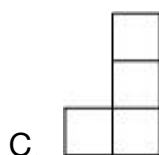
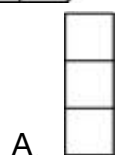
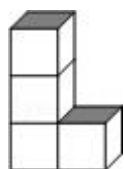
1. (3 分) -3 的倒数是 ()

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. -3

2. (3 分) 2016 年 1 月 19 日，国家统计局公布了 2015 年宏观经济数据，初步核算，全年国内生产总值为 676000 亿元. 676000 用科学记数法表示为 ()

- A. 6.76×10^6 B. 6.76×10^5 C. 67.6×10^5 D. 0.676×10^6

3. (3 分) 如图所示几何体的左视图为 ()



4. (3 分) 一组数据 8, 3, 8, 6, 7, 8, 7 的众数和中位数分别是 ()

- A. 8, 6 B. 7, 6 C. 7, 8 D. 8, 7

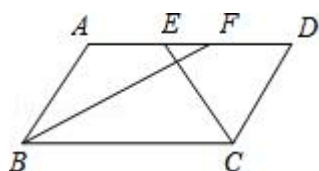
5. (3 分) 下列计算结果正确的是 ()

- A. $a^8 \div a^4 = a^2$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$
C. $(a^3)^2 = a^6$ D. $(-2a^2)^3 = 8a^6$

6. (3 分) 二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ 的解为 ()

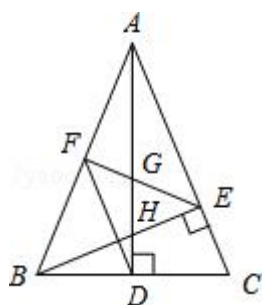
- A. $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

7. (3 分) 如图，在 $\square ABCD$ 中，BF 平分 $\angle ABC$ ，交 AD 于点 F，CE 平分 $\angle BCD$ ，交 AD 于点 E，AB=6，EF=2，则 BC 长为 ()



- A. 8 B. 10 C. 12 D. 14

8. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 和 BE 是高, $\angle ABE=45^\circ$, 点 F 是 AB 的中点, AD 与 FE 、 BE 分别交于点 G 、 H , $\angle CBE=\angle BAD$. 有下列结论: ① $FD=FE$; ② $AH=2CD$; ③ $BC \cdot AD = \sqrt{2}AE^2$; ④ $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle ADF}$. 其中正确的有 ()



- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

二、填空题 (每小题 3 分, 共 24 分)

9. (3分) 分解因式: $xy^2 - x =$ _____.

10. (3分) 不等式组 $\begin{cases} x-6 > -2x \\ \frac{1}{2}x < 3 \end{cases}$ 的解集为_____.

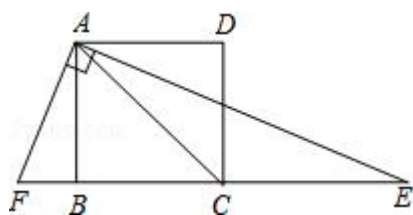
11. (3分) 一个袋中装有两个红球、三个白球, 每个球除颜色外都相同. 从中任意摸出一个球, 摸到红球的概率是_____.

12. (3分) 反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象经过点 $(2, 3)$, 则 $k =$ _____.

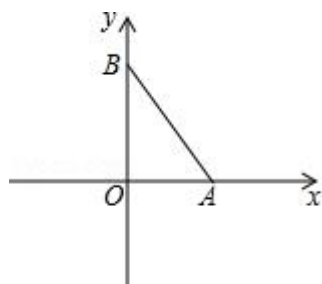
13. (3分) 某公司今年4月份营业额为60万元, 6月份营业额达到100万元, 设该公司5、6两个月营业额的月均增长率为 x , 则可列方程为_____.

14. (3分) 观察下列数据: $-2, \frac{5}{2}, -\frac{10}{3}, \frac{17}{4}, -\frac{26}{5}, \dots$, 它们是按一定规律排列的, 依照此规律, 第11个数据是_____.

15. (3分) 如图, 正方形 $ABCD$ 边长为 3, 连接 AC , AE 平分 $\angle CAD$, 交 BC 的延长线于点 E , $FA \perp AE$, 交 CB 延长线于点 F , 则 EF 的长为_____.



16. (3分) 如图, 在平面直角坐标系中, A 、 B 两点分别在 x 轴、 y 轴上, $OA=3$, $OB=4$, 连接 AB . 点 P 在平面内, 若以点 P 、 A 、 B 为顶点的三角形与 $\triangle AOB$ 全等 (点 P 与点 O 不重合), 则点 P 的坐标为_____.

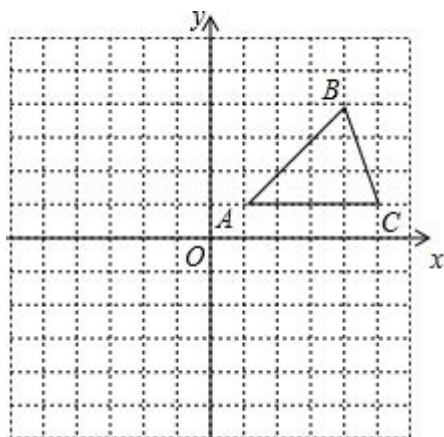


三、解答题 (每小题 8 分, 共 16 分)

17. (8分) 计算: $4\sin 60^\circ + |3 - \sqrt{12}| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (\pi - 2016)^0$.

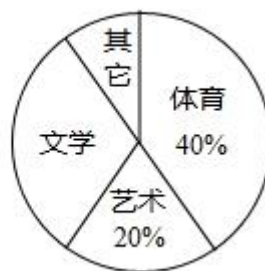
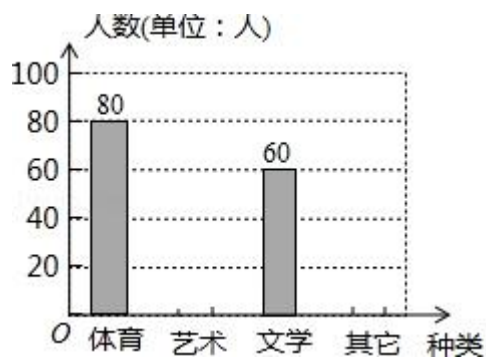
18. (8分) 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的位置如图所示 (每个小方格都是边长为 1 个单位长度的正方形).

- (1) 将 $\triangle ABC$ 沿 x 轴方向向左平移 6 个单位, 画出平移后得到的 $\triangle A_1B_1C_1$;
- (2) 将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 顺时针旋转 90° , 画出旋转后得到的 $\triangle AB_2C_2$, 并直接写出点 B_2 、 C_2 的坐标.



四、(每小题 10 分，共 20 分)

19. (10 分) 为了促进学生多样化发展，某校组织开展了社团活动，分别设置了体育类、艺术类、文学类及其它类社团（要求人人参与社团，每人只能选择一项）。为了解学生喜爱哪种社团活动，学校做了一次抽样调查。根据收集到的数据，绘制成如下两幅不完整的统计图，请根据图中提供的信息，完成下



列问题：

- (1) 此次共调查了多少人？
- (2) 求文学社团在扇形统计图中所占圆心角的度数；
- (3) 请将条形统计图补充完整；
- (4) 若该校有 1500 名学生，请估计喜欢体育类社团的学生有多少人？

20. (10 分) 甲、乙两人进行摸牌游戏. 现有三张形状大小完全相同的牌, 正面分别标有数字 2, 3, 5. 将三张牌背面朝上, 洗匀后放在桌子上.

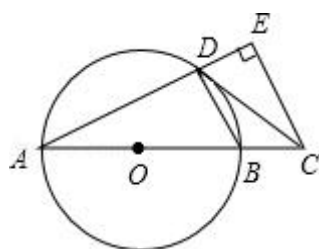
- (1) 甲从中随机抽取一张牌, 记录数字后放回洗匀, 乙再随机抽取一张. 请用列表法或画树状图的方法, 求两人抽取相同数字的概率;
- (2) 若两人抽取的数字和为 2 的倍数, 则甲获胜; 若抽取的数字和为 5 的倍数, 则乙获胜. 这个游戏公平吗? 请用概率的知识加以解释.

五、(每小题 10 分, 共 20 分)

21. (10 分) 某商场购进甲、乙两种商品, 乙商品的单价是甲商品单价的 2 倍, 购买 240 元甲商品的数量比购买 300 元乙商品的数量多 15 件, 求两种商品单价各为多少元?

22. (10 分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 AB 的延长线上, CD 与 $\odot O$ 相切于点 D , $CE \perp AD$, 交 AD 的延长线于点 E .

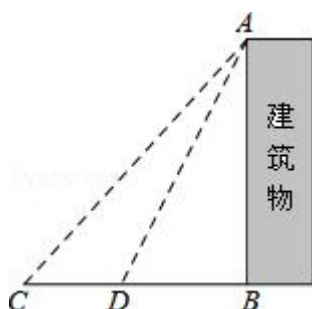
- (1) 求证: $\angle BDC = \angle A$;
- (2) 若 $CE=4$, $DE=2$, 求 AD 的长.



六、(每小题 10 分，共 20 分)

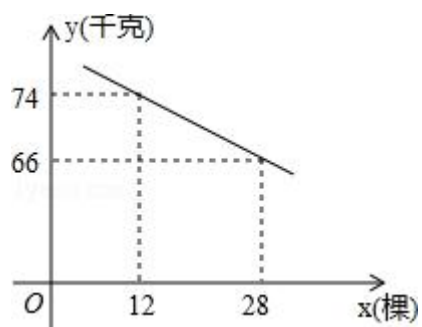
23. (10 分) 某中学九年级数学兴趣小组想测量建筑物 AB 的高度. 他们在 C 处仰望建筑物顶端, 测得仰角为 48° , 再往建筑物的方向前进 6 米到达 D 处, 测得仰角为 64° , 求建筑物的高度. (测角器的高度忽略不计, 结果精确到 0.1 米)

(参考数据: $\sin 48^\circ \approx \frac{7}{10}$, $\tan 48^\circ \approx \frac{11}{10}$, $\sin 64^\circ \approx \frac{9}{10}$, $\tan 64^\circ \approx 2$)



24. (10 分) 某片果园有果树 80 棵, 现准备多种一些果树提高果园产量, 但是如果多种树, 那么树之间的距离和每棵树所受光照就会减少, 单棵树的产量随之降低. 若该果园每棵果树产果 y (千克), 增种果树 x (棵), 它们之间的函数关系如图所示.

- (1) 求 y 与 x 之间的函数关系式;
- (2) 在投入成本最低的情况下, 增种果树多少棵时, 果园可以收获果实 6750 千克?
- (3) 当增种果树多少棵时, 果园的总产量 w (千克) 最大? 最大产量是多少?



七、(本题 12 分)

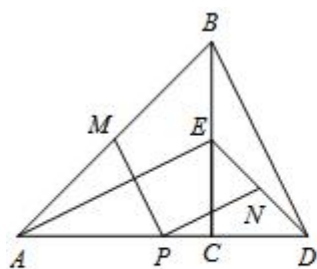
25. (12 分) 如图①, $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形, 直角边 AC 、 CD 在同一条直线上, 点 M 、 N 分别是斜边 AB 、 DE 的中点, 点 P 为 AD 的中点, 连接 AE 、 BD .

(1) 猜想 PM 与 PN 的数量关系及位置关系, 请直接写出结论;

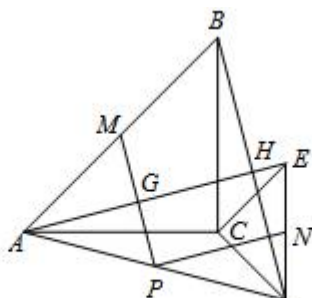
(2) 现将图①中的 $\triangle CDE$ 绕着点 C 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), 得到图②,

AE 与 MP、BD 分别交于点 G、H. 请判断 (1) 中的结论是否成立? 若成立, 请证明; 若不成立, 请说明理由;

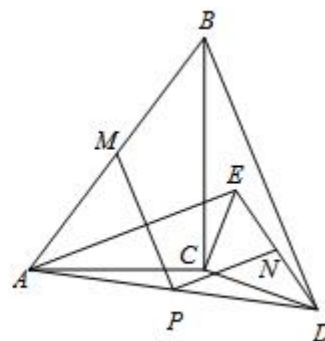
(3) 若图②中的等腰直角三角形变成直角三角形, 使 $BC=kAC$, $CD=kCE$, 如图③, 写出 PM 与 PN 的数量关系, 并加以证明.



图①



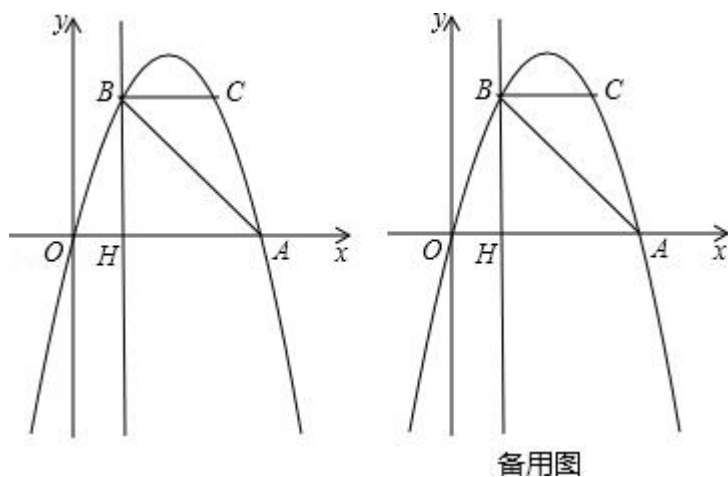
图②



图③

八、(本题 14 分)

26. (14 分) 如图, 抛物线 $y=ax^2+bx$ 过 A (4, 0), B (1, 3) 两点, 点 C、B 关于抛物线的对称轴对称, 过点 B 作直线 $BH \perp x$ 轴, 交 x 轴于点 H.



- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 直接写出点 C 的坐标, 并求出 $\triangle ABC$ 的面积;
- (3) 点 P 是抛物线上一动点, 且位于第四象限, 当 $\triangle ABP$ 的面积为 6 时, 求出点 P 的坐标;
- (4) 若点 M 在直线 BH 上运动, 点 N 在 x 轴上运动, 当以点 C 、 M 、 N 为顶点的三角形为等腰直角三角形时, 请直接写出此时 $\triangle CMN$ 的面积.

2016 年辽宁省丹东市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（下列各题的备选答案中，只有一个是正确的．每小题 3 分，共 24 分）

1. (3 分) -3 的倒数是 ()

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. -3

【考点】17: 倒数.

【专题】1: 常规题型.

【分析】利用倒数的定义，直接得出结果.

【解答】解: $\because -3 \times (-\frac{1}{3}) = 1$,

$\therefore -3$ 的倒数是 $-\frac{1}{3}$.

故选: C.

【点评】主要考查倒数的定义，要求熟练掌握. 需要注意的是负数的倒数还是负数.

倒数的定义: 若两个数的乘积是 1，我们就称这两个数互为倒数.

2. (3 分) 2016 年 1 月 19 日，国家统计局公布了 2015 年宏观经济数据，初步核算，全年国内生产总值为 676000 亿元. 676000 用科学记数法表示为 ()

- A. 6.76×10^6 B. 6.76×10^5 C. 67.6×10^5 D. 0.676×10^6

【考点】11: 科学记数法—表示较大的数.

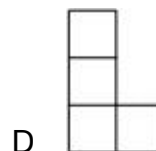
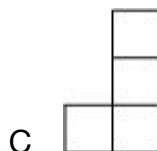
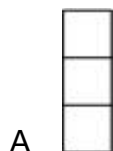
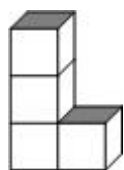
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，整数位数减 1 即可. 当原数绝对值 > 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】解：将 676000 用科学记数法表示为 6.76×10^5 .

故选：B.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3 分) 如图所示几何体的左视图为 ()



【考点】U2: 简单组合体的三视图.

【分析】根据从左边看得到的图形是左视图, 可得答案.

【解答】解：从左边看第一层一个小正方形, 第二层一个小正方形, 第三层一个小正方形,

故选：A.

【点评】本题考查了简单组合体的三视图, 从左边看看得到的图形是左视图.

4. (3 分) 一组数据 8, 3, 8, 6, 7, 8, 7 的众数和中位数分别是 ()

A. 8, 6

B. 7, 6

C. 7, 8

D. 8, 7

【考点】W4: 中位数; W5: 众数.

【分析】根据中位数和众数的定义分别进行解答即可.

【解答】解：把这组数据从小到大排列：3, 6, 7, 7, 8, 8, 8,

8 出现了 3 次, 出现的次数最多, 则众数是 8;

最中间的数是 7,

则这组数据的中位数是 7.

故选：D.

【点评】 本题考查了众数和中位数的知识，一组数据中出现次数最多的数据叫做众数；将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数；如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

5. (3分) 下列计算结果正确的是 ()

A. $a^8 \div a^4 = a^2$

B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

C. $(a^3)^2 = a^6$

D. $(-2a^2)^3 = 8a^6$

【考点】 46: 同底数幂的乘法; 47: 幂的乘方与积的乘方; 48: 同底数幂的除法.

【分析】 根据同底数幂相除，底数不变指数相减；同底数幂相乘，底数不变指数相加；幂的乘方，底数不变指数相乘；积的乘方法则，把每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘；对各选项分析判断后利用排除法求解.

【解答】 解：A、 $a^8 \div a^4 = a^4$ ，故 A 错误；

B、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故 B 错误；

C、 $(a^3)^2 = a^6$ ，故 C 正确；

D、 $(-2a^2)^3 = -8a^6$ ，故 D 错误.

故选：C.

【点评】 本题考查同底数幂的除法、同底数幂的乘法、幂的乘方与积的乘方，熟练掌握运算性质和法则是解题的关键.

6. (3分) 二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ 的解为 ()

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

【考点】 97: 二元一次方程组的解.

【分析】 根据加减消元法，可得方程组的解.

【解答】 解： $\begin{cases} x+y=5 \text{ ①} \\ 2x-y=4 \text{ ②} \end{cases}$

①+②, 得 $3x=9$,

解得 $x=3$,

把 $x=3$ 代入①,

得 $3+y=5$,

$y=2$,

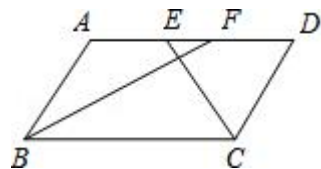
所以原方程组的解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

故选: C.

【点评】 本题考查了解二元一次方程组, 掌握加减消元法是解题的关键. 本题还可以根据二元一次方程组的解的定义, 将四个选项中每一组未知数的值代入原方程组进行检验.

7. (3分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, BF 平分 $\angle ABC$, 交 AD 于点 F , CE 平分 $\angle BCD$,

交 AD 于点 E , $AB=6$, $EF=2$, 则 BC 长为 ()



A. 8

B. 10

C. 12

D. 14

【考点】 L5: 平行四边形的性质.

【分析】 由平行四边形的性质和角平分线得出 $\angle ABF = \angle AFB$, 得出 $AF = AB = 6$,

同理可证 $DE = DC = 6$, 再由 EF 的长, 即可求出 BC 的长.

【解答】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $DC = AB = 6$, $AD = BC$,

$\therefore \angle AFB = \angle FBC$,

$\because BF$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABF = \angle FBC$,

则 $\angle ABF = \angle AFB$,

$$\therefore AF = AB = 6,$$

同理可证: $DE = DC = 6$,

$$\therefore EF = AF + DE - AD = 2,$$

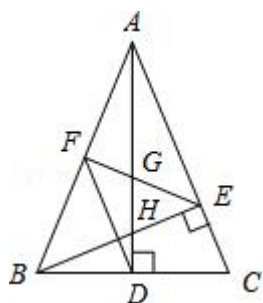
$$\text{即 } 6 + 6 - AD = 2,$$

解得: $AD = 10$;

故选: B.

【点评】 本题主要考查了平行四边形的性质、等腰三角形的判定; 熟练掌握平行四边形的性质, 证出 $AF = AB$ 是解决问题的关键.

8. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 和 BE 是高, $\angle ABE = 45^\circ$, 点 F 是 AB 的中点, AD 与 FE 、 BE 分别交于点 G 、 H , $\angle CBE = \angle BAD$. 有下列结论: ① $FD = FE$; ② $AH = 2CD$; ③ $BC \cdot AD = \sqrt{2}AE^2$; ④ $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle ADF}$. 其中正确的有 ()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【考点】 KD: 全等三角形的判定与性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 由直角三角形斜边上的中线性质的得出 $FD = \frac{1}{2}AB$, 证明 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形, 得出 $AE = BE$, 证出 $FE = \frac{1}{2}AB$, 延长 $FD = FE$, ①正确;

证出 $\angle ABC = \angle C$, 得出 $AB = AC$, 由等腰三角形的性质得出 $BC = 2CD$, $\angle BAD = \angle CAD = \angle CBE$, 由 ASA 证明 $\triangle AEH \cong \triangle BEC$, 得出 $AH = BC = 2CD$, ②正确;

证明 $\triangle ABD \sim \triangle BCE$, 得出 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BE}$, 即 $BC \cdot AD = AB \cdot BE$, 再由等腰直角三角形的

性质和三角形的面积得出 $BC \cdot AD = \sqrt{2}AE^2$; ③正确;

由 F 是 AB 的中点, $BD=CD$, 得出 $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABD} = 4S_{\triangle ADF}$. ④正确; 即可得出结论.

【解答】解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, AD 和 BE 是高,

$$\therefore \angle ADB = \angle AEB = \angle CEB = 90^\circ,$$

$\because$ 点 F 是 AB 的中点,

$$\therefore FD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \angle ABE = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ABE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AE = BE,$$

$\because$ 点 F 是 AB 的中点,

$$\therefore FE = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore FD = FE, \text{ ①正确};$$

$$\therefore \angle CBE = \angle BAD, \angle CBE + \angle C = 90^\circ, \angle BAD + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\therefore BC = 2CD, \angle BAD = \angle CAD = \angle CBE,$$

在 $\triangle AEH$ 和 $\triangle BEC$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEH = \angle CEB \\ AE = BE \\ \angle EAH = \angle CBE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle BEC \text{ (ASA)},$$

∴ AH=BC=2CD, ②正确;

∴ ∠BAD=∠CBE, ∠ADB=∠CEB,

∴ △ABD ∼ △BCE,

∴ $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BE}$, 即 BC•AD=AB•BE,

∴ $\sqrt{2}AE^2=AB•AE=AB•BE$, BC•AD=AC•BE=AB•BE,

∴ BC•AD= $\sqrt{2}AE^2$; ③正确;

∴ F 是 AB 的中点, BD=CD,

∴ S_{△ABC}=2S_{△ABD}=4S_{△ADF}, ④正确.

故选: D.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、直角三角形斜边上的中线性质的判定与性质; 本题综合性强, 有一定难度, 证明三角形相似和三角形全等是解决问题的关键.

二、填空题 (每小题 3 分, 共 24 分)

9. (3 分) 分解因式: $xy^2 - x = \underline{x(y-1)(y+1)}$.

【考点】 55: 提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】 先提取公因式 x, 再对余下的多项式利用平方差公式继续分解.

【解答】 解: $xy^2 - x$,

$=x(y^2 - 1)$,

$=x(y-1)(y+1)$.

故答案为: $x(y-1)(y+1)$.

【点评】 本题考查了用提公因式法和公式法进行因式分解, 一个多项式有公因式首先提取公因式, 然后再用其他方法进行因式分解, 同时因式分解要彻底, 直到不能分解为止.

10. (3分) 不等式组 $\begin{cases} x-6 > -2x \\ \frac{1}{2}x < 3 \end{cases}$ 的解集为 $2 < x < 6$.

【考点】CB: 解一元一次不等式组.

【分析】分别求出各不等式的解集, 再求出其公共解集即可.

【解答】解: $\begin{cases} x-6 > -2x \text{ ①} \\ \frac{1}{2}x < 3 \text{ ②} \end{cases}$, 由①得, $x > 2$, 由②得, $x < 6$,

故不等式组的解集为: $2 < x < 6$.

故答案为: $2 < x < 6$.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组, 熟知“同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

11. (3分) 一个袋中装有两个红球、三个白球, 每个球除颜色外都相同. 从中任意摸出一个球, 摸到红球的概率是 $\frac{2}{5}$.

【考点】X4: 概率公式.

【分析】先求出球的总数, 再根据概率公式求解即可.

【解答】解: $\because$ 一个袋中装有两个红球、三个白球,

$\therefore$ 球的总数 $= 2 + 3 = 5$,

$\therefore$ 从中任意摸出一个球, 摸到红球的概率 $= \frac{2}{5}$.

故答案为: $\frac{2}{5}$.

【点评】本题考查的是概率公式, 熟知随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 A 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$ 的商是解答此题的关键.

12. (3分) 反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象经过点 (2, 3), 则 $k =$ 7.

【考点】G6: 反比例函数图象上点的坐标特征.

【分析】根据点的坐标以及反比例函数图象上点的坐标特征即可得出关于 k 的一元一次方程, 解方程即可得出结论.

【解答】解：∵反比例函数 $y=\frac{k-1}{x}$ 的图象经过点 (2, 3),

$$\therefore k-1=2 \times 3,$$

解得：k=7.

故答案为：7.

【点评】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征以及解一元一次方程，解题的关键是得出 $k-1=2 \times 3$. 本题属于基础题，难度不大，解决该题型题目时，根据点的坐标利用反比例函数图象上点的坐标特征求出反比例函数系数 k 是关键.

13. (3 分) 某公司今年 4 月份营业额为 60 万元，6 月份营业额达到 100 万元，

设该公司 5、6 两个月营业额的月均增长率为 x，则可列方程为 $60(1+x)^2=100$.

【考点】AC：由实际问题抽象出一元二次方程.

【专题】123：增长率问题.

【分析】设平均每月的增长率为 x，根据 4 月份的营业额为 60 万元，6 月份的营业额为 100 万元，分别表示出 5，6 月的营业额，即可列出方程.

【解答】解：设平均每月的增长率为 x，

根据题意可得： $60(1+x)^2=100$.

故答案为： $60(1+x)^2=100$.

【点评】本题考查的是一个增长率问题，关键是知道 4 月份的钱数和增长两个月后 6 月份的钱数，列出方程.

14. (3 分) 观察下列数据： -2 , $\frac{5}{2}$, $-\frac{10}{3}$, $\frac{17}{4}$, $-\frac{26}{5}$, ..., 它们是按一定规律排列的，依照此规律，第 11 个数据是 $-\frac{122}{11}$.

【考点】37：规律型：数字的变化类.

【分析】根据题意可得：所有数据分母为连续正整数，第奇数个是负数，且分子是连续正整数的平方加1，进而得出答案.

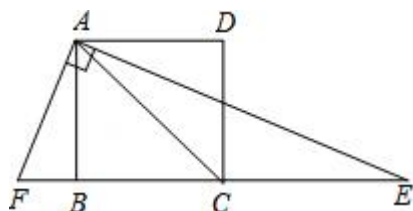
【解答】解： $\because -2 = -\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, -\frac{10}{3}, \frac{17}{4}, -\frac{26}{5}, \dots,$

$\therefore$ 第11个数据是： $-\frac{11^2+1}{11} = -\frac{122}{11}.$

故答案为： $-\frac{122}{11}.$

【点评】此题主要考查了数字变化类，正确得出分子与分母的变化规律是解题关键.

15. (3分) 如图，正方形ABCD边长为3，连接AC，AE平分 $\angle CAD$ ，交BC的延长线于点E，FA $\perp$ AE，交CB延长线于点F，则EF的长为 $6\sqrt{2}$.



【考点】LE：正方形的性质.

【分析】利用正方形的性质和勾股定理可得AC的长，由角平分线的性质和平行线的性质可得 $\angle CAE = \angle E$ ，易得 $CE = CA$ ，由FA $\perp$ AE，可得 $\angle FAC = \angle F$ ，易得 $CF = AC$ ，可得EF的长.

【解答】解： $\because$ 四边形ABCD为正方形，且边长为3，

$$\therefore AC = 3\sqrt{2},$$

$\because$ AE平分 $\angle CAD$,

$$\therefore \angle CAE = \angle DAE,$$

$\because AD \parallel CE,$

$$\therefore \angle DAE = \angle E,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle E,$$

$$\therefore CE=CA=3\sqrt{2},$$

$$\therefore FA \perp AE,$$

$$\therefore \angle FAC + \angle CAE = 90^\circ, \quad \angle F + \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FAC = \angle F,$$

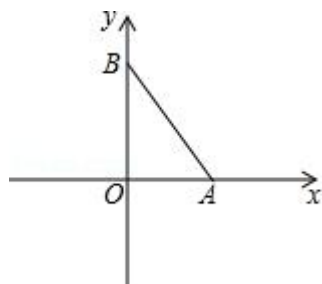
$$\therefore CF=AC=3\sqrt{2},$$

$$\therefore EF=CF+CE=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$$

故答案为： $6\sqrt{2}$.

【点评】 本题主要考查了正方形的性质，角平分线的性质等，利用等角对等边是解答此题的关键.

16. (3 分) 如图，在平面直角坐标系中，A、B 两点分别在 x 轴、y 轴上，OA=3，OB=4，连接 AB. 点 P 在平面内，若以点 P、A、B 为顶点的三角形与 $\triangle AOB$ 全等 (点 P 与点 O 不重合)，则点 P 的坐标为 $(3, 4)$ 或 $(\frac{96}{25}, \frac{72}{25})$ 或 $(-\frac{21}{25}, \frac{28}{25})$.



【考点】 D5：坐标与图形性质；KB：全等三角形的判定.

【分析】 由条件可知 AB 为两三角形的公共边，且 $\triangle AOB$ 为直角三角形，当 $\triangle AOB$ 和 $\triangle APB$ 全等时，则可知 $\triangle APB$ 为直角三角形，再分三种情况进行讨论，可得出 P 点的坐标.

【解答】 解：如图所示：

$$\textcircled{1} \because OA=3, OB=4,$$

$$\therefore P_1 (3, 4);$$

②连结 OP_2 ,

设 AB 的解析式为 $y=kx+b$, 则

$$\begin{cases} 3k+b=0 \\ b=4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=-\frac{4}{3} \\ b=4 \end{cases}.$$

故 AB 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$,

则 OP_2 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x$,

$$\text{联立方程组得} \begin{cases} y=-\frac{4}{3}x+4 \\ y=\frac{3}{4}x \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=\frac{48}{25} \\ y=\frac{36}{25} \end{cases},$$

则 $P_2 (\frac{96}{25}, \frac{72}{25})$;

③连结 P_2P_3 ,

$$\therefore (3+0) \div 2=1.5,$$

$$(0+4) \div 2=2,$$

$$\therefore E (1.5, 2),$$

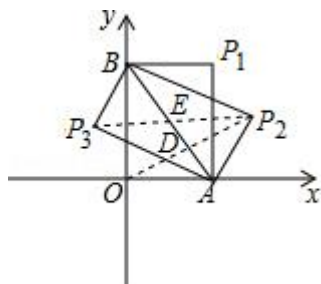
$$\therefore 1.5 \times 2 - \frac{96}{25} = -\frac{21}{25},$$

$$2 \times 2 - \frac{72}{25} = \frac{28}{25},$$

$$\therefore P_3 (-\frac{21}{25}, \frac{28}{25}).$$

故点 P 的坐标为 $(3, 4)$ 或 $(\frac{96}{25}, \frac{72}{25})$ 或 $(-\frac{21}{25}, \frac{28}{25})$.

故答案为: $(3, 4)$ 或 $(\frac{96}{25}, \frac{72}{25})$ 或 $(-\frac{21}{25}, \frac{28}{25})$.



【点评】 本题考查了全等三角形的性质及坐标与图形的性质，做这种题要求对全等三角形的判定方法熟练掌握.

三、解答题（每小题 8 分，共 16 分）

17. (8 分) 计算: $4\sin 60^\circ + |3 - \sqrt{12}| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (\pi - 2016)^0$.

【考点】 2C: 实数的运算; 6E: 零指数幂; 6F: 负整数指数幂; T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 根据实数的运算顺序，首先计算乘方、乘法，然后从左向右依次计算，求出算式 $4\sin 60^\circ + |3 - \sqrt{12}| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (\pi - 2016)^0$ 的值是多少即可.

【解答】 解: $4\sin 60^\circ + |3 - \sqrt{12}| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (\pi - 2016)^0$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} - 3 - 2 + 1$$

$$= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4$$

$$= 4\sqrt{3} - 4$$

【点评】 (1) 此题主要考查了实数的运算，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：在进行实数运算时，和有理数运算一样，要从高级到低级，即先算乘方、开方，再算乘除，最后算加减，有括号的要先算括号里面的，同级运算要按照从左到右的顺序进行. 另外，有理数的运算律在实数范围内仍然适用.

(2) 此题还考查了零指数幂的运算，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：

① $a^0 = 1$ ($a \neq 0$); ② $0^0 \neq 1$.

(3) 此题还考查了负整数指数幂的运算，要熟练掌握，解答此题的关键是要明

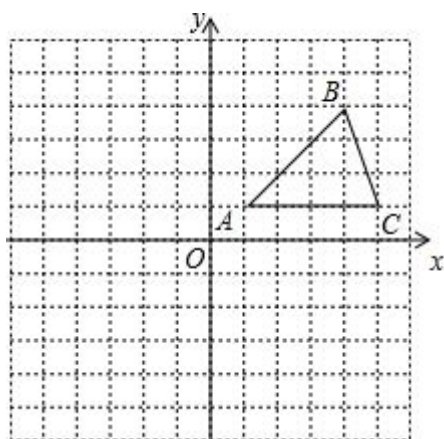
确：① $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$, p 为正整数)；②计算负整数指数幂时，一定要根据负整数指数幂的意义计算；③当底数是分数时，只要把分子、分母颠倒，负指数就可变为正指数.

(4) 此题还考查了特殊角的三角函数值，要牢记 30° 、 45° 、 60° 角的各种三角函数值.

18. (8 分) 在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 的位置如图所示 (每个小方格都是边长为 1 个单位长度的正方形).

(1) 将 $\triangle ABC$ 沿 x 轴方向向左平移 6 个单位，画出平移后得到的 $\triangle A_1B_1C_1$;

(2) 将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 顺时针旋转 90° ，画出旋转后得到的 $\triangle AB_2C_2$ ，并直接写出点 B_2 、 C_2 的坐标.



【考点】Q4：作图 - 平移变换；R8：作图 - 旋转变换.

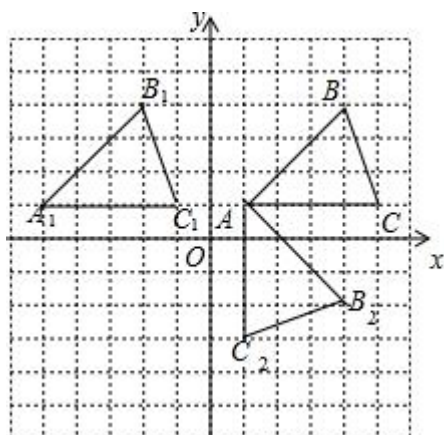
【专题】13：作图题.

【分析】(1) 利用点平移的规律写出点 A 、 B 、 C 的对应点 A_1 、 B_1 、 C_1 的坐标，然后描点即可得到 $\triangle A_1B_1C_1$;

(2) 利用网格特点和旋转的性质画出点 B 、 C 的对应点 B_2 、 C_2 ，从而得到 $\triangle AB_2C_2$ ，再写出点 B_2 、 C_2 的坐标.

【解答】解：(1) 如图， $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求；

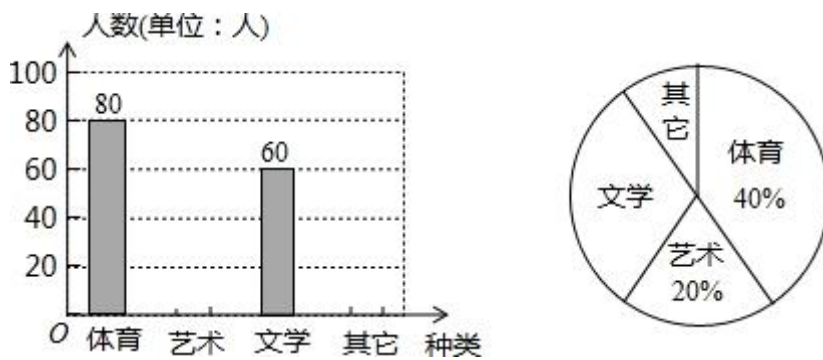
(2) 如图, $\triangle AB_2C_2$ 即为所求, 点 $B_2 (4, -2)$, $C_2 (1, -3)$.



【点评】 本题考查了作图 - 旋转变换: 根据旋转的性质可知, 对应角都相等都等于旋转角, 对应线段也相等, 由此可以通过作相等的角, 在角的边上截取相等的线段的方法, 找到对应点, 顺次连接得出旋转后的图形. 也考查了平移变换.

四、(每小题 10 分, 共 20 分)

19. (10 分) 为了促进学生多样化发展, 某校组织开展了社团活动, 分别设置了体育类、艺术类、文学类及其它类社团 (要求人人参与社团, 每人只能选择一项). 为了解学生喜爱哪种社团活动, 学校做了一次抽样调查. 根据收集到的数据, 绘制成如下两幅不完整的统计图, 请根据图中提供的信息, 完成下



列问题:

- (1) 此次共调查了多少人?
- (2) 求文学社团在扇形统计图中所占圆心角的度数;
- (3) 请将条形统计图补充完整;

(4) 若该校有 1500 名学生，请估计喜欢体育类社团的学生有多少人？

【考点】 V5：用样本估计总体；VB：扇形统计图；VC：条形统计图.

【分析】 (1) 根据体育人数 80 人，占 40%，可以求出总人数.

(2) 根据圆心角=百分比 $\times 360^\circ$ 即可解决问题.

(3) 求出艺术类、其它类社团人数，即可画出条形图.

(4) 用样本百分比估计总体百分比即可解决问题.

【解答】 解：

(1) $80 \div 40\% = 200$ (人).

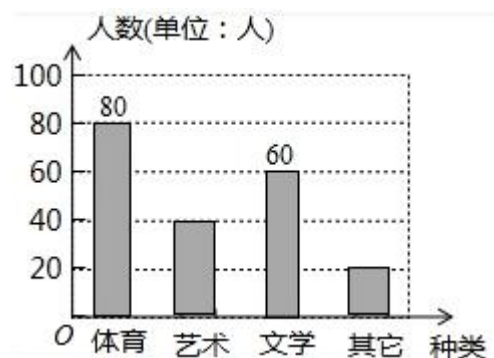
$\therefore$ 此次共调查 200 人.

(2) $\frac{60}{200} \times 360^\circ = 108^\circ$.

$\therefore$ 文学社团在扇形统计图中所占

圆心角的度数为 108° .

(3) 补全如图，



(4) $1500 \times 40\% = 600$ (人).

$\therefore$ 估计该校喜欢体育类社团的学生有 600 人.

【点评】 此题主要考查了条形图与统计表以及扇形图的综合应用，由条形图与扇形图结合得出调查的总人数是解决问题的关键，学会用样本估计总体的思想，属于中考常考题型.

20. (10 分) 甲、乙两人进行摸牌游戏. 现有三张形状大小完全相同的牌，正面

分别标有数字 2, 3, 5. 将三张牌背面朝上, 洗匀后放在桌子上.

- (1) 甲从中随机抽取一张牌, 记录数字后放回洗匀, 乙再随机抽取一张. 请用列表法或画树状图的方法, 求两人抽取相同数字的概率;
- (2) 若两人抽取的数字和为 2 的倍数, 则甲获胜; 若抽取的数字和为 5 的倍数, 则乙获胜. 这个游戏公平吗? 请用概率的知识加以解释.

【考点】 X6: 列表法与树状图法; X7: 游戏公平性.

【分析】 (1) 利用列表法得到所有可能出现的结果, 根据概率公式计算即可;

(2) 分别求出甲、乙获胜的概率, 比较即可.

【解答】 解: (1) 所有可能出现的结果如图:

从表格可以看出, 总共有 9 种结果, 每种结果出现的可能性相同, 其中两人抽取相同数字的结果有 3 种, 所以两人抽取相同数字的概率为: $\frac{1}{3}$;

(2) 不公平.

从表格可以看出, 两人抽取数字和为 2 的倍数有 5 种, 两人抽取数字和为 5 的倍数有 3 种,

所以甲获胜的概率为: $\frac{5}{9}$, 乙获胜的概率为: $\frac{1}{3}$.

$$\therefore \frac{5}{9} > \frac{1}{3},$$

$\therefore$ 甲获胜的概率大, 游戏不公平.

	2	3	5
2	2 2	3 2	5 2
3	2 3	3 3	5 3
5	2 5	3 5	5 5

【点评】 本题考查的是游戏公平性的判断. 判断游戏公平性就要用树状图或列表法计算每个事件的概率, 比较两者的概率, 概率相等就公平, 否则就不公平. 用

到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

五、(每小题 10 分，共 20 分)

21. (10 分) 某商场购进甲、乙两种商品，乙商品的单价是甲商品单价的 2 倍，购买 240 元甲商品的数量比购买 300 元乙商品的数量多 15 件，求两种商品单价各为多少元？

【考点】B7：分式方程的应用.

【专题】12：应用题；522：分式方程及应用.

【分析】设甲商品的单价为 x 元，乙商品的单价为 $2x$ 元，根据购买 240 元甲商品的数量比购买 300 元乙商品的数量多 15 件列出方程，求出方程的解即可得到结果.

【解答】解：设甲商品的单价为 x 元，乙商品的单价为 $2x$ 元，

根据题意，得 $\frac{240}{x} - \frac{300}{2x} = 15$,

解这个方程，得 $x=6$,

经检验， $x=6$ 是所列方程的根，

$$\therefore 2x = 2 \times 6 = 12,$$

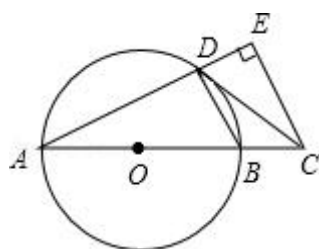
答：甲、乙两种商品的单价分别为 6 元、12 元.

【点评】此题考查了分式方程的应用，找出题中的等量关系“购买 240 元甲商品的数量比购买 300 元乙商品的数量多 15 件”是解本题的关键.

22. (10 分) 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 AB 的延长线上，CD 与 $\odot O$ 相切于点 D，CE $\perp$ AD，交 AD 的延长线于点 E.

(1) 求证： $\angle BDC = \angle A$;

(2) 若 $CE=4$ ， $DE=2$ ，求 AD 的长.



【考点】MC：切线的性质；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】(1) 连接 OD，由 CD 是 $\odot O$ 切线，得到 $\angle ODC=90^\circ$ ，根据 AB 为 $\odot O$ 的直径，得到 $\angle ADB=90^\circ$ ，等量代换得到 $\angle BDC=\angle ADO$ ，根据等腰三角形的性质得到 $\angle ADO=\angle A$ ，即可得到结论；

(2) 根据垂直的定义得到 $\angle E=\angle ADB=90^\circ$ ，根据平行线的性质得到 $\angle DCE=\angle BDC$ ，根据相似三角形的性质得到 $\frac{CE}{DE}=\frac{AE}{CE}$ ，解方程即可得到结论.

【解答】(1) 证明：连接 OD，

$\because$ CD 是 $\odot O$ 切线，

$\therefore \angle ODC=90^\circ$ ，

即 $\angle ODB+\angle BDC=90^\circ$ ，

$\because$ AB 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ADB=90^\circ$ ，

即 $\angle ODB+\angle ADO=90^\circ$ ，

$\therefore \angle BDC=\angle ADO$ ，

$\because$ OA=OD，

$\therefore \angle ADO=\angle A$ ，

$\therefore \angle BDC=\angle A$ ；

(2) $\because$ CE $\perp$ AE，

$$\therefore \angle E = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore DB \parallel EC,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle BDC,$$

$$\because \angle BDC = \angle A,$$

$$\therefore \angle A = \angle DCE,$$

$$\because \angle E = \angle E,$$

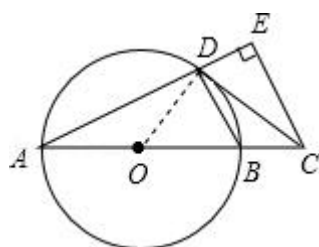
$$\therefore \triangle AEC \sim \triangle CED,$$

$$\therefore \frac{CE}{DE} = \frac{AE}{CE},$$

$$\therefore EC^2 = DE \cdot AE,$$

$$\therefore 16 = 2(2 + AD),$$

$$\therefore AD = 6.$$

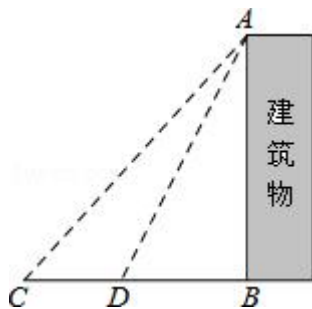


【点评】 本题考查了切线的性质，相似三角形的判定和性质，平行线的性质，熟练掌握切线的性质是解题的关键。

六、(每小题 10 分，共 20 分)

23. (10 分) 某中学九年级数学兴趣小组想测量建筑物 AB 的高度. 他们在 C 处仰望建筑物顶端，测得仰角为 48° ，再往建筑物的方向前进 6 米到达 D 处，测得仰角为 64° ，求建筑物的高度. (测角器的高度忽略不计，结果精确到 0.1 米)

(参考数据: $\sin 48^\circ \approx \frac{7}{10}$, $\tan 48^\circ \approx \frac{11}{10}$, $\sin 64^\circ \approx \frac{9}{10}$, $\tan 64^\circ \approx 2$)



【考点】TA：解直角三角形的应用 – 仰角俯角问题.

【分析】Rt $\triangle ADB$ 中用 AB 表示出 BD 、Rt $\triangle ACB$ 中用 AB 表示出 BC ，根据 $CD=BC-BD$ 可得关于 AB 的方程，解方程可得.

【解答】解：根据题意，得 $\angle ADB=64^\circ$ ， $\angle ACB=48^\circ$

在 Rt $\triangle ADB$ 中， $\tan 64^\circ = \frac{AB}{BD}$,

则 $BD = \frac{AB}{\tan 64^\circ} \approx \frac{1}{2}AB$,

在 Rt $\triangle ACB$ 中， $\tan 48^\circ = \frac{AB}{CB}$,

则 $CB = \frac{AB}{\tan 48^\circ} \approx \frac{10}{11}AB$,

$\therefore CD = BC - BD$

即 $6 = \frac{10}{11}AB - \frac{1}{2}AB$

解得： $AB = \frac{132}{9} \approx 14.7$ (米),

$\therefore$ 建筑物的高度约为 14.7 米.

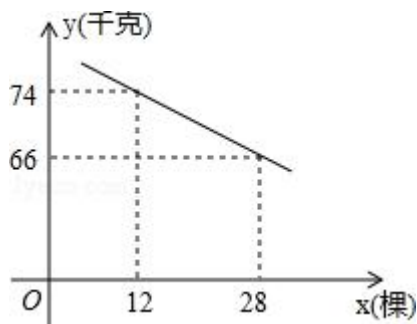
【点评】本题考查解直角三角形的应用 – 仰角俯角问题，解题的关键是利用数形结合的思想找出各边之间的关系，然后找出所求问题需要的条件.

24. (10 分) 某片果园有果树 80 棵，现准备多种一些果树提高果园产量，但是如果多种树，那么树之间的距离和每棵树所受光照就会减少，单棵树的产量随之降低. 若该果园每棵果树产果 y (千克)，增种果树 x (棵)，它们之间的函数关系如图所示.

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 在投入成本最低的情况下，增种果树多少棵时，果园可以收获果实 6750 千克？

(3) 当增种果树多少棵时，果园的总产量 w (千克) 最大？最大产量是多少？



【考点】 HE: 二次函数的应用.

【分析】 (1) 函数的表达式为 $y=kx+b$ ，把点 (12, 74)，(28, 66) 代入解方程组即可.

(2) 列出方程解方程组，再根据实际意义确定 x 的值.

(3) 构建二次函数，利用二次函数性质解决问题.

【解答】 解：(1) 设函数的表达式为 $y=kx+b$ ，该一次函数过点 (12, 74)，(28, 66)，

$$\text{得} \begin{cases} 12k+b=74 \\ 28k+b=66 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=-0.5 \\ b=80 \end{cases},$$

$\therefore$ 该函数的表达式为 $y=-0.5x+80$,

(2) 根据题意，得，

$$(-0.5x+80)(80+x)=6750,$$

解得， $x_1=10$ ， $x_2=70$

$\therefore$ 投入成本最低.

$\therefore x_2=70$ 不满足题意，舍去.

$\therefore$ 增种果树 10 棵时，果园可以收获果实 6750 千克.

(3) 根据题意, 得

$$w = (-0.5x + 80)(80 + x)$$

$$= -0.5x^2 + 40x + 6400$$

$$= -0.5(x - 40)^2 + 7200$$

$\because a = -0.5 < 0$, 则抛物线开口向下, 函数有最大值

$\therefore$ 当 $x = 40$ 时, w 最大值为 7200 千克.

$\therefore$ 当增种果树 40 棵时果园的最大产量是 7200 千克.

【点评】 本题考查二次函数的应用、一次函数的应用、一元二次方程等知识, 解题的关键是熟练掌握待定系数法, 学会构建二次函数解决实际问题中的最值问题, 属于中考常考题型.

七、(本题 12 分)

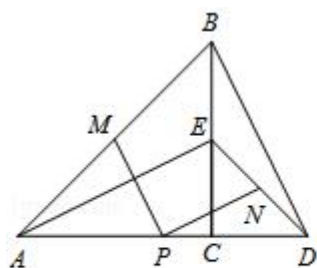
25. (12 分) 如图①, $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形, 直角边 AC 、 CD 在同一条直线上, 点 M 、 N 分别是斜边 AB 、 DE 的中点, 点 P 为 AD 的中点, 连接 AE 、 BD .

(1) 猜想 PM 与 PN 的数量关系及位置关系, 请直接写出结论;

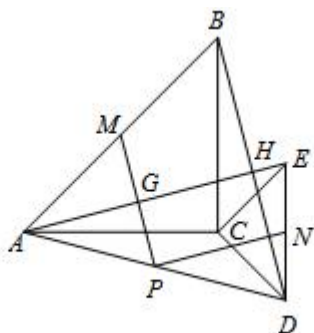
(2) 现将图①中的 $\triangle CDE$ 绕着点 C 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), 得到图②,

AE 与 MP 、 BD 分别交于点 G 、 H . 请判断 (1) 中的结论是否成立? 若成立, 请证明; 若不成立, 请说明理由;

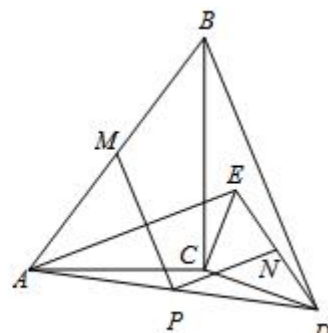
(3) 若图②中的等腰直角三角形变成直角三角形, 使 $BC = kAC$, $CD = kCE$, 如图③, 写出 PM 与 PN 的数量关系, 并加以证明.



图①



图②



图③

【考点】SO：相似形综合题.

【分析】(1) 由等腰直角三角形的性质易证 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ ，由此可得 $AE=BD$ ，

再根据三角形中位线定理即可得到 $PM=PN$ ，由平行线的性质可得 $PM \perp PN$ ；

(2) (1) 中的结论仍旧成立，由 (1) 中的证明思路即可证明；

(3) $PM=kPN$ ，由已知条件可证明 $\triangle BCD \sim \triangle ACE$ ，所以可得 $BD=kAE$ ，因为

点 P、M、N 分别为 AD、AB、DE 的中点，所以 $PM=\frac{1}{2}BD$ ， $PN=\frac{1}{2}AE$ ，进

而可证明 $PM=kPN$ 。

【解答】解：

(1) $PM=PN$ ， $PM \perp PN$ ，理由如下：

$\because \triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AC=BC$ ， $EC=CD$ ， $\angle ACB=\angle ECD=90^\circ$ 。

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中

$$\begin{cases} AC=BC \\ \angle ACB=\angle ECD=90^\circ, \\ CE=CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD$ (SAS)，

$\therefore AE=BD$ ， $\angle EAC=\angle CBD$ ，

$\therefore$ 点 M、N 分别是斜边 AB、DE 的中点，点 P 为 AD 的中点，

$\therefore PM=\frac{1}{2}BD$ ， $PN=\frac{1}{2}AE$ ，

$$\therefore PM=PN,$$

$$\therefore PM \parallel BD, PN \parallel AE, AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle NPD = \angle EAC, \angle MPA = \angle BDC, \angle EAC + \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MPA + \angle NPC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MPN = 90^\circ,$$

即 $PM \perp PN$;

(2) $\because \triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AC=BC, EC=CD,$$

$$\angle ACB = \angle ECD = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle ACB + \angle BCE = \angle ECD + \angle BCE.$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BCD.$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD.$$

$$\therefore AE=BD, \angle CAE = \angle CBD.$$

$$\text{又} \because \angle AOC = \angle BOE,$$

$$\angle CAE = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle BHO = \angle ACO = 90^\circ.$$

$\because$ 点 P、M、N 分别为 AD、AB、DE 的中点,

$$\therefore PM = \frac{1}{2}BD, PM \parallel BD;$$

$$PN = \frac{1}{2}AE, PN \parallel AE.$$

$$\therefore PM=PN.$$

$$\therefore \angle MGE + \angle BHA = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle MGE = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle MPN = 90^\circ.$$

$$\therefore PM \perp PN.$$

$$(3) PM = kPN$$

$\therefore \triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 是直角三角形,

$$\therefore \angle ACB = \angle ECD = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle ACB + \angle BCE = \angle ECD + \angle BCE.$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BCD.$$

$$\therefore BC = kAC, \quad CD = kCE,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{CE} = k.$$

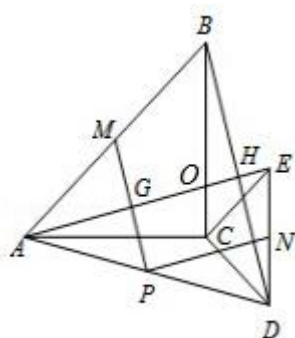
$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle ACE.$$

$$\therefore BD = kAE.$$

$\therefore$ 点 P 、 M 、 N 分别为 AD 、 AB 、 DE 的中点,

$$\therefore PM = \frac{1}{2}BD, \quad PN = \frac{1}{2}AE.$$

$$\therefore PM = kPN.$$



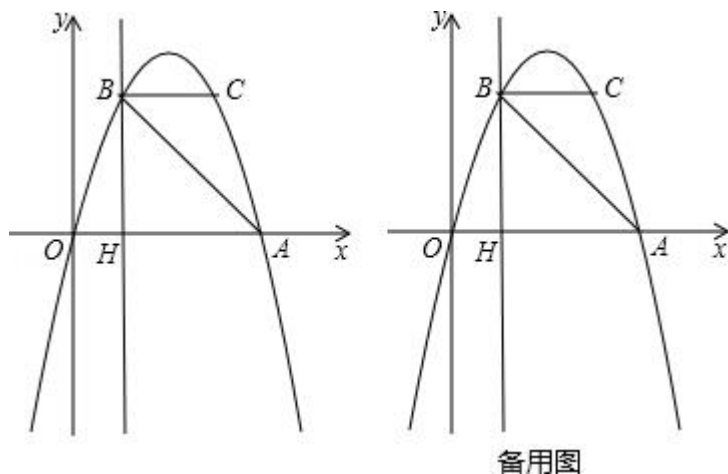
图②

【点评】 本题考查的是几何变换综合题，熟知等腰直角三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质以及相似三角形的判定和性质和三角形中位线定理的运用，熟记和三角形有关的各种性质定理是解答此题的关键。

八、(本题 14 分)

26. (14 分) 如图, 抛物线 $y=ax^2+bx$ 过 $A(4, 0)$, $B(1, 3)$ 两点, 点 C 、 B

关于抛物线的对称轴对称, 过点 B 作直线 $BH \perp x$ 轴, 交 x 轴于点 H .



- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 直接写出点 C 的坐标, 并求出 $\triangle ABC$ 的面积;
- (3) 点 P 是抛物线上一动点, 且位于第四象限, 当 $\triangle ABP$ 的面积为 6 时, 求出点 P 的坐标;
- (4) 若点 M 在直线 BH 上运动, 点 N 在 x 轴上运动, 当以点 C 、 M 、 N 为顶点的三角形为等腰直角三角形时, 请直接写出此时 $\triangle CMN$ 的面积.

【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 利用待定系数法求二次函数的表达式;

(2) 根据二次函数的对称轴 $x=2$ 写出点 C 的坐标为 $(3, 3)$, 根据面积公式求 $\triangle ABC$ 的面积;

(3) 因为点 P 是抛物线上一动点, 且位于第四象限, 设出点 P 的坐标 $(m, -m^2+4m)$, 利用差表示 $\triangle ABP$ 的面积, 列式计算求出 m 的值, 写出点 P 的坐标;

(4) 分别以点 C、M、N 为直角顶点分三类进行讨论，利用全等三角形和勾股定理求 CM 或 CN 的长，利用面积公式进行计算.

【解答】解：(1) 把点 A (4, 0), B (1, 3) 代入抛物线 $y=ax^2+bx$ 中，
得 $\begin{cases} 0=16a+4b \\ 3=a+b \end{cases}$ 解得： $\begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 抛物线表达式为： $y=-x^2+4x$ ；

(2) 点 C 的坐标为 (3, 3)，

又 $\because$ 点 B 的坐标为 (1, 3)，

$\therefore BC=2$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2} \times 2 \times 3=3$ ；

(3) 过 P 点作 $PD \perp BH$ 交 BH 于点 D，

设点 P (m, $-m^2+4m$)，

根据题意，得： $BH=AH=3$ ， $HD=m^2-4m$ ， $PD=m-1$ ，

$\therefore S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABH}+S_{\text{四边形 HAPD}}-S_{\triangle BPD}$ ，

$6=\frac{1}{2} \times 3 \times 3+\frac{1}{2} (3+m-1) (m^2-4m) -\frac{1}{2} (m-1) (3+m^2-4m)$ ，

$\therefore 3m^2-15m=0$ ，

$m_1=0$ (舍去)， $m_2=5$ ，

$\therefore$ 点 P 坐标为 (5, -5)。

(4) 以点 C、M、N 为顶点的三角形为等腰直角三角形时，分三类情况讨论：

①以点 M 为直角顶点且 M 在 x 轴上方时，如图 2， $CM=MN$ ， $\angle CMN=90^\circ$ ，

则 $\triangle CBM \cong \triangle MHN$ ，

$\therefore BC=MH=2$ ， $BM=HN=3-2=1$ ，

$\therefore M (1, 2)$ ， $N (2, 0)$ ，

由勾股定理得: $MC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

$$\therefore S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}=\frac{5}{2};$$

②以点 M 为直角顶点且 M 在 x 轴下方时, 如图 3, 作辅助线, 构建如图所示的

两直角三角形: $Rt\triangle NEM$ 和 $Rt\triangle MDC$,

得 $Rt\triangle NEM \cong Rt\triangle MDC$,

$$\therefore EM=CD=5, MD=NE=2,$$

由勾股定理得: $CM=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$,

$$\therefore S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2} \times \sqrt{29} \times \sqrt{29}=\frac{29}{2};$$

③以点 N 为直角顶点且 N 在 y 轴左侧时, 如图 4, $CN=MN$, $\angle MNC=90^\circ$, 作辅助线,

同理得: $CN=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$,

$$\therefore S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2} \times \sqrt{34} \times \sqrt{34}=17;$$

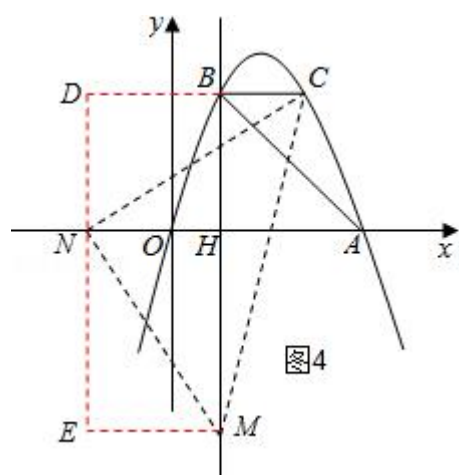
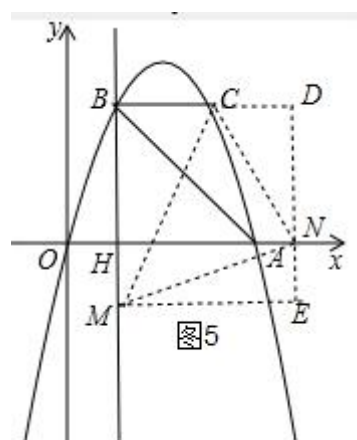
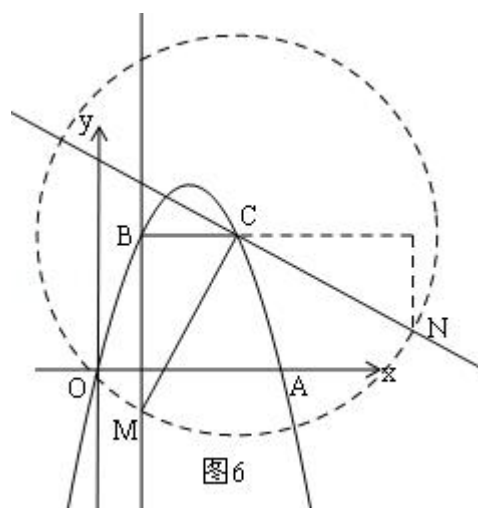
④以点 N 为直角顶点且 N 在 y 轴右侧时, 作辅助线, 如图 5, 同理得:

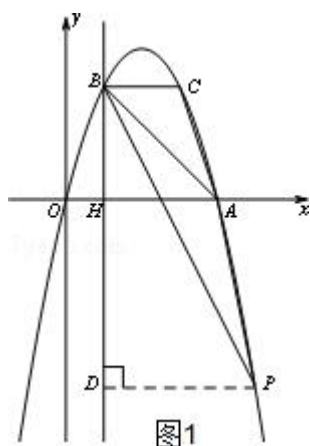
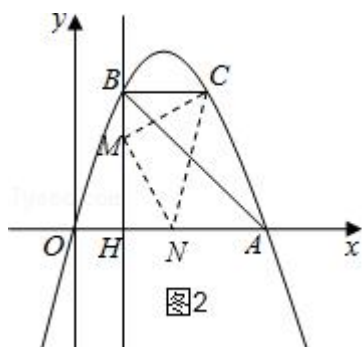
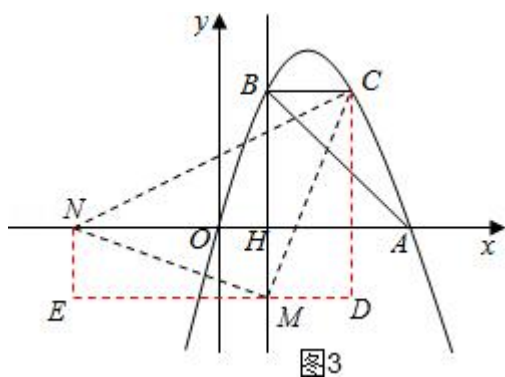
$$CN=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10},$$

$$\therefore S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10}=5;$$

⑤以 C 为直角顶点时, 不能构成满足条件的等腰直角三角形, 如图 6;

综上所述: $\triangle CMN$ 的面积为: $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{29}{2}$ 或 17 或 5.





【点评】本题是二次函数的综合题,考查了利用待定系数法求二次函数的表达式,考查了等腰直角三角形和全等三角形的判定和性质; 本题的一般思路为: ①根据函数的表达式设出点的坐标,利用面积公式直接表示或求和或求差列式,求出该点的坐标; ②利用等腰直角三角形的两直角边相等,构建两直角三角形全等,再利用全等性质与点的坐标结合解决问题.