

2015 年辽宁省辽阳市中考数学试卷

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是正确的)

1. $\sqrt{2}$ 的相反数是 ()

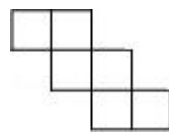
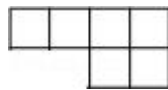
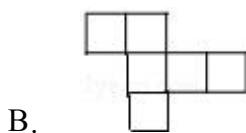
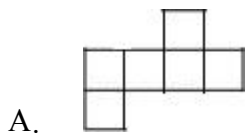
- A. $-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 下列计算正确的是 ()

A. $x^2 \cdot x^3 = x^6$ B. $x^5 + x^5 = 2x^{10}$

C. $(-2x)^3 = 8x^3$ D. $(-2x^3) \div (-6x^2) = \frac{1}{3}x$

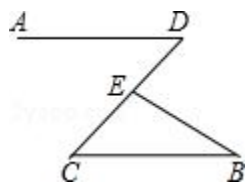
3. 下列各图不是正方体表面展开图的是 ()



4. 一组数据: 2, 3, 6, 6, 7, 8, 8, 8 的中位数是 ()

- A. 6 B. 6.5 C. 7 D. 8

5. 如图, $AD \parallel CB$, $\angle D = 43^\circ$, $\angle B = 25^\circ$, 则 $\angle DEB$ 的度数为 ()



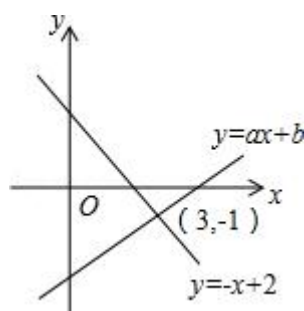
- A. 72° B. 68° C. 63° D. 18°

6. 从甲地到乙地有两条公路, 一条是全长 450 公里的普通公路, 一条是全长 330 公里的高速公路, 某客车在高速公路上行驶的平均速度比在普通公路上快 35 公里/小时, 由高速公路从甲地到乙地所需的时间是由普通公路从甲地到乙地所需时间的一半. 如果设该客车由高速公路从甲地到乙地所需时间为 x 小时, 那么 x 满足的分式方程是 ()

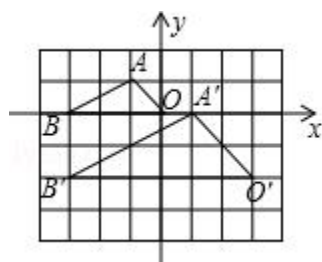
A. $\frac{450}{x} = \frac{330}{x+35} \times 2$ B. $\frac{450}{x} = \frac{330}{2x} - 35$

C. $\frac{450}{x} - \frac{330}{2x} = 35$ D. $\frac{330}{x} - \frac{450}{2x} = 35$

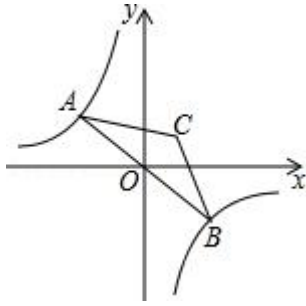
7. 如图，直线 $y = -x + 2$ 与 $y = ax + b$ ($a \neq 0$ 且 a, b 为常数) 的交点坐标为 $(3, -1)$ ，则关于 x 的不等式 $-x + 2 \geq ax + b$ 的解集为 ()



- A. $x \geq -1$ B. $x \geq 3$ C. $x \leq -1$ D. $x \leq 3$
8. 下列事件为必然事件的是 ()
- A. 如果 a, b 是实数，那么 $a \cdot b = b \cdot a$
- B. 抛掷一枚均匀的硬币，落地后正面朝上
- C. 汽车行驶到交通岗遇到绿色的信号灯
- D. 口袋中装有 3 个红球，从中随机摸出一球，这个球的白球
9. 如图，在边长为 1 的小正方形组成的网格中，建立平面直角坐标系， $\triangle ABO$ 与 $\triangle A'B'O'$ 是以点 P 为位似中心的位似图形，它们的顶点均在格点（网格线的交点）上，则点 P 的坐标为 ()



- A. $(0, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(-3, 2)$ D. $(3, -2)$
10. 如图，点 A 是双曲线 $y = -\frac{6}{x}$ 在第二象限分支上的一个动点，连接 AO 并延长交另一分支于点 B ，以 AB 为底作等腰 $\triangle ABC$ ，且 $\angle ACB = 120^\circ$ ，点 C 在第一象限，随着点 A 的运动，点 C 的位置也不断变化，但点 C 始终在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上运动，则 k 的值为 ()



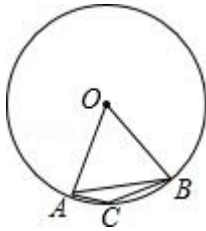
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

11. 某工业园区，今年第一季度新开工 94 个项目，总投资 7429 亿元. 请将 7429 亿，用科学记数法表示为_____.

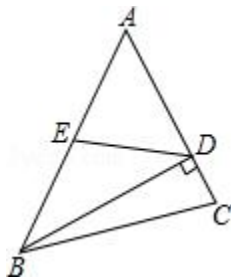
12. $\sqrt{13}$ 的整数部分是_____.

13. 如图，点 A, B, C 是 $\odot O$ 上的点， $AO=AB$ ，则 $\angle ACB=$ _____度.



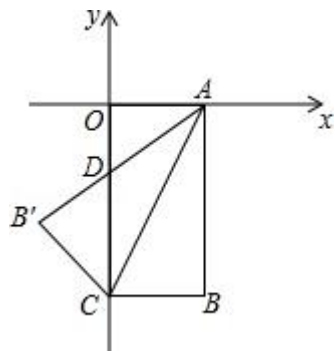
14. 某校组织“书香校园”读书活动，某班图书角现有文学书 18 本，科普书 9 本，人物传记 12 本，军事书 6 本，小明随机抽取一本，恰好是人物传记的概率是_____.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BD \perp AC$ 于 D，点 E 为 AB 的中点， $AD=6$ ， $DE=5$ ，则线段 BD 的长等于_____.

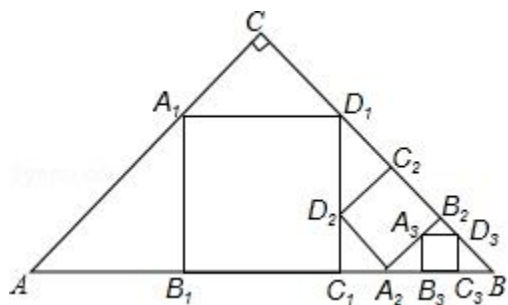


16. 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，则这个多边形的边数_____.

17. 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 $OABC$, $OA=3$, $OC=6$, 将 $\triangle ABC$ 沿对角线 AC 翻折, 使点 B 落在点 B' 处, AB' 与 y 轴交于点 D , 则点 D 的坐标为_____.



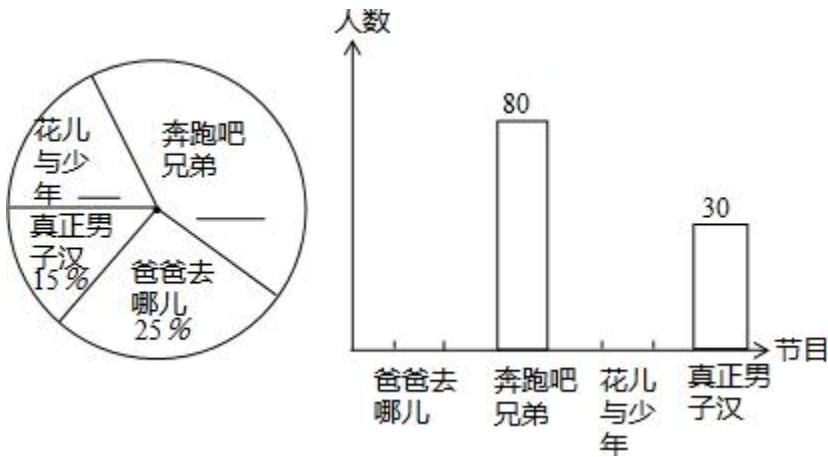
18. 如图, $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$, $AC=BC=a$, 在 $\triangle ABC$ 中截出一个正方形 $A_1B_1C_1D_1$, 使点 A_1 , D_1 分别在 AC , BC 边上, 边 B_1C_1 在 AB 边上; 在 $\triangle BC_1D_1$ 中截出第二个正方形 $A_2B_2C_2D_2$, 使点 A_2 , D_2 分别在 BC_1 , D_1C_1 边上, 边 B_2C_2 在 BD_1 边上; ..., 依此方法作下去, 则第 n 个正方形的边长为_____.



三、解答题 (第 19 题 10 分, 第 20 题 12 分, 共 22 分)

19. 先化简, 再求值: $\left[\frac{x^2-1}{(x-1)^2} - \frac{x}{x-1} \right] \div \frac{1}{2x}$, 请选取一个适当的 x 的数值代入求值.

20. 校文艺部在全校范围内随机抽取一部分同学，对同学们喜爱的四种“明星真人秀”节目进行问卷调查（每位同学只能选择一种最喜爱的节目），并将调查结果整理后分别绘制成如图所示的不完整的扇形统计图和条形统计图）.



请根据所给信息回答下列问题:

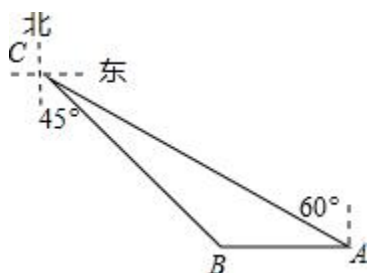
- (1) 本次问卷调查共调查了多少名学生?
- (2) 请将两幅统计图补充完整;
- (3) 若该校有 1500 名学生, 据此估计有多少名学生最喜爱《奔跑吧兄弟》节目.

四、解答题 (每小题 12 分, 共 24 分)

21. 某宾馆准备购进一批换气扇, 从电器商场了解到: 一台 A 型换气扇和三台 B 型换气扇共需 275 元; 三台 A 型换气扇和二台 B 型换气扇共需 300 元.

- (1) 求一台 A 型换气扇和一台 B 型换气扇的售价各是多少元;
- (2) 若该宾馆准备同时购进这两种型号的换气扇共 40 台并且 A 型换气扇的数量不多于 B 型换气扇数量的 3 倍, 请设计出最省钱的购买方案, 并说明理由.

22. 如图，码头 A 在码头 B 的正东方向，两个码头之间的距离为 32 海里，今有一货船由码头 A 出发，沿北偏西 60° 方向航行到达小岛 C 处，此时测得码头 B 在南偏东 45° 方向，求码头 A 与小岛 C 的距离. ($\sqrt{3} \approx 1.732$ ，结果精确到 0.01 海里)

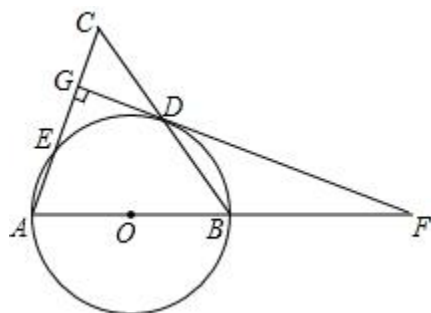


五、解答题 (本题 12 分)

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 分别交 BC ， AC 于点 D ， E ， $DG \perp AC$ 于点 G ，交 AB 的延长线于点 F 。

(1) 求证：直线 FG 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $AC=10$ ， $\cos A = \frac{2}{5}$ ，求 CG 的长。



六、解答题 (本题 12 分)

24. 某商场试销一种商品，成本为每件 200 元，规定试销期间销售单价不低于成本单价，且获利不得高于 50%，一段时间后，发现销售量 y (件) 与销售单价 x (元) 之间的函数关系如下表：

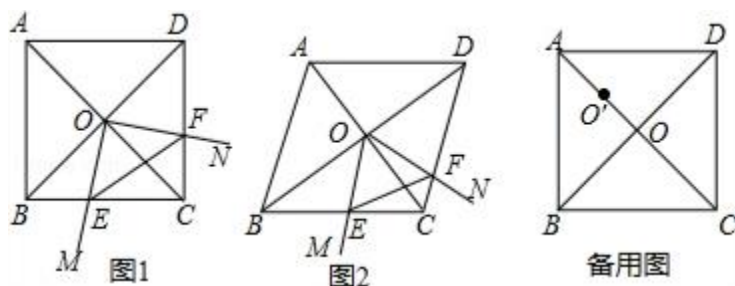
销售单价 x (元)	...	230	235	240	245	...
销售量 y (件)	...	440	430	420	410	...

- (1) 请根据表格中所给数据，求出 y 关于 x 的函数关系式；
- (2) 设商场所获利润为 w 元，将商品销售单价定为多少时，才能使所获利润最大？最大利润是多少？

七、解答题 (本题 12 分)

25. 菱形 $ABCD$ 中，两条对角线 AC , BD 相交于点 O , $\angle MON + \angle BCD = 180^\circ$, $\angle MON$ 绕点 O 旋转，射线 OM 交边 BC 于点 E , 射线 ON 交边 DC 于点 F , 连接 EF .

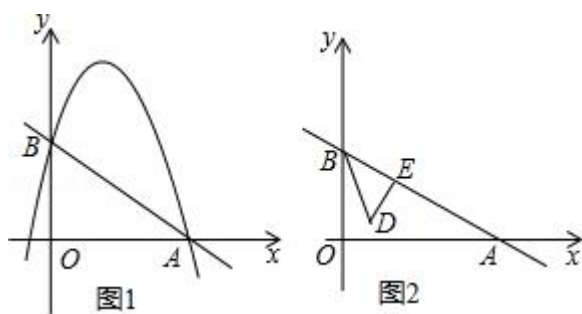
- (1) 如图 1, 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时, $\triangle OEF$ 的形状是_____;
- (2) 如图 2, 当 $\angle ABC = 60^\circ$ 时, 请判断 $\triangle OEF$ 的形状, 并说明理由;
- (3) 在 (1) 的条件下, 将 $\angle MON$ 的顶点移到 AO 的中点 O' 处, $\angle MO'N$ 绕点 O' 旋转, 仍满足 $\angle MO'N + \angle BCD = 180^\circ$, 射线 $O'M$ 交直线 BC 于点 E , 射线 $O'N$ 交直线 CD 于点 F , 当 $BC = 4$, 且 $\frac{S_{\triangle O'EF}}{S_{\text{四边形}ABCE}} = \frac{9}{8}$ 时, 直接写出线段 CE 的长.



八、解答题 (本题 14 分)

26. 如图 1, 平面直角坐标系中, 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 与抛物线 $y = ax^2 + \frac{9}{4}x + c$ 相交于 A, B 两点, 其中点 A 在 x 轴上, 点 B 在 y 轴上.

- (1) 求抛物线的解析式;
- (2) 在抛物线上存在一点 M, 使 $\triangle MAB$ 是以 AB 为直角边的直角三角形, 求点 M 的坐标;
- (3) 如图 2, 点 E 为线段 AB 上一点, $BE = 2$, 以 BE 为腰作等腰 $\text{Rt}\triangle BDE$, 使它与 $\triangle AOB$ 在直线 AB 的同侧, $\angle BED = 90^\circ$, $\triangle BDE$ 沿着 BA 方向以每秒一个单位的速度运动, 当点 B 与 A 重合时停止运动, 设运动时间为 t 秒, $\triangle BDE$ 与 $\triangle AOB$ 重叠部分的面积为 S, 直接写出 S 关于 t 的函数关系式, 并写出自变量 t 的取值范围.



2015 年辽宁省辽阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是正确的)

1. $\sqrt{2}$ 的相反数是 ()

- A. $-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

考点: 实数的性质.

专题: 计算题.

分析: 利用相反数的定义计算即可得到结果.

解答: 解: $\sqrt{2}$ 的相反数是 $-\sqrt{2}$.

故选 A

点评: 此题考查了实数的性质, 熟练掌握相反数的定义是解本题的关键.

2. 下列计算正确的是 ()

- A. $x^2 \cdot x^3 = x^6$ B. $x^5 + x^5 = 2x^{10}$
C. $(-2x)^3 = 8x^3$ D. $(-2x^3) \div (-6x^2) = \frac{1}{3}x$

考点: 整式的除法; 合并同类项; 同底数幂的乘法; 幂的乘方与积的乘方.

专题: 计算题.

分析: A、原式利用同底数幂的乘法法则计算得到结果, 即可做出判断;

B、原式合并同类项得到结果, 即可做出判断;

C、原式利用积的乘方运算法则计算得到结果, 即可做出判断;

D、原式利用单项式除以单项式法则计算得到结果, 即可做出判断.

解答: 解: A、原式 $= x^5$, 错误;

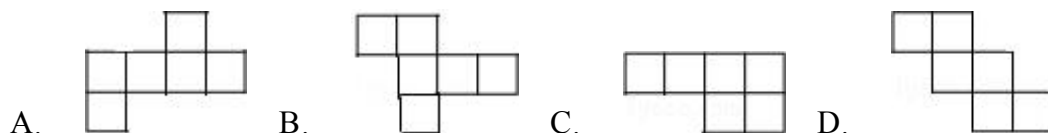
B、原式 $= 2x^5$, 错误;

C、原式 $= -8x^3$ ，错误；

D、原式 $=\frac{1}{3}x$ ，正确，

点评： 此题考查了整式的除法，合并同类项，同底数幂的乘法，以及幂的乘方与积的乘方，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

3. 下列各图不是正方体表面展开图的是 ()



考点： 几何体的展开图.

分析： 根据正方体展开图的常见形式选择.

解答： 解：A、是正方体的展开图，

B、是正方体的展开图，

C、折叠有两个正方形重合，不是正方体的展开图，

D、是正方体的展开图，

故选 C.

点评： 本题考查了几何体的展开图，熟记正方体展开图的 11 种形式是解题的关键.

4. 一组数据：2，3，6，6，7，8，8，8 的中位数是 ()

A. 6 B. 6.5 C. 7 D. 8

考点： 中位数.

分析： 根据中位数的概念求解.

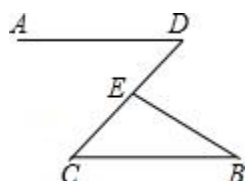
解答： 解：这组数据按照从小到大的顺序排列为：2，3，6，6，7，8，8，8，

则中位数为： $\frac{6+7}{2}=6.5$.

故选 B.

点评： 本题考查了中位数的知识，将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数；如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

5. 如图， $AD \parallel CB$ ， $\angle D = 43^\circ$ ， $\angle B = 25^\circ$ ，则 $\angle DEB$ 的度数为（ ）



A. 72° B. 68° C. 63° D. 18°

考点： 平行线的性质.

专题： 计算题.

分析： 由 AD 与 CB 平行，利用两直线平行内错角相等得到 $\angle C = \angle D$ ，再利用外角性质即可求出所求角的度数.

解答： 解： $\because AD \parallel CB$ ， $\angle D = 43^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = \angle D = 43^\circ,$$

$\because \angle DEB$ 为 $\triangle ECB$ 的外角，且 $\angle B = 25^\circ$ ，

$$\therefore \angle DEB = \angle B + \angle D = 68^\circ,$$

故选 B

点评： 此题考查了平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解本题的关键.

6. 从甲地到乙地有两条公路，一条是全长 450 公里的普通公路，一条是全长 330 公里的高速公路，某客车在高速公路上行驶的平均速度比在普通公路上快 35 公里/小时，由高速公路从甲地到乙地所需的时间是由普通公路从甲地到乙地所需时间的一半. 如果设该客车由高速公路从甲地到乙地所需时间为 x 小时，那么 x 满足的分式方程是（ ）

A. $\frac{450}{x} = \frac{330}{x+35} \times 2$ B. $\frac{450}{x} = \frac{330}{2x} - 35$

C. $\frac{450}{x} - \frac{330}{2x} = 35$ D. $\frac{330}{x} - \frac{450}{2x} = 35$

考点： 由实际问题抽象出分式方程.

分析： 设出未知数，根据客车在高速公路上行驶的平均速度比在普通公路上快 35 公里/小时，列出方程即可.

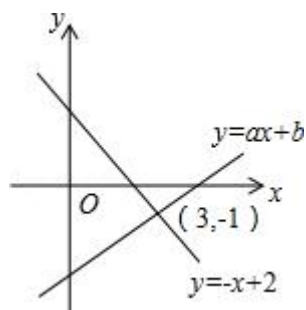
解答： 解：设该客车由高速公路从甲地到乙地所需时间为 x 小时，那么由普通公路从甲地到乙地所需时间为 $2x$,

由题意得, $\frac{330}{x} - \frac{450}{2x} = 35$,

故选：D.

点评： 本题考查的是列分式方程解应用题，正确设出未知数、找出合适的等量关系是解题的关键.

7. 如图，直线 $y = -x + 2$ 与 $y = ax + b$ ($a \neq 0$ 且 a, b 为常数) 的交点坐标为 $(3, -1)$ ，则关于 x 的不等式 $-x + 2 \geq ax + b$ 的解集为 ()



A. $x \geq -1$ B. $x \geq 3$ C. $x \leq -1$ D. $x \leq 3$

考点： 一次函数与一元一次不等式.

分析： 函数 $y = -x + 2$ 与 $y = ax + b$ ($a \neq 0$ 且 a, b 为常数) 的交点坐标为 $(3, -1)$,

求不等式 $-x + 2 \geq ax + b$ 的解集，就是看函数在什么范围内 $y = -x + 2$ 的图象对应的点在函数 $y = ax + b$ 的图象上面.

解答： 解：从图象得到，当 $x \leq 3$ 时， $y = -x + 2$ 的图象对应的点在函数 $y = ax + b$ 的图象上面，

$\therefore$ 不等式 $-x + 2 \geq ax + b$ 的解集为 $x \leq 3$.

故选 D.

点评： 本题考查了一次函数与不等式（组）的关系及数形结合思想的应用. 解决此类问题关键是仔细观察图形，注意几个关键点（交点、原点等），做到数形结合.

8. 下列事件为必然事件的是（ ）

- A. 如果 a, b 是实数，那么 $a \cdot b = b \cdot a$
- B. 抛掷一枚均匀的硬币，落地后正面朝上
- C. 汽车行驶到交通岗遇到绿色的信号灯
- D. 口袋中装有 3 个红球，从中随机摸出一球，这个球的白球

考点： 随机事件.

分析： 分别利用随机事件和必然事件以及不可能事件的定义分析得出即可.

解答： 解：A、如果 a, b 是实数，那么 $a \cdot b = b \cdot a$ ，是必然事件，符合题意；

B、抛掷一枚均匀的硬币，落地后正面朝上，是随机事件，不合题意；

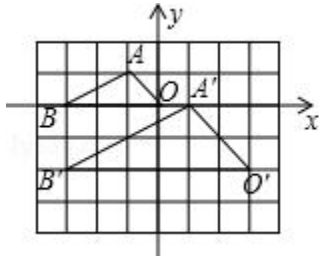
C、汽车行驶到交通岗遇到绿色的信号灯，是随机事件，不合题意；

D、口袋中装有 3 个红球，从中随机摸出一球，这个球的白球，是不可能事件，不合题意.

故选：A.

点评： 此题主要考查了随机事件和必然事件以及不可能事件的定义，正确把握相关定义是解题关键.

9. 如图，在边长为 1 的小正方形组成的网格中，建立平面直角坐标系， $\triangle ABO$ 与 $\triangle A'B'O'$ 是以点 P 为位似中心的位似图形，它们的顶点均在格点（网格线的交点）上，则点 P 的坐标为（ ）



- A. (0, 0) B. (0, 1) C. (-3, 2) D. (3, -2)

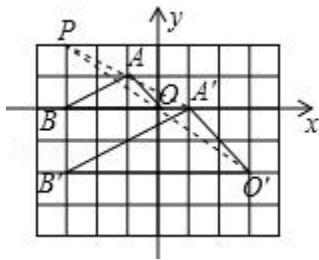
考点： 位似变换；坐标与图形性质.

分析： 利用位似图形的性质得出连接各对应点，进而得出位似中心的位置.

解答： 解：如图所示：P点即为所求，

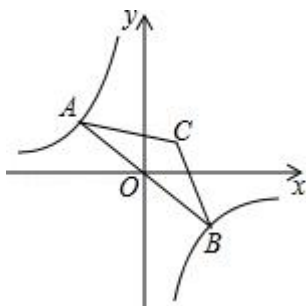
故P点坐标为：(-3, 2).

故选：C.



点评： 此题主要考查了位似变换，根据位似图形的性质得出是解题关键.

10. 如图，点A是双曲线 $y = -\frac{6}{x}$ 在第二象限分支上的一个动点，连接AO并延长交另一分支于点B，以AB为底作等腰 $\triangle ABC$ ，且 $\angle ACB = 120^\circ$ ，点C在第一象限，随着点A的运动，点C的位置也不断变化，但点C始终在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上运动，则k的值为（ ）



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

考点：反比例函数图象上点的坐标特征.

分析：根据题意得出 $\triangle AOD \sim \triangle OCE$ ，进而得出 $\frac{AD}{EO} = \frac{DO}{EC} = \frac{AO}{CO}$ ，即可得出

$$k = EC \times EO = 2.$$

解答：解：连接 CO，过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D，过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于点 E，

$\therefore$ 连接 AO 并延长交另一分支于点 B，以 AB 为底作等腰 $\triangle ABC$ ，且 $\angle ACB = 120^\circ$ ，

$$\therefore CO \perp AB, \quad \angle CAB = 30^\circ,$$

$$\text{则 } \angle AOD + \angle COE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAO + \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAO = \angle COE,$$

$$\text{又 } \therefore \angle ADO = \angle CEO = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle OCE,$$

$$\therefore \frac{AD}{EO} = \frac{DO}{EC} = \frac{AO}{CO} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \text{则 } \frac{S_{\triangle ADO}}{S_{\triangle COE}} = 3,$$

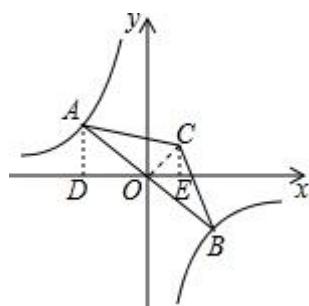
$\therefore$ 点 A 是双曲线 $y = -\frac{6}{x}$ 在第二象限分支上的一个动点，

$$\therefore \frac{1}{2}|xy| = \frac{1}{2}AD \cdot DO = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$\therefore \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}EC \times EO = 1,$$

$$\text{则 } EC \times EO = 2.$$

故选 B.



点评： 此题主要考查了反比例函数与一次函数的交点以及相似三角形的判定与性质，得出 $\triangle AOD \sim \triangle OCE$ 是解题关键.

二、填空题 (本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分)

11. 某工业园区，今年第一季度新开工 94 个项目，总投资 7429 亿元. 请将 7429 亿，用科学记数法表示为 7.429×10^{11} .

考点： 科学记数法—表示较大的数.

分析： 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值是易错点，由于 7429 亿有 12 位，所以可以确定 $n = 12 - 1 = 11$.

解答： 解：7429 亿 $= 7.429 \times 10^{11}$.

故答案为： 7.429×10^{11} .

点评： 本题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值

12. $\sqrt{13}$ 的整数部分是 3.

考点： 估算无理数的大小.

分析： 根据平方根的意义确定 $\sqrt{13}$ 的范围，则整数部分即可求得.

解答： 解： $\because 9 < 13 < 16$,

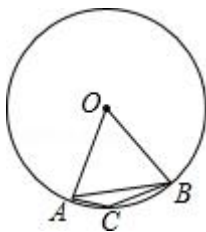
$\therefore 3 < \sqrt{13} < 4$,

$\therefore \sqrt{13}$ 的整数部分是 3.

故答案是： 3.

点评： 本题主要考查了无理数的估算，解题关键是确定无理数的整数部分即可解决问题.

13. 如图，点 A, B, C 是 $\odot O$ 上的点， $AO = AB$ ，则 $\angle ACB =$ 150 度.



考点： 圆周角定理；等边三角形的判定与性质；圆内接四边形的性质.

分析： 根据 $AO=AB$ ，且 $OA=OB$ ，得出 $\triangle OAB$ 是等边三角形，再利用圆周角和圆心角的关系得出 $\angle BAC + \angle ABC = 30^\circ$ ，解答即可.

解答： 解： $\because$ 点 A, B, C 是 $\odot O$ 上的点， $AO=AB$ ，

$$\therefore OA=OB=AB,$$

$\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 150^\circ,$$

故答案为：150

点评： 此题考查了圆心角、圆周角定理问题，关键是根据 $AO=AB$ ，且 $OA=OB$ ，得出 $\triangle OAB$ 是等边三角形.

14. 某校组织“书香校园”读书活动，某班图书角现有文学书 18 本，科普书 9 本，人物传记 12 本，军事书 6 本，小明随机抽取一本，恰好是人物传记的概率是 $\frac{4}{15}$.

考点： 概率公式.

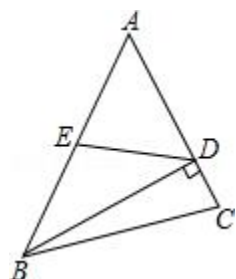
分析： 利用概率公式即可直接求解.

解答： 解：恰好是人物传记的概率是： $\frac{12}{18+9+12+6} = \frac{4}{15}$.

故答案是： $\frac{4}{15}$.

点评： 此题考查概率的求法：如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BD \perp AC$ 于 D ，点 E 为 AB 的中点， $AD=6$ ， $DE=5$ ，则线段 BD 的长等于 8.



考点： 直角三角形斜边上的中线；勾股定理.

分析： 利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，进而结合勾股定理得出 BD 的长.

解答： 解： $\because BD \perp AC$ 于 D ，点 E 为 AB 的中点，

$$\therefore AB = 2DE = 2 \times 5 = 10,$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABD$ 中，

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

故答案为：8.

点评： 此题主要考查了勾股定理以及直角三角形斜边的中线的性质，得出 AB 的长是解题关键.

16. 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，则这个多边形的边数为 6.

考点： 多边形内角与外角.

专题： 计算题.

分析： 利用多边形的外角和以及多边形的内角和定理即可解决问题.

解答： 解： $\because$ 多边形的外角和是 360 度，多边形的内角和是外角和的 2 倍，则内角和是 720 度，

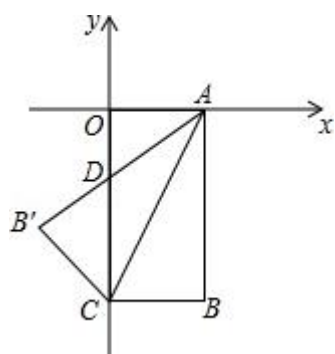
$$720 \div 180 + 2 = 6,$$

∴ 这个多边形是六边形.

故答案为: 6.

点评: 本题主要考查了多边形的内角和定理与外角和定理, 熟练掌握定理是解题的关键.

17. 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 OABC, OA=3, OC=6, 将 $\triangle ABC$ 沿对角线 AC 翻折, 使点 B 落在点 B' 处, AB' 与 y 轴交于点 D, 则点 D 的坐标为 $(0, -\frac{9}{4})$.



考点: 翻折变换 (折叠问题); 坐标与图形性质.

分析: 由折叠的性质可知, $\angle B'AC = \angle BAC$, $\angle BAC = \angle DCA$, 易得 $DC = DA$, 设 $OD = x$, 则 $DC = 6 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, 由勾股定理得 OD, 得 OD 的坐标.

解答: 解: 由折叠的性质可知, $\angle B'AC = \angle BAC$,

∵ 四边形 OABC 为矩形,

∴ $OC \parallel AB$,

∴ $\angle BAC = \angle DCA$,

∴ $\angle B'AC = \angle DCA$,

∴ $AD = CD$,

设 $OD = x$, 则 $DC = 6 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, 由勾股定理得,

$$OA^2 + OD^2 = AD^2,$$

$$\text{即 } 9+x^2=(6-x)^2,$$

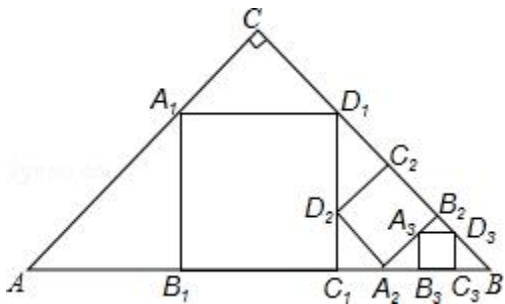
$$\text{解得: } x=\frac{9}{4},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为: } (0, -\frac{9}{4}),$$

$$\text{故答案为: } (0, -\frac{9}{4}).$$

点评: 本题主要考查了翻折变换的性质及其应用问题,灵活运用有关定理来分析、判断、推理或解答是解题的关键.

18. 如图, $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$, $AC=BC=a$, 在 $\triangle ABC$ 中截出一个正方形 $A_1B_1C_1D_1$, 使点 A_1 , D_1 分别在 AC , BC 边上, 边 B_1C_1 在 AB 边上; 在 $\triangle BC_1D_1$ 中截出第二个正方形 $A_2B_2C_2D_2$, 使点 A_2 , D_2 分别在 BC_1 , D_1C_1 边上, 边 B_2C_2 在 BD_1 边上; ..., 依此方法作下去, 则第 n 个正方形的边长为 $\underline{(\frac{\sqrt{2}}{3})^n a}$.



考点: 相似三角形的判定与性质; 等腰直角三角形; 正方形的性质.

专题: 规律型.

分析: 设正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 x , 利用 $\triangle CA_1D_1$ 和 $\triangle AA_1B_1$ 都是等腰直角三角形得到 $A_1C=\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $AA_1=\sqrt{2}x$, 则 $\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}x=a$, 解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{3}a$, 于是得第 1 个正方形的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{3}a$, 运用同样的方法可得第 2 个正方形的边长为 $(\frac{\sqrt{2}}{3})^2a$, 于是根据指数与序号的关系可得第 n 个正方形的边长为 $(\frac{\sqrt{2}}{3})^n a$.

解答: 解: 设正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 x ,

$\therefore \triangle CA_1D_1$ 和 $\triangle AA_1B_1$ 都是等腰直角三角形,

$$\therefore A_1C=\frac{\sqrt{2}}{2}x, AA_1=\sqrt{2}x,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}x = a, \text{ 解得 } x = \frac{\sqrt{2}}{3}a,$$

即第 1 个正方形的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{3}a$,

设正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 的边长为 y ,

$\therefore \triangle C_2D_1D_2$ 和 $\triangle C_1A_2D_2$ 都是等腰直角三角形,

$$\therefore C_1D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}y, \quad D_1D_2 = \sqrt{2}y,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}y + \sqrt{2}y = \frac{\sqrt{2}}{3}a, \text{ 解得 } y = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 a,$$

即第 2 个正方形的边长为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 a$,

同理可得第 3 个正方形的边长为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 a$,

$\therefore$ 第 n 个正方形的边长为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n a$.

故答案为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n a$.

点评: 本题考查了等腰直角三角形的性质和正方形的性质, 灵活应用等腰直角三角形三边的关系进行几何计算.

三、解答题 (第 19 题 10 分, 第 20 题 12 分, 共 22 分)

19. 先化简, 再求值: $\left[\frac{x^2-1}{(x-1)^2} - \frac{x}{x-1}\right] \div \frac{1}{2x}$, 请选取一个适当的 x 的数值

代入求值.

考点: 分式的化简求值.

分析: 先化简分式, 再取 $x=2$ 代入求值.

解答: 解: $\left[\frac{x^2-1}{(x-1)^2} - \frac{x}{x-1}\right] \div \frac{1}{2x}$

$$= \left[\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} - \frac{x}{x-1}\right] \cdot 2x,$$

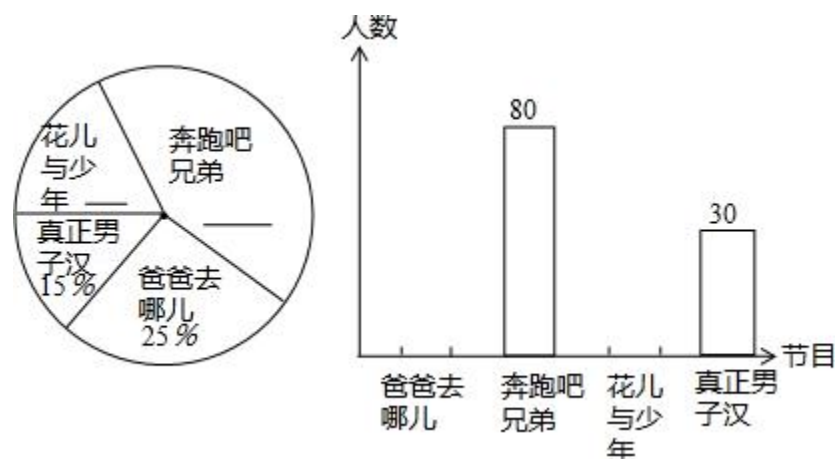
$$= \frac{1}{x-1} \cdot 2x,$$

$$= \frac{2x}{x-1}.$$

当 $x=2$ 时, 原式=4.

点评: 本题主要考查了分式的化简求值, 解题的关键是正确的化简分式.

20. 校文艺部在全校范围内随机抽取一部分同学, 对同学们喜爱的四种“明星真人秀”节目进行问卷调查 (每位同学只能选择一种最喜爱的节目), 并将调查结果整理后分别绘制成如图所示的不完整的扇形统计图和条形统计图).



请根据所给信息回答下列问题:

- (1) 本次问卷调查共调查了多少名学生?
- (2) 请将两幅统计图补充完整;
- (3) 若该校有 1500 名学生, 据此估计有多少名学生最喜爱《奔跑吧兄弟》节目.

考点: 条形统计图; 用样本估计总体; 扇形统计图.

分析: (1) 利用本次问卷调查共调查的学生数=喜欢真正男子汉的人数 $\div$ 对应的百分比求解即可,

(2) 先求出奔跑吧兄弟的百分比, 喜欢爸爸去哪里了的人数, 喜欢花儿与少年的人数, 喜欢花儿与少年的百分比, 作图即可,

(3) 利用该校学生总数乘喜爱《奔跑吧兄弟》节目的百分比即可.

解答: 解: (1) 本次问卷调查共调查的学生数为: $30 \div 15\% = 200$ (名)

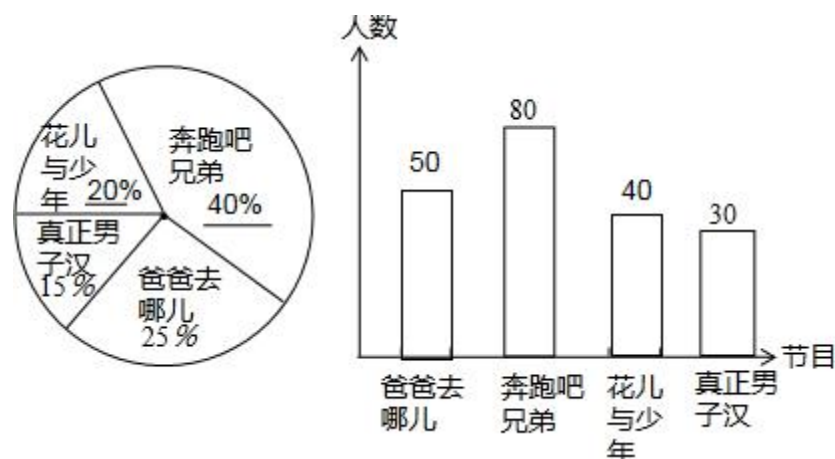
(2) 奔跑吧兄弟的百分比为 $\frac{80}{200} \times 100\% = 40\%$,

喜欢爸爸去哪里了的人数为 $200 \times 25\% = 50$ (名),

喜欢花儿与少年的人数为： $200 - 80 - 30 - 50 = 40$ （名），

喜欢花儿与少年的百分比为 $\frac{40}{200} \times 100\% = 20\%$ ，

如图，



(3) $1500 \times 40\% = 600$ （名）

答：估计有 600 名学生最喜爱《奔跑吧兄弟》节目．

点评： 本题主要考查了条形统计图，扇形统计图及用样本估计总体，解题的关键是读懂统计图，从统计图中获得准确的信息．

四、解答题（每小题 12 分，共 24 分）

21. 某宾馆准备购进一批换气扇，从电器商场了解到：一台 A 型换气扇和三台 B 型换气扇共需 275 元；三台 A 型换气扇和二台 B 型换气扇共需 300 元．

(1) 求一台 A 型换气扇和一台 B 型换气扇的售价各是多少元；

(2) 若该宾馆准备同时购进这两种型号的换气扇共 40 台并且 A 型换气扇的数量不多于 B 型换气扇数量的 3 倍，请设计出最省钱的购买方案，并说明理由．

考点： 一次函数的应用；二元一次方程组的应用．

分析： (1) 设一台 A 型换气扇 x 元，一台 B 型换气扇的售价为 y 元，根据“一台 A 型换气扇和三台 B 型换气扇共需 275 元；三台 A 型换气扇和二台 B 型换气扇共需 300 元”列方程组求解即可；

(2) 首先确定自变量的取值范围，然后得到有关总费用和换气扇的台数之间的关系得到函数解析式，确定函数的最值即可；

解答： 解：（1）设一台 A 型换气扇 x 元，一台 B 型换气扇的售价为 y 元，根据题意得：

$$\begin{cases} x+3y=275 \\ 3x+2y=300 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} x=50 \\ y=75 \end{cases}$,

答：一台 A 型换气扇 50 元，一台 B 型换气扇的售价为 75 元；

（2）设购进 A 型换气扇 z 台，总费用为 w 元，

则有 $z \leq 3(40 - z)$,

解得： $z \leq 30$,

$\therefore z$ 为换气扇的台数，

$\therefore z \leq 30$ 且 z 为正整数，

$$w = 50z + 75(40 - z) = -25z + 3000,$$

$$\therefore -25 < 0,$$

$\therefore w$ 随着 z 的增大而减小，

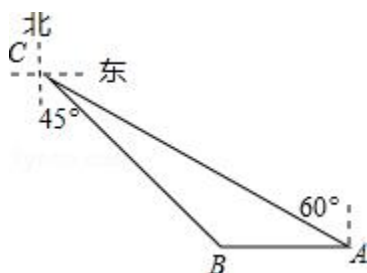
$\therefore$ 当 $z=30$ 时， w 最大 $= 25 \times 30 + 3000 = 2250$,

此时 $40 - z = 40 - 30 = 10$,

答：最省钱的方案是购进 30 台 A 型换气扇，10 台 B 型换气扇。

点评： 此题主要考查了二元一次方程组的应用以及一次函数的应用等知识，根据题意得出正确的等量关系是解题关键，难度不大。

22. 如图，码头 A 在码头 B 的正东方向，两个码头之间的距离为 32 海里，今有一货船由码头 A 出发，沿北偏西 60° 方向航行到达小岛 C 处，此时测得码头 B 在南偏东 45° 方向，求码头 A 与小岛 C 的距离. ($\sqrt{3} \approx 1.732$ ，结果精确到 0.01 海里)



考点： 解直角三角形的应用-方向角问题.

分析： 根据正切函数，可得 CD 的长，根据直角三角形的性质，可得答案.

解答： 解：作 $CD \perp AB$ 交 AB 延长线于点 D，

$$\angle D = 90^\circ$$

由题意，得 $\angle DCB = 45^\circ$ ， $\angle CAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ， $AB = 32$ 海里，

设 $CD = x$ 海里，在 $\text{Rt}\triangle DCB$ 中， $\tan \angle DCB = \frac{BD}{CD}$ ， $\tan 45^\circ = \frac{BD}{x} = 1$ ，

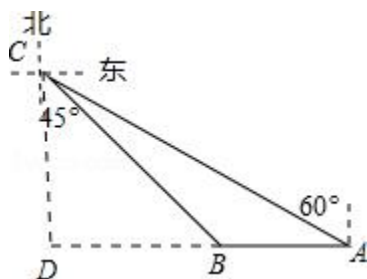
$$BD = x, AD = AB + BD = 32 + x, \tan 30^\circ = \frac{x}{x+32} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{解得 } x = 16\sqrt{3} + 16,$$

$$\therefore \angle CAD = 30^\circ, \angle CDA = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = 2CD = 32\sqrt{3} + 32 \approx 87.42 \text{ 海里},$$

答：码头 A 与小岛 C 的距离约为 87.42 海里.



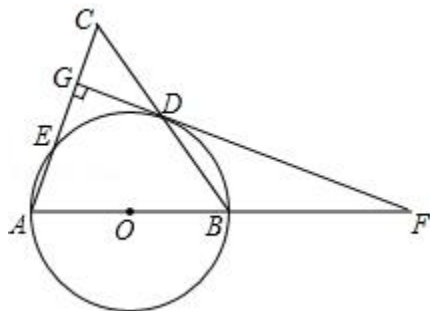
点评： 本题考查了解直角三角形，利用了锐角三角函数，直角三角形的性质，画出直角三角形得出 CD 的长是解题关键.

五、解答题 (本题 12 分)

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 分别交 BC，AC 于点 D，E， $DG \perp AC$ 于点 G，交 AB 的延长线于点 F.

(1) 求证：直线 FG 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $AC=10$, $\cos A=\frac{2}{5}$, 求 CG 的长.



考点： 切线的判定；相似三角形的判定与性质.

分析： (1) 首先判断出 $OD \parallel AC$, 推得 $\angle ODG = \angle DGC$, 然后根据 $DG \perp AC$, 可得 $\angle DGC = 90^\circ$, $\angle ODG = 90^\circ$, 推得 $OD \perp FG$, 即可判断出直线 FG 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 首先根据相似三角形判定的方法, 判断出 $\triangle ODF \sim \triangle AGF$, 再根据 $\cos A = \frac{2}{5}$, 可得 $\cos \angle DOF = \frac{2}{5}$; 然后求出 OF、AF 的值, 即可求出 AG、CG 的值各是多少.

解答： (1) 证明：如图 1, 连接 OD,

$$\because AB=AC,$$

$$\therefore \angle C = \angle ABC,$$

$$\because OD=OB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ODB,$$

$$\therefore \angle ODB = \angle C,$$

$$\therefore OD \parallel AC,$$

$$\therefore \angle ODG = \angle DGC,$$

$$\because DG \perp AC,$$

$$\therefore \angle DGC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ODG = 90^\circ,$$

$$\therefore OD \perp FG,$$

$$\because OD \text{ 是 } \odot O \text{ 的半径},$$

∴ 直线 FG 是⊙O 的切线.

(2) 解: 如图 2,

∵ AB=AC=10, AB 是⊙O 的直径,

∴ OA=OD=10÷2=5,

由 (1), 可得

OD ⊥ FG, OD // AC,

∴ ∠ODF=90°, ∠DOF=∠A,

在△ODF 和△AGF 中,

$$\begin{cases} \angle DOF = \angle A \\ \angle F = \angle F \end{cases}$$

∴ △ODF ∽ △AGF,

$$\therefore \frac{OD}{AG} = \frac{OF}{AF},$$

$$\therefore \cos A = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \cos \angle DOF = \frac{2}{5},$$

$$\therefore OF = \frac{OD}{\cos \angle DOF} = \frac{5}{\frac{2}{5}} = \frac{25}{2},$$

$$\therefore AF = AO + OF = 5 + \frac{25}{2} = \frac{35}{2},$$

$$\therefore \frac{5}{AG} = \frac{\frac{25}{2}}{\frac{35}{2}},$$

解得 AG=7,

∴ CG=AC - AG=10 - 7=3,

即 CG 的长是 3.

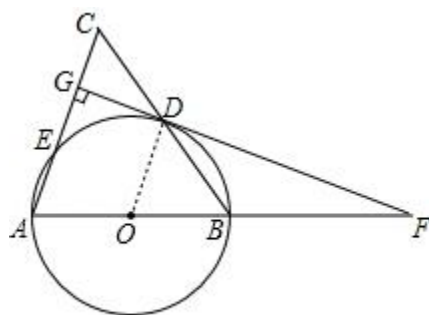


图2

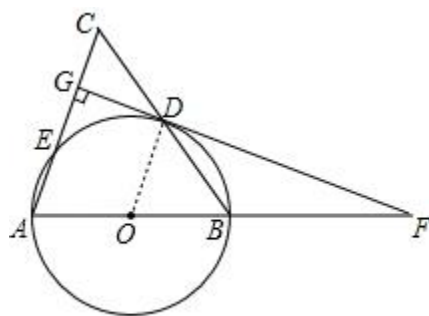


图1

点评：（1）此题主要考查了切线的判定和性质的应用，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确切线的判定定理：经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

（2）此题还考查了三角形相似的判定和性质的应用，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：①三边法：三组对应边的比相等的两个三角形相似；②两边及其夹角法：两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似；③两角法：有两组角对应相等的两个三角形相似.

六、解答题（本题 12 分）

24. 某商场试销一种商品，成本为每件 200 元，规定试销期间销售单价不低于成本单价，且获利不得高于 50%，一段时间后，发现销售量 y （件）与销售单价 x （元）之间的函数关系如下表：

销售单价 x （元）	...	230	235	240	245	...
销售量 y （件）	...	440	430	420	410	...

（1）请根据表格中所给数据，求出 y 关于 x 的函数关系式；

（2）设商场所获利润为 w 元，将商品销售单价定为多少时，才能使所获利润最大？最大利润是多少？

考点： 二次函数的应用.

分析： (1) 设 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$ ，利用待定系数法求得函数的解析式即可；

(2) 先求得单价的定价范围，然后根据利润=每件获利 $\times$ 件数列出利润的函数关系式，然后根据自变量的取值和二次函数的对称性即可求得最大利润.

解答： 解：(1) 根据所给数据可知 y 与 x 的图象是一条直线. 设 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$.

将 $x=230$, $y=440$; $x=235$, $y=430$ 代入 $y=kx+b$ 得: $\begin{cases} 230k+b=440 \\ 235k+b=430 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} k=-2 \\ b=900 \end{cases}$

$$\therefore y = -2x + 900$$

经验证, $x=240$, $y=420$; $x=245$, $y=410$ 都满足上述函数关系式

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } y = -2x + 900;$$

(2) 由题意得: $200 \leq x \leq 200 \times (1+50\%)$,

$$\therefore 200 \leq x \leq 300.$$

$$W = (x - 200)(-2x + 900) = -2(x - 235)^2 + 31250$$

$$\because a = -2 < 0,$$

$\therefore$ 抛物线开口向下.

$\because 200 \leq x \leq 300$, 在对称轴 $x=325$ 的左侧,

$\therefore W$ 随 x 的增大而增大.

$\therefore$ 当 $x=300$ 时, W 有最大值, $W_{\text{最大}} = -2 \times (300 - 325)^2 + 31250 = 30000$ 元.

答: 商品的销售单价定为 300 元时, 才能使所获利润最大, 最大利润时 30000 元.

点评： 本题主要考查的是二次函数的最值问题, 确定抛物线的对称轴以及自变量的取值范围是解题的关键.

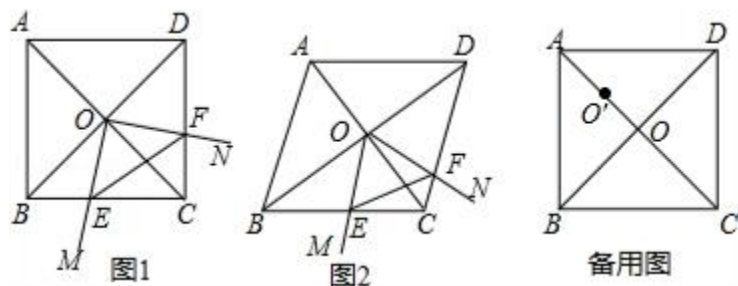
七、解答题 (本题 12 分)

25. 菱形 ABCD 中, 两条对角线 AC, BD 相交于点 O, $\angle MON + \angle BCD = 180^\circ$, $\angle MON$ 绕点 O 旋转, 射线 OM 交边 BC 于点 E, 射线 ON 交边 DC 于点 F, 连接 EF.

(1) 如图 1, 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时, $\triangle OEF$ 的形状是 等腰直角三角形;

(2) 如图 2, 当 $\angle ABC = 60^\circ$ 时, 请判断 $\triangle OEF$ 的形状, 并说明理由;

(3) 在 (1) 的条件下, 将 $\angle MON$ 的顶点移到 AO 的中点 O' 处, $\angle MO'N$ 绕点 O' 旋转, 仍满足 $\angle MO'N + \angle BCD = 180^\circ$, 射线 $O'M$ 交直线 BC 于点 E, 射线 $O'N$ 交直线 CD 于点 F, 当 $BC = 4$, 且 $\frac{S_{\triangle O'EF}}{S_{\text{四边形}ABCD}} = \frac{9}{8}$ 时, 直接写出线段 CE 的长.



考点: 四边形综合题.

分析: (1) 先求得四边形 ABCD 是正方形, 然后根据正方形的性质可得 $\angle EBO = \angle FCO = 45^\circ$, $OB = OC$, 再根据同角的余角相等可得 $\angle BOE = \angle COF$, 然后利用“角边角”证明 $\triangle BOE$ 和 $\triangle COF$ 全等, 根据全等三角形对应边相等即可得证;

(2) 过 O 点作 $OG \perp BC$ 于 G, 作 $OH \perp CD$ 于 H, 根据菱形的性质可得 CA 平分 $\angle BCD$, $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$, 求得 $OG = OH$, $\angle BCD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, 从而求得 $\angle GOH = \angle EOF = 60^\circ$, 再根据等量减等量可得 $\angle EOG = \angle FOH$, 然后利用“角边角”证明 $\triangle EOG$ 和 $\triangle FOH$ 全等, 根据全等三角形对应边相等即可得证;

(3) 过 O 点作 $OG \perp BC$ 于 G, 作 $OH \perp CD$ 于 H, 先求得四边形 $O'GCH$ 是正方形, 从而求得 $GC = O'G = 3$, $\angle GO'H = 90^\circ$, 然后利用“角边角”证明 $\triangle EO'G$ 和 $\triangle FO'H$ 全等, 根据全等三角形对应边相等即可证得 $\triangle O'EF$ 是等腰直角三角形, 根据已

知求得等腰直角三角形的直角边 O'E 的长, 然后根据勾股定理求得 EG, 即可求得 CE 的长.

解答: (1) $\triangle OEF$ 是等腰直角三角形;

证明: 如图 1, $\because$ 菱形 ABCD 中, $\angle ABC=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 ABCD 是正方形,

$\therefore OB=OC$, $\angle BOC=90^\circ$, $\angle BCD=90^\circ$, $\angle EBO=\angle FCO=45^\circ$,

$\therefore \angle BOE+\angle COE=90^\circ$,

$\therefore \angle MON+\angle BCD=180^\circ$,

$\therefore \angle MON=90^\circ$,

$\therefore \angle COF+\angle COE=90^\circ$,

$\therefore \angle BOE=\angle COF$,

在 $\triangle BOE$ 与 $\triangle COF$ 中,

$$\begin{cases} \angle BOE=\angle COF \\ OB=OC \\ \angle EBO=\angle FCO \end{cases},$$

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle COF$ (ASA),

$\therefore OE=OF$,

$\therefore \triangle OEF$ 是等腰直角三角形;

故答案为等腰直角三角形;

(2) $\triangle OEF$ 是等边三角形;

证明: 如图 2, 过 O 点作 $OG \perp BC$ 于 G, 作 $OH \perp CD$ 于 H,

$\therefore \angle OGE=\angle OGC=\angle OHC=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 ABCD 是菱形,

$\therefore CA$ 平分 $\angle BCD$, $\angle ABC+\angle BCD=180^\circ$,

$\therefore OG=OH$, $\angle BCD=180^\circ-60^\circ=120^\circ$,

$\therefore \angle GOH+\angle OGC+\angle BCD+\angle OHC=360^\circ$,

$\therefore \angle GOH+\angle BCD=180^\circ$,

$$\therefore \angle \text{MON} + \angle \text{BCD} = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle \text{GOH} = \angle \text{EOF} = 60^\circ,$$

$$\because \angle \text{GOH} = \angle \text{GOF} + \angle \text{FOH}, \quad \angle \text{EOF} = \angle \text{GOF} + \angle \text{EOG},$$

$$\therefore \angle \text{EOG} = \angle \text{FOH},$$

在 $\triangle \text{EOG}$ 与 $\triangle \text{FOH}$ 中,

$$\begin{cases} \angle \text{EOG} = \angle \text{FOH} \\ \text{OG} = \text{OH} \\ \angle \text{EGO} = \angle \text{FHO} \end{cases},$$

$$\therefore \triangle \text{EOG} \cong \triangle \text{FOH} \quad (\text{ASA}),$$

$$\therefore \text{OE} = \text{OF},$$

$\therefore \triangle \text{OEF}$ 是等边三角形;

(3) 证明: 如图 3, $\because$ 菱形 ABCD 中, $\angle \text{ABC} = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 ABCD 是正方形,

$$\therefore \frac{\text{O}'\text{C}}{\text{AC}} = \frac{3}{4},$$

过 O 点作 $\text{O}'\text{G} \perp \text{BC}$ 于 G , 作 $\text{O}'\text{H} \perp \text{CD}$ 于 H ,

$$\therefore \angle \text{O}'\text{GC} = \angle \text{O}'\text{HC} = \angle \text{BCD} = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $\text{O}'\text{GCH}$ 是矩形,

$$\therefore \text{O}'\text{G} \parallel \text{AB}, \quad \text{O}'\text{H} \parallel \text{AD},$$

$$\therefore \frac{\text{O}'\text{G}}{\text{AB}} = \frac{\text{O}'\text{H}}{\text{AD}} = \frac{\text{O}'\text{C}}{\text{AC}} = \frac{3}{4},$$

$$\because \text{AB} = \text{BC} = \text{CD} = \text{AD} = 4,$$

$$\therefore \text{O}'\text{G} = \text{O}'\text{H} = 3,$$

$\therefore$ 四边形 $\text{O}'\text{GCH}$ 是正方形,

$$\therefore \text{GC} = \text{O}'\text{G} = 3, \quad \angle \text{GO}'\text{H} = 90^\circ$$

$$\because \angle \text{MO}'\text{N} + \angle \text{BCD} = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle \text{EO}'\text{F} = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle \text{EO}'\text{F} = \angle \text{GO}'\text{H} = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GO'H = \angle GO'F + \angle FO'H, \quad \angle EO'F = \angle GO'F + \angle EO'G,$$

$$\therefore \angle EO'G = \angle FO'H,$$

在 $\triangle EO'G$ 与 $\triangle FO'H$ 中,

$$\begin{cases} \angle EO'G = \angle FO'H \\ O'G = O'H \\ \angle EGO' = \angle FHO' \end{cases},$$

$$\therefore \triangle EO'G \cong \triangle FO'H \quad (\text{ASA}),$$

$$\therefore O'E = O'F,$$

$\therefore \triangle O'EF$ 是等腰直角三角形;

$$\therefore S_{\text{正方形 } ABCD} = 4 \times 4 = 16, \quad \frac{S_{\triangle O'EF}}{S_{\text{四边形 } ABCE}} = \frac{9}{8},$$

$$\therefore S_{\triangle O'EF} = 18,$$

$$\therefore S_{\triangle O'EF} = \frac{1}{2} O'E^2,$$

$$\therefore O'E = 6,$$

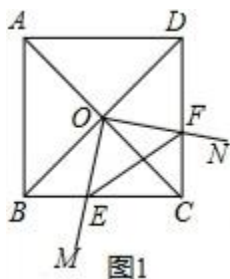
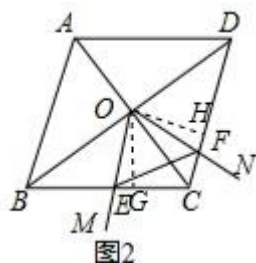
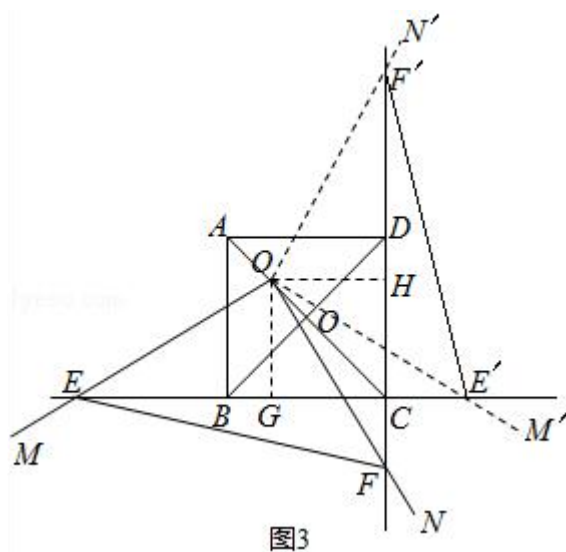
$$\text{在 } \text{RT}\triangle O'EG \text{ 中, } EG = \sqrt{O'E^2 - O'G^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore CE = CG + EG = 3 + 3\sqrt{3}.$$

根据对称性可知, 当 $\angle M'ON'$ 旋转到如图所示位置时,

$$CE' = E'G - CG = 3\sqrt{3} - 3.$$

综上可得, 线段 CE 的长为 $3 + 3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3} - 3$.



点评： 本题考查了正方形的性质，菱形的性质，三角形全等的判定和性质，解决此类问题的关键是正确的利用旋转不变量。正确作出辅助线是关键。

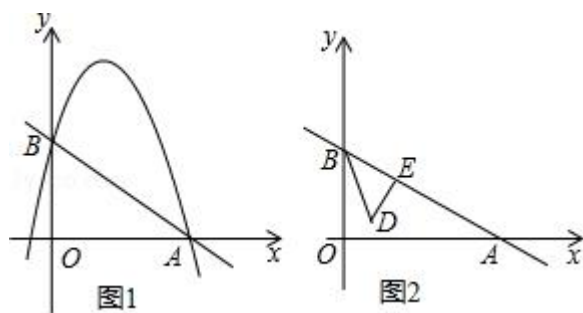
八、解答题（本题 14 分）

26. 如图 1，平面直角坐标系中，直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 与抛物线 $y = ax^2 + \frac{9}{4}x + c$ 相交于 A, B 两点，其中点 A 在 x 轴上，点 B 在 y 轴上。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 在抛物线上存在一点 M，使 $\triangle MAB$ 是以 AB 为直角边的直角三角形，求点 M 的坐标；

(3) 如图 2, 点 E 为线段 AB 上一点, $BE=2$, 以 BE 为腰作等腰 $Rt\triangle BDE$, 使它与 $\triangle AOB$ 在直线 AB 的同侧, $\angle BED=90^\circ$, $\triangle BDE$ 沿着 BA 方向以每秒一个单位的速度运动, 当点 B 与 A 重合时停止运动, 设运动时间为 t 秒, $\triangle BDE$ 与 $\triangle AOB$ 重叠部分的面积为 S , 直接写出 S 关于 t 的函数关系式, 并写出自变量 t 的取值范围.



考点: 二次函数综合题.

专题: 综合题.

分析: (1) 根据直线解析式, 求出 A 与 B 的坐标, 代入抛物线解析式求出 a 与 c 的值, 即可确定出抛物线解析式;

(2) 由 M 在抛物线图象上, 设出 M 坐标, 分两种情况考虑: ①当 $\angle MBA=90^\circ$ 时; ②当 $\angle BAM'=90^\circ$ 时, 分别求出 M 坐标即可;

(3) 根据 t 的范围, 分三种情况考虑: 当 $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ 时; 当 $\frac{1}{3} \leq t \leq 3$ 时; 当 $3 \leq t \leq 5$ 时, 分别确定出 S 与 t 的函数解析式即可.

解答: 解: (1) 对于直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$,

当 $y=0$ 时, $0 = -\frac{3}{4}x + 3$, 即 $x=4$,

$\therefore A(4, 0)$,

当 $x=0$ 时, $y=3$, 即 $B(0, 3)$,

把 A 与 B 坐标代入 $y = ax^2 + \frac{9}{4}x + c$ 中, 得:
$$\begin{cases} 16a + 9 + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ c = 3 \end{cases}$$

则抛物线解析式为 $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3$; "

(2) 设 M 坐标为 $(x, -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3)$,

①当 $\angle MBA = 90^\circ$ 时, 如图 1, 作 $MN \perp y$ 轴, 则有 $\angle MNO = 90^\circ$,

$$\therefore \angle NMB + \angle MBN = 90^\circ,$$

$$\because \angle MBN + \angle ABM + \angle ABO = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle MBN + \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NMB = \angle ABO,$$

$$\because \angle MNO = \angle BOA,$$

$$\therefore \triangle MNB \sim \triangle BOA,$$

$$\therefore \frac{MN}{BO} = \frac{BN}{AO},$$

$$\text{即 } \frac{x}{3} = \frac{-\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3 - 3}{4},$$

$$\text{解得: } x = \frac{11}{9} \text{ 或 } x = 0 \text{ (舍去),}$$

$$\text{当 } x = \frac{11}{9} \text{ 时, } y = \frac{125}{27}, \text{ 即 } M \left(\frac{11}{9}, \frac{125}{27} \right);$$

$$\text{②当 } \angle BAM' = 90^\circ \text{ 时, 易知 } \triangle AM'N' \sim \triangle BAO, \therefore \frac{AN'}{BO} = \frac{M'N'}{AO},$$

$$\text{即 } \frac{4-x}{3} = \frac{\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x - 3}{4}, \text{ 解得 } x = -\frac{25}{9} \text{ 或 } 4 \text{ (舍去), 当 } x = -\frac{25}{9} \text{ 时, } y = -\frac{244}{27},$$

$$\text{即 } M' \left(-\frac{25}{9}, -\frac{244}{27} \right),$$

$$\text{则满足条件 M 的坐标为 } \left(\frac{11}{9}, \frac{125}{27} \right) \text{ 或 } \left(-\frac{25}{9}, -\frac{244}{27} \right);$$

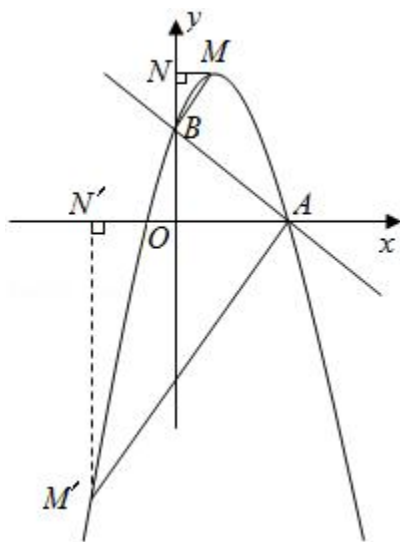
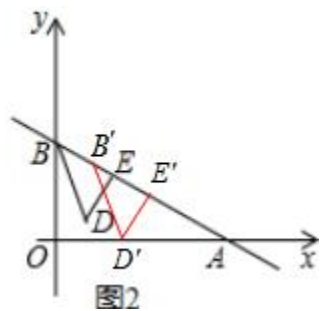
(3) 如图 2 所示, 当 D 点运动到 x 轴上时, 易知 $\triangle AD'E' \sim \triangle ABO$,

$$\therefore \frac{AE'}{AO} = \frac{D'E'}{BO}, \therefore AE' = \frac{8}{3}, \therefore EE' = AB - BE - AE' = 5 - 2 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{当 } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \text{ 时, } S = 2;$$

$$\text{当 } \frac{1}{3} \leq t \leq 3 \text{ 时, } S = -\frac{9}{56}t^2 + \frac{3}{28}t + \frac{111}{56};$$

$$\text{当 } 3 \leq t \leq 5 \text{ 时, } S = \frac{3}{14}t^2 - \frac{15}{7}t + \frac{75}{14}.$$



点评： 此题属于二次函数综合题，涉及的知识有：一次函数与坐标轴的交点，待定系数法确定抛物线解析式，相似三角形的判定与性质，利用了分类讨论的思想，熟练掌握二次函数的性质是解本题的关键.