

2015 年辽宁省丹东市中考数学试卷

一、选择题（下列各题的备选答案中，只有一个是正确的.每小题 3 分，共 24 分）

1. (3 分) (2015•丹东) -2015 的绝对值是 ()

- A. -2015 B. 2015 C. $\frac{1}{2015}$ D. $-\frac{1}{2015}$

2. (3 分) (2015•丹东) 据统计, 2015 年在“情系桃源, 好运丹东”的鸭绿江桃花观赏活动中, 6 天内参与人次达 27.8 万. 用科学记数法将 27.8 万表示为 ()

- A. 2.78×10^6 B. 27.8×10^6 C. 2.78×10^5 D. 27.8×10^5

3. (3 分) (2015•丹东) 如图, 是某几何体的俯视图, 该几何体可能是 ()



- A. 圆柱 B. 圆锥 C. 球 D. 正方体

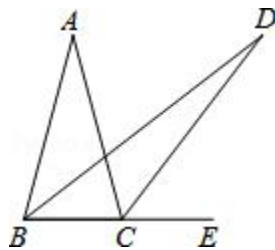
4. (3 分) (2015•丹东) 如果一组数据 2, 4, x , 3, 5 的众数是 4, 那么该组数据的平均数是 ()

- A. 5.2 B. 4.6 C. 4 D. 3.6

5. (3 分) (2015•丹东) 下列计算正确的是 ()

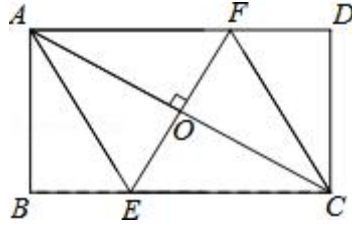
- A. $2a+a=3a^2$ B. $4^{-2}=-\frac{1}{16}$ C. $\sqrt{9}=\pm 3$ D. $(a^3)^2=a^6$

6. (3 分) (2015•丹东) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle A=30^\circ$, E 为 BC 延长线上一点, $\angle ABC$ 与 $\angle ACE$ 的平分线相交于点 D , 则 $\angle D$ 的度数为 ()



- A. 15° B. 17.5° C. 20° D. 22.5°

7. (3 分) (2015•丹东) 过矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点 O 作 $EF \perp AC$, 交 BC 边于点 E , 交 AD 边于点 F , 分别连接 AE 、 CF . 若 $AB=\sqrt{3}$, $\angle DCF=30^\circ$, 则 EF 的长为 ()



- A. 2 B. 3 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

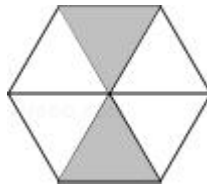
8. (3分) (2015•丹东) 一次函数 $y = -x + a - 3$ (a 为常数) 与反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 的图象交于

A 、 B 两点, 当 A 、 B 两点关于原点对称时 a 的值是 ()

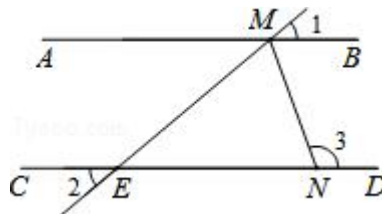
- A. 0 B. -3 C. 3 D. 4

二、填空题 (每小题 3 分, 共 24 分)

9. (3分) (2015•丹东) 如图, 正六边形卡片被分成六个全等的正三角形. 若向该六边形内投掷飞镖, 则飞镖落在阴影区域的概率为_____.



10. (3分) (2015•丹东) 如图, $\angle 1 = \angle 2 = 40^\circ$, MN 平分 $\angle EMB$, 则 $\angle 3 =$ _____ $^\circ$.



11. (3分) (2015•丹东) 分解因式: $3x^2 - 12x + 12 =$ _____.

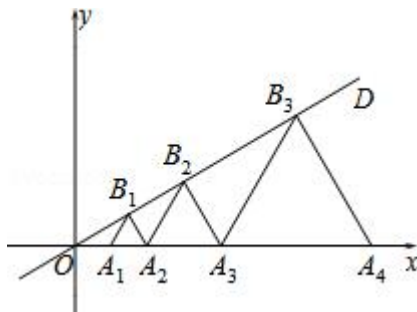
12. (3分) (2015•丹东) 若 $a < \sqrt{6} < b$, 且 a 、 b 是两个连续的整数, 则 $a^b =$ _____.

13. (3分) (2015•丹东) 不等式组 $\begin{cases} -2x+3 < 5 \\ 3x-2 < 1 \end{cases}$ 的解集为_____.

14. (3分) (2015•丹东) 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 的长分别是 6 和 8, 则菱形的周长是_____.

15. (3分) (2015•丹东) 若 $x=1$ 是一元二次方程 $x^2 + 2x + a = 0$ 的一个根, 那么 $a =$ _____.

16. (3 分) (2015•丹东) 如图, 直线 OD 与 x 轴所夹的锐角为 30° , OA_1 的长为 1, $\triangle A_1A_2B_1$ 、 $\triangle A_2A_3B_2$ 、 $\triangle A_3A_4B_3$... $\triangle A_nA_{n+1}B_n$ 均为等边三角形, 点 A_1 、 A_2 、 A_3 ... A_{n+1} 在 x 轴的正半轴上依次排列, 点 B_1 、 B_2 、 B_3 ... B_n 在直线 OD 上依次排列, 那么点 B_n 的坐标为_____.



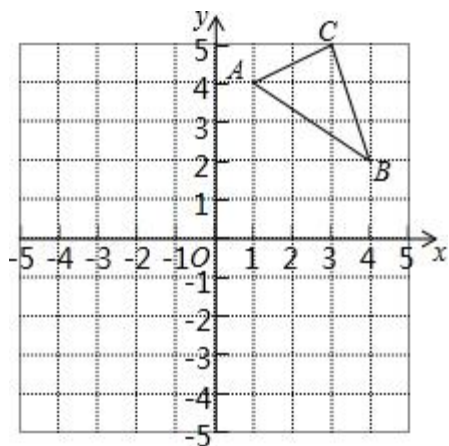
三、解答题 (每小题 8 分, 共 16 分)

17. (8 分) (2015•丹东) 先化简, 再求值: $(1 - \frac{1}{a+2}) \div \frac{a^2 - 1}{a+2}$, 其中 $a=3$.

18. (8 分) (2015•丹东) 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为 $A(1, 4)$, $B(4, 2)$, $C(3, 5)$ (每个方格的边长均为 1 个单位长度).

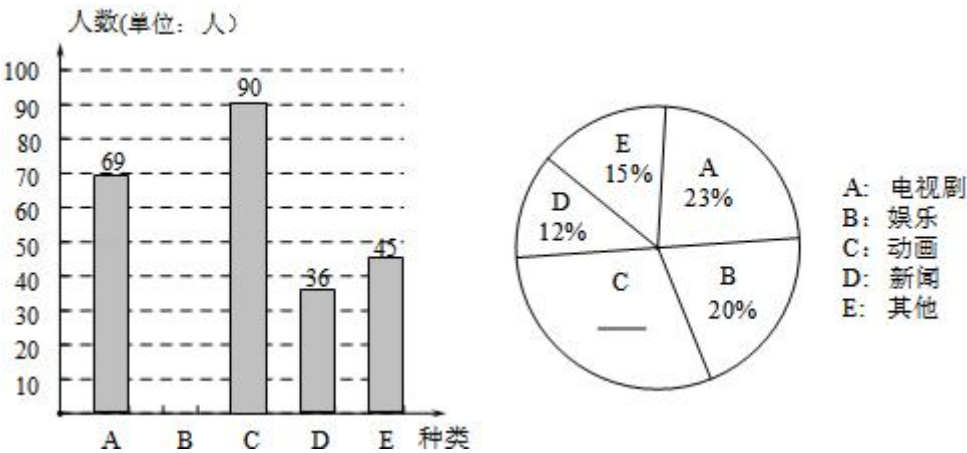
(1) 请画出 $\triangle A_1B_1C_1$, 使 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 关于 x 轴对称;

(2) 将 $\triangle ABC$ 绕点 O 逆时针旋转 90° , 画出旋转后得到的 $\triangle A_2B_2C_2$, 并直接写出点 B 旋转到点 B_2 所经过的路径长.



19. (10 分) (2015•丹东) 某中学数学兴趣小组为了解本校学生对电视节目的喜爱情况, 随机调查了部分学生最喜爱哪一类节目 (被调查的学生只选一类并且没有不选择的), 并将调查结果制成了如下的两个统计图 (不完整). 请你根据图中所提供的信息, 完成下列问题:

- (1) 求本次调查的学生人数;
- (2) 请将两个统计图补充完整, 并求出新闻节目在扇形统计图中所占圆心角的度数;
- (3) 若该中学有 2000 名学生, 请估计该校喜爱电视剧节目的人数.



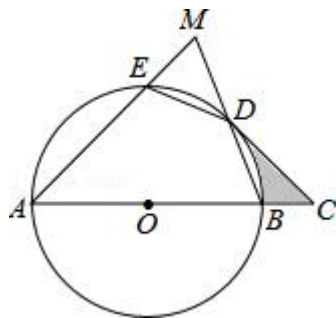
20. (10 分) (2015•丹东) 从甲市到乙市乘坐高速列车的路程为 180 千米, 乘坐普通列车的路程为 240 千米. 高速列车的平均速度是普通列车的平均速度的 3 倍. 高速列车的乘车时间比普通列车的乘车时间缩短了 2 小时. 高速列车的平均速度是每小时多少千米?

21. (10 分) (2015•丹东) 一个不透明的口袋中装有 4 个分别标有数字 -1 , -2 , 3 , 4 的小球, 它们的形状、大小完全相同. 小红先从口袋中随机摸出一个小球记下数字为 x ; 小颖在剩下的 3 个小球中随机摸出一个小球记下数字为 y .

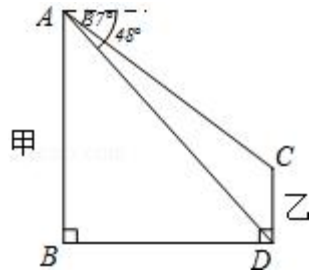
- (1) 小红摸出标有数字 3 的小球的概率是_____;
- (2) 请用列表法或画树状图的方法表示出由 x , y 确定的点 $P(x, y)$ 所有可能的结果;
- (3) 若规定: 点 $P(x, y)$ 在第一象限或第三象限小红获胜; 点 $P(x, y)$ 在第二象限或第四象限则小颖获胜. 请分别求出两人获胜的概率.

22. (10 分) (2015•丹东) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $\widehat{ED} = \widehat{BD}$, 连接 ED 、 BD , 延长 AE 交 BD 的延长线于点 M , 过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于点 C .

- (1) 若 $OA = CD = 2\sqrt{2}$, 求阴影部分的面积;
- (2) 求证: $DE = DM$.



23. (10 分) (2015•丹东) 如图, 线段 AB , CD 表示甲、乙两幢居民楼的高, 两楼间的距离 BD 是 60 米. 某人站在 A 处测得 C 点的俯角为 37° , D 点的俯角为 48° (人的身高忽略不计), 求乙楼的高度 CD . (参考数据: $\sin 37^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\tan 37^\circ \approx \frac{3}{4}$, $\sin 48^\circ \approx \frac{7}{10}$, $\tan 48^\circ \approx \frac{11}{10}$)



24. (10 分) (2015•丹东) 某商店购进一种商品, 每件商品进价 30 元. 试销中发现这种商品每天的销售量 y (件) 与每件销售价 x (元) 的关系数据如下:

x 30 32 34 36

y 40 36 32 28

(1) 已知 y 与 x 满足一次函数关系, 根据上表, 求出 y 与 x 之间的关系式 (不写出自变量 x 的取值范围);

(2) 如果商店销售这种商品, 每天要获得 150 元利润, 那么每件商品的销售价应定为多少元?

(3) 设该商店每天销售这种商品所获利润为 w (元), 求出 w 与 x 之间的关系式, 并求出每件商品销售价定为多少元时利润最大?

25. (12 分) (2015•丹东) 在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O ; 在 $Rt\triangle PMN$ 中, $\angle MPN=90^\circ$.

(1) 如图 1, 若点 P 与点 O 重合且 $PM \perp AD$ 、 $PN \perp AB$, 分别交 AD 、 AB 于点 E 、 F , 请直接写出 PE 与 PF 的数量关系;

(2) 将图 1 中的 $Rt\triangle PMN$ 绕点 O 顺时针旋转角度 α ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$).

①如图 2, 在旋转过程中 (1) 中的结论依然成立吗? 若成立, 请证明; 若不成立, 请说明理由;

②如图 2, 在旋转过程中, 当 $\angle DOM=15^\circ$ 时, 连接 EF , 若正方形的边长为 2, 请直接写出线段 EF 的长;

③如图 3, 旋转后, 若 $Rt\triangle PMN$ 的顶点 P 在线段 OB 上移动 (不与点 O 、 B 重合), 当 $BD=3BP$ 时, 猜想此时 PE 与 PF 的数量关系, 并给出证明; 当 $BD=m \cdot BP$ 时, 请直接写出 PE 与 PF 的数量关系.

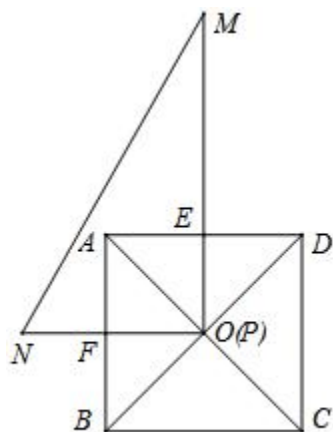


图 1

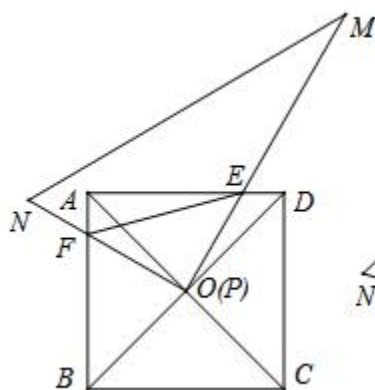


图 2

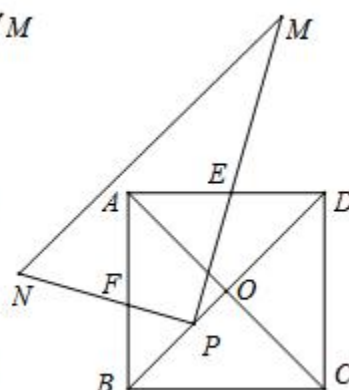


图 3

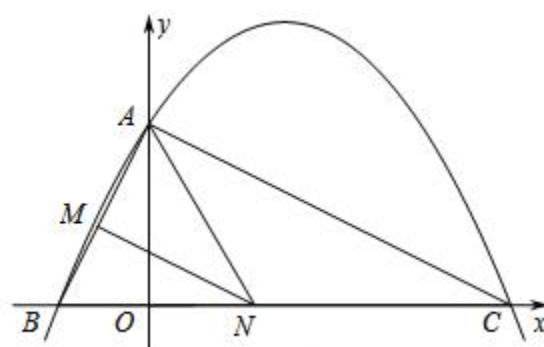
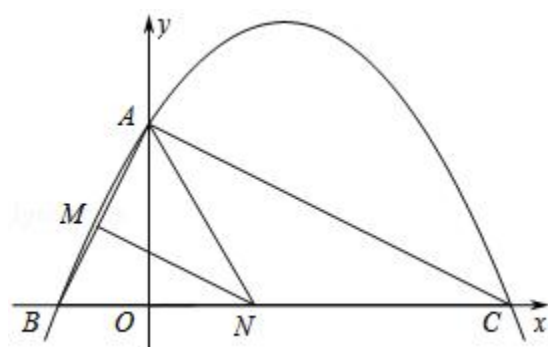
26. (14 分) (2015•丹东) 如图, 已知二次函数 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 的图象与 y 轴交于点 $A(0, 4)$, 与 x 轴交于点 B 、 C , 点 C 坐标为 $(8, 0)$, 连接 AB 、 AC .

(1) 请直接写出二次函数 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 的表达式;

(2) 判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由;

(3) 若点 N 在 x 轴上运动, 当以点 A 、 N 、 C 为顶点的三角形是等腰三角形时, 请直接写出此时点 N 的坐标;

(4) 若点 N 在线段 BC 上运动 (不与点 B 、 C 重合), 过点 N 作 $NM \parallel AC$, 交 AB 于点 M , 当 $\triangle AMN$ 面积最大时, 求此时点 N 的坐标.



备用图

2015 年辽宁省丹东市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（下列各题的备选答案中，只有一个是正确的.每小题 3 分，共 24 分）

1. (3 分) (2015•丹东) -2015 的绝对值是 ()

- A. -2015 B. 2015 C. $\frac{1}{2015}$ D. $-\frac{1}{2015}$

考点：绝对值.

分析：根据相反数的意义，求解即可. 注意正数的绝对值是本身，0 的绝对值为 0，负数的绝对值是其相反数.

解答：解：∵ -2015 的绝对值等于其相反数，

∴ -2015 的绝对值是 2015；

故答案为：2015.

点评：此题考查了绝对值的知识，掌握绝对值的意义是本题的关键，解题时要细心.

2. (3 分) (2015•丹东) 据统计，2015 年在“情系桃源，好运丹东”的鸭绿江桃花观赏活动中，6 天内参与人次达 27.8 万. 用科学记数法将 27.8 万表示为 ()

- A. 2.78×10^6 B. 27.8×10^6 C. 2.78×10^5 D. 27.8×10^5

考点：科学记数法—表示较大的数.

分析：科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

解答：解：将 27.8 万用科学记数法表示为 2.78×10^5 .

故选：C.

点评：此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3 分) (2015•丹东) 如图，是某几何体的俯视图，该几何体可能是 ()



A. 圆柱 B. 圆锥 C. 球 D. 正方体

考点：由三视图判断几何体.

分析：根据几何体的俯视图是从上面看，所得到的图形分别写出各个几何体的俯视图判断即可.

解答：解：圆柱的俯视图是圆，*A* 错误；

圆锥的俯视图是圆，且中心由一个实点，*B* 正确；

球的俯视图是圆，*C* 错误；

正方体的俯视图是正方形，*D* 错误.

故选：B.

点评： 本题考查了三视图的概念，掌握主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看，所得到的图形是解题的关键.

4. (3 分) (2015•丹东) 如果一组数据 2, 4, x , 3, 5 的众数是 4, 那么该组数据的平均数是 ()

A. 5.2 B. 4.6 C. 4 D. 3.6

考点：算术平均数；众数.

分析：根据这组数据的众数是 4, 求出 x 的值, 根据平均数的公式求出平均数.

解答：解：∵这组数据的众数是 4,

∴ $x=4$,

$$\bar{x} = \frac{1}{5} (2+4+4+3+5) = 3.6.$$

故选：D.

点评： 本题考查的是平均数的计算公式和众数的概念，掌握平均数的计算公式和众数的确定方法是解题的关键.

5. (3 分) (2015•丹东) 下列计算正确的是 ()

A. $2a+a=3a^2$ B. $4^{-2}=-\frac{1}{16}$ C. $\sqrt{9}=\pm 3$ D. $(a^3)^2=a^6$

考点： 幂的乘方与积的乘方；算术平方根；合并同类项；负整数指数幂.

分析： A 、依据合并同类项法则计算即可； B 、根据负整数指数幂的法则计算即可； C 、根据算术平方根的定义可做出判断； D 、依据幂的乘方的运算法则进行计算即可.

解答： 解： A 、 $2a+a=3a$ ，故 A 错误；

B 、 $4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$ ，故 B 错误；

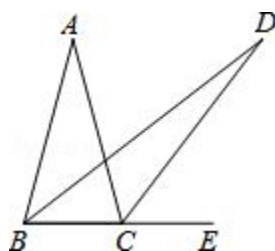
C 、 $\sqrt{9}=3$ ，故 C 错误；

D 、 $(a^3)^2=a^{3 \times 2}=a^6$ ，故 D 正确.

故选： D .

点评： 本题主要考查的是数与式的计算，掌握合并同类项、负整数指数幂、算术平方根以及幂的乘方的运算法则是解题的关键.

6. (3 分) (2015•丹东) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle A=30^\circ$ ， E 为 BC 延长线上一点， $\angle ABC$ 与 $\angle ACE$ 的平分线相交于点 D ，则 $\angle D$ 的度数为 ()



A. 15° B. 17.5° C. 20° D. 22.5°

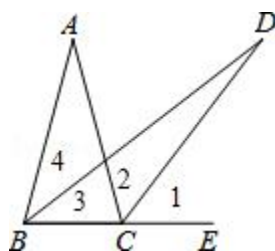
考点： 等腰三角形的性质.

分析： 先根据角平分线的定义得到 $\angle 1=\angle 2$ ， $\angle 3=\angle 4$ ，再根据三角形外角性质得

$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4+\angle A$ ， $\angle 1=\angle 3+\angle D$ ，则 $2\angle 1=2\angle 3+\angle A$ ，利用等式的性质得到 $\angle D=\frac{1}{2}\angle A$ ，

然后把 $\angle A$ 的度数代入计算即可.

解答： 解： $\because \angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACE$ 的平分线交于点 D ，



$\therefore \angle 1=\angle 2$ ， $\angle 3=\angle 4$ ，

$$\because \angle ACE = \angle A + \angle ABC,$$

$$\text{即 } \angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4 + \angle A,$$

$$\therefore 2\angle 1 = 2\angle 3 + \angle A,$$

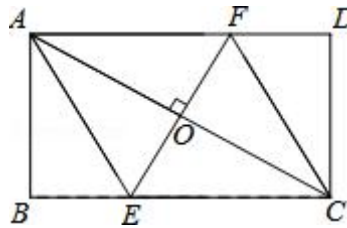
$$\because \angle 1 = \angle 3 + \angle D,$$

$$\therefore \angle D = \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ.$$

故选 A.

点评： 本题考查了三角形内角和定理，关键是根据三角形内角和是 180° 和三角形外角性质进行分析.

7. (3 分) (2015•丹东) 过矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点 O 作 $EF \perp AC$, 交 BC 边于点 E , 交 AD 边于点 F , 分别连接 AE 、 CF . 若 $AB = \sqrt{3}$, $\angle DCF = 30^\circ$, 则 EF 的长为 ()



- A. 2 B. 3 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

考点： 菱形的判定与性质；矩形的性质.

分析： 求出 $\angle ACB = \angle DAC$, 然后利用“角角边”证明 $\triangle AOF$ 和 $\triangle COE$ 全等, 根据全等三角形对应边相等可得 $OE = OF$, 再根据对角线互相垂直平分的四边形是菱形得到四边形 $AECF$ 是菱形, 再求出 $\angle ECF = 60^\circ$, 然后判断出 $\triangle CEF$ 是等边三角形, 根据等边三角形的三条边都相等可得 $EF = CF$, 根据矩形的对边相等可得 $CD = AB$, 然后求出 CF , 从而得解.

解答： 解: $\because$ 矩形对边 $AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle ACB = \angle DAC,$$

$\because O$ 是 AC 的中点,

$$\therefore AO = CO,$$

$$\text{在 } \triangle AOF \text{ 和 } \triangle COE \text{ 中, } \begin{cases} \angle ACB = \angle DAC \\ AO = CO \\ \angle AOF = \angle COE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOF \cong \triangle COE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore OE = OF,$$

又 $\because EF \perp AC$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形,

$\because \angle DCF = 30^\circ$,

$\therefore \angle ECF = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,

$\therefore \triangle CEF$ 是等边三角形,

$\therefore EF = CF$,

$\because AB = \sqrt{3}$,

$\therefore CD = AB = \sqrt{3}$,

$\because \angle DCF = 30^\circ$,

$\therefore CF = \sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$,

$\therefore EF = 2$.

故选 A.

点评: 本题考查了菱形的判定与性质, 矩形的性质, 全等三角形的判定与性质, 等边三角形的判定与性质, 难点在于判断出 $\triangle CEF$ 是等边三角形.

8. (3 分) (2015•丹东) 一次函数 $y = -x + a - 3$ (a 为常数) 与反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 的图象交于

A 、 B 两点, 当 A 、 B 两点关于原点对称时 a 的值是 ()

A. 0 B. -3 C. 3 D. 4

考点: 反比例函数与一次函数的交点问题; 关于原点对称的点的坐标.

专题: 计算题.

分析: 设 $A(t, -\frac{4}{t})$, 根据关于原点对称的点的坐标特征得 $B(-t, \frac{4}{t})$, 然后把 $A(t, -\frac{4}{t})$, $B(-t, \frac{4}{t})$ 分别代入 $y = -x + a - 3$ 得 $-\frac{4}{t} = -t + a - 3$, $\frac{4}{t} = t + a - 3$, 两式相加消去 t 得 $2a - 6 = 0$, 再解关于 a 的一次方程即可.

解答: 解: 设 $A(t, -\frac{4}{t})$,

$\because A$ 、 B 两点关于原点对称,

$\therefore B(-t, \frac{4}{t})$,

把 $A(t, -\frac{4}{t})$, $B(-t, \frac{4}{t})$ 分别代入 $y = -x + a - 3$ 得 $-\frac{4}{t} = -t + a - 3$, $\frac{4}{t} = t + a - 3$,

两式相加得 $2a - 6 = 0$,

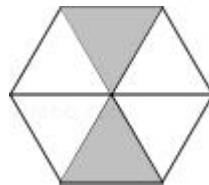
$\therefore a = 3$.

故选 C.

点评: 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题: 求反比例函数与一次函数的交点坐标, 把两个函数关系式联立成方程组求解, 若方程组有解则两者有交点, 方程组无解, 则两者无交点.

二、填空题 (每小题 3 分, 共 24 分)

9. (3 分) (2015•丹东) 如图, 正六边形卡片被分成六个全等的正三角形. 若向该六边形内投掷飞镖, 则飞镖落在阴影区域的概率为 $\frac{1}{3}$.



考点: 几何概率.

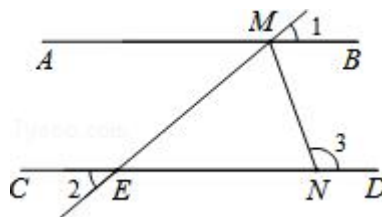
分析: 确定阴影部分的面积在整个转盘中占的比例, 根据这个比例即可求出飞镖落在阴影区域的概率.

解答: 解: 如图: 转动转盘被均匀分成 6 部分, 阴影部分占 2 份, 飞镖落在阴影区域的概率是 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;

故答案为: $\frac{1}{3}$.

点评: 本题考查了几何概率. 用到的知识点为: 概率 = 相应的面积与总面积之比.

10. (3 分) (2015•丹东) 如图, $\angle 1 = \angle 2 = 40^\circ$, MN 平分 $\angle EMB$, 则 $\angle 3 = 110^\circ$.



考点: 平行线的判定与性质.

分析： 根据对顶角相等得出 $\angle 2 = \angle MEN$ ，利用同位角相等，两直线平行得出 $AB \parallel CD$ ，再利用平行线的性质解答即可.

解答： 解： $\because \angle 2 = \angle MEN$ ， $\angle 1 = \angle 2 = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle 1 = \angle MEN,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle 3 + \angle BMN = 180^\circ,$$

$\because MN$ 平分 $\angle EMB$,

$$\therefore \angle BMN = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

故答案为：110.

点评： 本题考查了平行线的性质，角平分线的定义，是基础题，熟记性质并准确识图是解题的关键.

11. (3 分) (2015•丹东) 分解因式： $3x^2 - 12x + 12 = \underline{3(x-2)^2}$.

考点： 提公因式法与公式法的综合运用.

专题： 计算题.

分析： 原式提取 3 后，利用完全平方公式分解即可.

解答： 解：原式 $= 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x-2)^2$,

故答案为： $3(x-2)^2$

点评： 此题考查了提公因式法与公式法的综合运用，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

12. (3 分) (2015•丹东) 若 $a < \sqrt{6} < b$ ，且 a 、 b 是两个连续的整数，则 $a^b = \underline{8}$.

考点： 估算无理数的大小.

分析： 先估算出 $\sqrt{6}$ 的范围，即可得出 a 、 b 的值，代入求出即可.

解答： 解： $\because 2 < \sqrt{6} < 3$,

$$\therefore a = 2, b = 3,$$

$$\therefore a^b = 8.$$

故答案为：8.

点评： 本题考查了估算无理数的大小的应用，解此题的关键是求出 $\sqrt{6}$ 的范围.

13. (3 分) (2015•丹东) 不等式组 $\begin{cases} -2x+3 < 5 \\ 3x-2 < 1 \end{cases}$ 的解集为 $-1 < x < 1$.

考点： 解一元一次不等式组.

分析： 先求出两个不等式的解集，再求其公共解.

解答： 解： $\begin{cases} -2x+3 < 5 \text{ ①} \\ 3x-2 < 1 \text{ ②} \end{cases}$,

由①得， $x > -1$,

由②得， $x < 1$.

所以，不等式组的解集为 $-1 < x < 1$.

故答案为 $-1 < x < 1$.

点评： 本题主要考查了一元一次不等式组解集的求法，其简便求法就是用口诀求解. 求不等式组解集的口诀：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）.

14. (3 分) (2015•丹东) 在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 的长分别是 6 和 8，则菱形的周长是 20 .

考点： 菱形的性质.

专题： 计算题.

分析： AC 与 BD 相交于点 O ，如图，根据菱形的性质得 $AC \perp BD$ ， $OD=OB=\frac{1}{2}BD=4$ ，

$OA=OC=\frac{1}{2}AC=3$ ， $AB=BC=CD=AD$ ，则可在 $Rt\triangle AOD$ 中，根据勾股定理计算出 $AD=5$ ，于是

可得菱形 $ABCD$ 的周长为 20.

解答： 解： AC 与 BD 相交于点 O ，如图，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

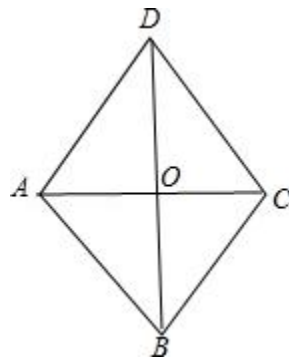
$\therefore AC \perp BD$ ， $OD=OB=\frac{1}{2}BD=4$ ， $OA=OC=\frac{1}{2}AC=3$ ， $AB=BC=CD=AD$ ，

在 $Rt\triangle AOD$ 中， $\because OA=3$ ， $OB=4$ ，

$\therefore AD=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ，

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的周长 $=4 \times 5=20$.

故答案为 20.



点评： 本题考查了菱形的性质：菱形具有平行四边形的一切性质；菱形的四条边都相等；菱形的两条对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角；菱形是轴对称图形，它有 2 条对称轴，分别是两条对角线所在直线.

15. (3 分) (2015•丹东) 若 $x=1$ 是一元二次方程 $x^2+2x+a=0$ 的一个根，那么 $a=$ -3.

考点： 一元二次方程的解.

分析： 根据方程的根的定义将 $x=1$ 代入方程得到关于 a 的方程，然后解得 a 的值即可.

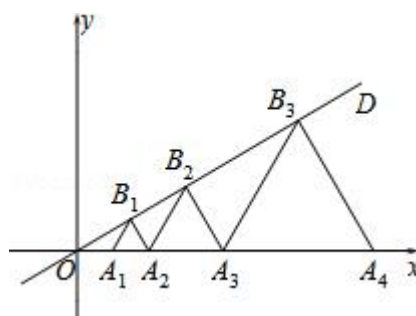
解答： 解：将 $x=1$ 代入得： $1+2+a=0$,

解得： $a=-3$.

故答案为： -3.

点评： 本题主要考查的是方程的解（根）的定义和一元一次方程的解法，将方程的解代入方程是解题的关键.

16. (3 分) (2015•丹东) 如图，直线 OD 与 x 轴所夹的锐角为 30° ， OA_1 的长为 1， $\triangle A_1A_2B_1$ 、 $\triangle A_2A_3B_2$ 、 $\triangle A_3A_4B_3$... $\triangle A_nA_{n+1}B_n$ 均为等边三角形，点 A_1 、 A_2 、 A_3 ... A_{n+1} 在 x 轴的正半轴上依次排列，点 B_1 、 B_2 、 B_3 ... B_n 在直线 OD 上依次排列，那么点 B_n 的坐标为 $(3 \times 2^{n-2}, \sqrt{3} \times 2^{n-2})$.



考点：一次函数图象上点的坐标特征；等边三角形的性质.

专题：规律型.

分析：根据等边三角形的性质和 $\angle B_1OA_2=30^\circ$ ，可求得 $\angle B_1OA_2=\angle A_1B_1O=30^\circ$ ，可求得 $OA_2=2OA_1=2$ ，同理可求得 $OA_n=2^{n-1}$ ，再结合含 30° 角的直角三角形的性质可求得 $\triangle A_nB_nA_{n+1}$ 的边长，进一步可求得点 B_n 的坐标.

解答：解： $\because \triangle A_1B_1A_2$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle B_1A_1A_2=60^\circ,$$

$$\therefore \angle B_1OA_2=30^\circ,$$

$$\therefore \angle B_1OA_2=\angle A_1B_1O=30^\circ, \text{ 可求得 } OA_2=2OA_1=2,$$

同理可求得 $OA_n=2^{n-1}$,

$$\therefore \angle B_nOA_{n+1}=30^\circ, \angle B_nA_nA_{n+1}=60^\circ,$$

$$\therefore \angle B_nOA_{n+1}=\angle OB_nA_n=30^\circ$$

$$\therefore B_nA_n=OA_n=2^{n-1},$$

即 $\triangle A_nB_nA_{n+1}$ 的边长为 2^{n-1} ，则可求得其高为 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2^{n-1} = \sqrt{3} \times 2^{n-2}$,

$$\therefore \text{点 } B_n \text{ 的横坐标为 } \frac{1}{2} \times 2^{n-1} + 2^{n-1} = \frac{3}{2} \times 2^{n-1} = 3 \times 2^{n-2},$$

$$\therefore \text{点 } B_n \text{ 的坐标为 } (3 \times 2^{n-2}, \sqrt{3} \times 2^{n-2}).$$

故答案为 $(3 \times 2^{n-2}, \sqrt{3} \times 2^{n-2})$.

点评：本题主要考查等边三角形的性质和含 30° 角的直角三角形的性质，根据条件找到等边三角形的边长和 OA_1 的关系是解题的关键.

三、解答题（每小题 8 分，共 16 分）

17. (8 分) (2015•丹东) 先化简，再求值： $(1 - \frac{1}{a+2}) \div \frac{a^2-1}{a+2}$ ，其中 $a=3$.

考点：分式的化简求值.

分析：先计算括号里面的，再把分子、分母因式分解，约分即可，把 $a=3$ 代入计算即可.

$$\begin{aligned} \text{解答： 解：原式} &= \frac{a+1}{a+2} \times \frac{a+2}{(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{1}{a-1}, \end{aligned}$$

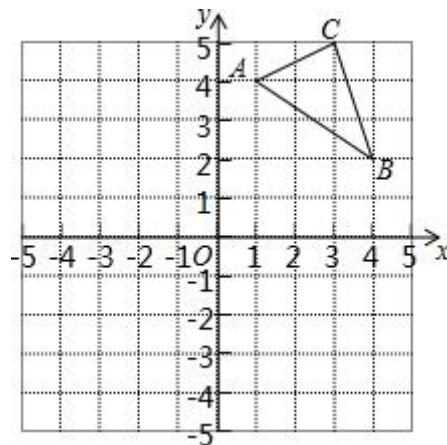
$$\text{当 } a=3 \text{ 时，原式} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}.$$

点评： 本题考查了分式的化简求值，解答此题的关键是把分式化到最简，然后代值计算.

18. (8 分) (2015•丹东) 如图，在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为 $A(1, 4)$ ， $B(4, 2)$ ， $C(3, 5)$ (每个方格的边长均为 1 个单位长度).

(1) 请画出 $\triangle A_1B_1C_1$ ，使 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 关于 x 轴对称；

(2) 将 $\triangle ABC$ 绕点 O 逆时针旋转 90° ，画出旋转后得到的 $\triangle A_2B_2C_2$ ，并直接写出点 B 旋转到点 B_2 所经过的路径长.



考点： 作图-旋转变换；作图-轴对称变换.

分析： (1) 根据网格特点，找出点 A 、 B 、 C 关于 x 轴的对称点 A_1 、 B_1 、 C_1 的位置，然后顺次连接即可；

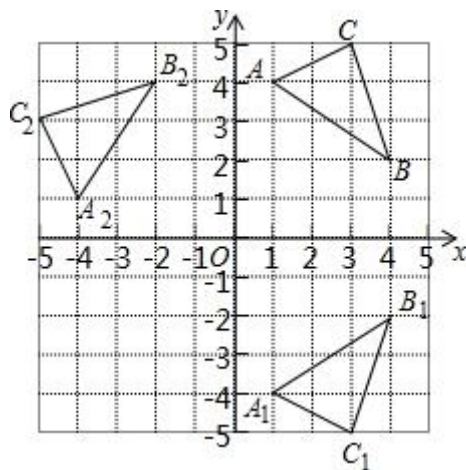
(2) 分别找出点 A 、 B 、 C 绕点 O 逆时针旋转 90° 的对应点 A_2 、 B_2 、 C_2 的位置，然后顺次连接即可，观察可知点 B 所经过的路线是半径为 $\sqrt{4^2+2^2}$ ，圆心角是 90° 的扇形，然后根据弧长公式进行计算即可求解.

解答： 解：(1) 如图， $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.

(2) 如图， $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.

点 B 旋转到点 B_2 所经过的路径长为：
$$\frac{90\pi\sqrt{4^2+2^2}}{180} = \sqrt{5}\pi.$$

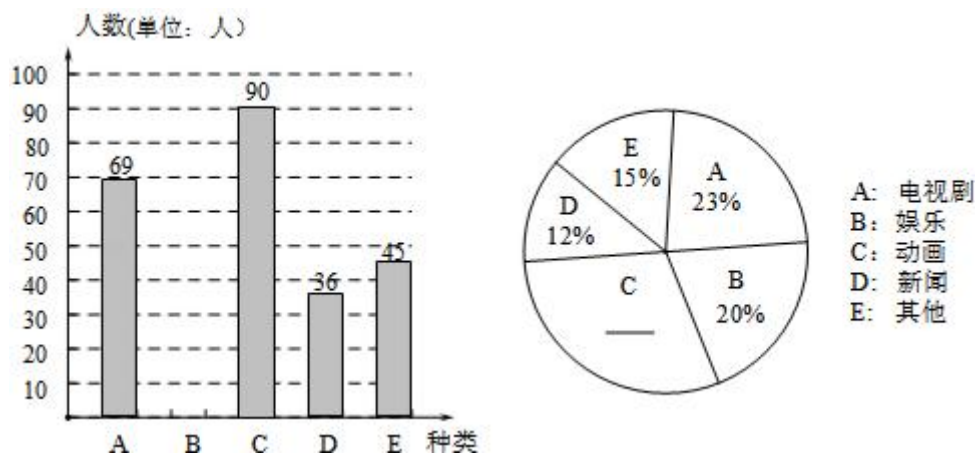
故点 B 旋转到点 B_2 所经过的路径长是 $\sqrt{5}\pi$.



点评： 本题综合考查了利用对称变换作图，利用旋转变换作图，熟知网格结构特点找出变换后的对应点的位置是解题的关键.

19. (10 分) (2015•丹东) 某中学数学兴趣小组为了解本校学生对电视节目的喜爱情况，随机调查了部分学生最喜爱哪一类节目（被调查的学生只选一类并且没有不选择的），并将调查结果制成了如下的两个统计图（不完整）. 请你根据图中所提供的信息，完成下列问题：

- (1) 求本次调查的学生人数；
- (2) 请将两个统计图补充完整，并求出新闻节目在扇形统计图中所占圆心角的度数；
- (3) 若该中学有 2000 名学生，请估计该校喜爱电视剧节目的人数.



考点： 条形统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

- 分析：**
- (1) 根据喜爱电视剧的人数是 69 人，占总人数的 23%，即可求得总人数；
 - (2) 根据总人数和喜欢娱乐节目的百分数可求的其人数，补全即可；利用 360° 乘以对应的百分比即可求得圆心角的度数；
 - (3) 利用总人数乘以对应的百分比即可求解.

解答： 解：(1) $69 \div 23\% = 300$ (人)

$\therefore$ 本次共调查 300 人；

(2) $\because$ 喜欢娱乐节目的人数占总人数的 20%，

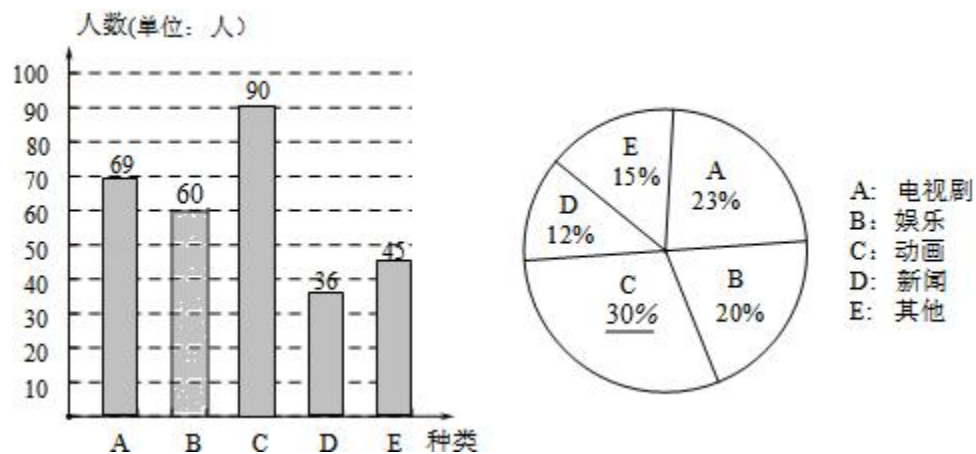
$\therefore 20\% \times 300 = 60$ (人)，补全如图；

$\because 360^\circ \times 12\% = 43.2^\circ$ ，

$\therefore$ 新闻节目在扇形统计图中所占圆心角的度数为 43.2° ；

(3) $2000 \times 23\% = 460$ (人)，

$\therefore$ 估计该校有 460 人喜爱电视剧节目。



点评： 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键。条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小。

20. (10 分) (2015•丹东) 从甲市到乙市乘坐高速列车的路程为 180 千米，乘坐普通列车的路程为 240 千米。高速列车的平均速度是普通列车的平均速度的 3 倍。高速列车的乘车时间比普通列车的乘车时间缩短了 2 小时。高速列车的平均速度是每小时多少千米？

考点： 分式方程的应用。

分析： 设普通列车平均速度每小时 x 千米，则高速列车平均速度每小时 $3x$ 千米，根据题意可得，坐高铁走 180 千米比坐普通车 240 千米少用 2 小时，据此列方程求解。

解答： 解：设普通列车平均速度每小时 x 千米，则高速列车平均速度每小时 $3x$ 千米，

根据题意得， $\frac{240}{x} - \frac{180}{3x} = 2$ ，

解得： $x = 90$ ，

经检验, $x=90$ 是所列方程的根,

则 $3x=3\times 90=270$.

答: 高速列车平均速度为每小时 270 千米.

点评: 本题考查了分式方程的应用, 解答本题的关键是读懂题意, 设出未知数, 找出合适的等量关系, 列方程求解, 注意检验.

21. (10 分) (2015•丹东) 一个不透明的口袋中装有 4 个分别标有数字 -1 , -2 , 3 , 4 的小球, 它们的形状、大小完全相同. 小红先从口袋中随机摸出一个小球记下数字为 x ; 小颖在剩下的 3 个小球中随机摸出一个小球记下数字为 y .

(1) 小红摸出标有数字 3 的小球的概率是 $\frac{1}{4}$;

(2) 请用列表法或画树状图的方法表示出由 x , y 确定的点 $P(x, y)$ 所有可能的结果;

(3) 若规定: 点 $P(x, y)$ 在第一象限或第三象限小红获胜; 点 $P(x, y)$ 在第二象限或第四象限则小颖获胜. 请分别求出两人获胜的概率.

考点: 列表法与树状图法.

专题: 计算题.

分析: (1) 直接根据概率公式求解;

(2) 通过列表展示所有 12 种等可能性的结果数;

(3) 找出在第一象限或第三象限的结果数和第二象限或第四象限的结果数, 然后根据概率公式计算两人获胜的概率.

解答: 解: (1) 小红摸出标有数字 3 的小球的概率是 $\frac{1}{4}$;

故答案为 $\frac{1}{4}$;

(2) 列表如下:

$-1 \quad -2 \quad 3 \quad 4$

$-1 \quad (-1, -2) \quad (-1, 3) \quad (-1, 4)$

$-2 \quad (-2, -1) \quad (-2, 3) \quad (-2, 4)$

$3 \quad (3, -1) \quad (3, -2) \quad (3, 4)$

$4 \quad (4, -1) \quad (4, -2) \quad (4, 3)$

(3) 从上面的表格可以看出, 所有可能出现的结果共有 12 种, 且每种结果出现的可能性相同, 其中点 (x, y) 在第一象限或第三象限的结果有 4 种, 第二象限或第四象限的结果有 8 种,

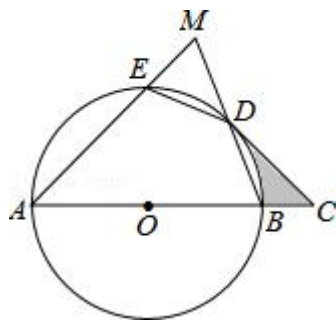
所以小红获胜的概率 $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, 小颖获胜的概率 $= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

点评: 本题考查了列表法或树状图法: 通过列表法或树状图法展示所有等可能的结果求出 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 然后根据概率公式求出事件 A 或 B 的概率.

22. (10 分) (2015•丹东) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $\widehat{ED} = \widehat{BD}$, 连接 ED 、 BD , 延长 AE 交 BD 的延长线于点 M , 过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于点 C .

(1) 若 $OA = CD = 2\sqrt{2}$, 求阴影部分的面积;

(2) 求证: $DE = DM$.



考点: 切线的性质; 扇形面积的计算.

分析: (1) 连接 OD , 根据已知和切线的性质证明 $\triangle OCD$ 为等腰直角三角形, 得到 $\angle DOC = 45^\circ$, 根据 $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle OCD} - S_{\text{扇} OBD}$ 计算即可;

(2) 连接 AD , 根据弦、弧之间的关系证明 $DB = DE$, 证明 $\triangle AMD \cong \triangle ABD$, 得到 $DM = BD$, 得到答案.

解答: (1) 解: 如图, 连接 OD ,

$\because CD$ 是 $\odot O$ 切线,

$\therefore OD \perp CD$,

$\because OA = CD = 2\sqrt{2}$, $OA = OD$,

$\therefore OD = CD = 2\sqrt{2}$,

$\therefore \triangle OCD$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \angle DOC = \angle C = 45^\circ$,

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle OCD} - S_{\text{扇} OBD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} - \frac{45\pi \times (2\sqrt{2})^2}{360} = 4 - \pi;$$

(2) 证明: 如图, 连接 AD ,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 直径,

$\therefore \angle ADB = \angle ADM = 90^\circ$,

又 $\because \widehat{ED} = \widehat{BD}$,

$\therefore ED = BD, \angle MAD = \angle BAD$,

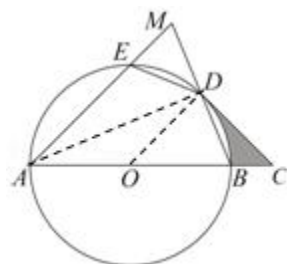
在 $\triangle AMD$ 和 $\triangle ABD$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADM = \angle ADB \\ AD = AD \\ \angle MAD = \angle BAD \end{cases},$$

$\therefore \triangle AMD \cong \triangle ABD$,

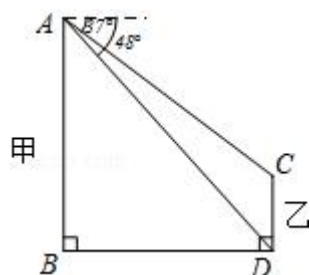
$\therefore DM = BD$,

$\therefore DE = DM$.



点评: 本题考查的是切线的性质、弦、弧之间的关系、扇形面积的计算, 掌握切线的性质定理和扇形的面积公式是解题的关键, 注意辅助线的作法.

23. (10 分) (2015•丹东) 如图, 线段 AB , CD 表示甲、乙两幢居民楼的高, 两楼间的距离 BD 是 60 米. 某人站在 A 处测得 C 点的俯角为 37° , D 点的俯角为 48° (人的身高忽略不计), 求乙楼的高度 CD . (参考数据: $\sin 37^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\tan 37^\circ \approx \frac{3}{4}$, $\sin 48^\circ \approx \frac{7}{10}$, $\tan 48^\circ \approx \frac{11}{10}$)



考点：解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

分析：过点 C 作 $CE \perp AB$ 交 AB 于点 E ，在直角 $\triangle ADB$ 中利用三角函数求得 AB 的长，然后在直角 $\triangle AEC$ 中求得 AE 的长，即可求解.

解答：解：过点 C 作 $CE \perp AB$ 交 AB 于点 E ，
则四边形 $EBDC$ 为矩形，

$$\therefore BE=CD \quad CE=BD=60,$$

如图，根据题意可得，

$$\angle ADB=48^\circ, \quad \angle ACE=37^\circ,$$

$$\therefore \tan 48^\circ = \frac{AB}{BD},$$

在 $Rt\triangle ADB$ 中，

$$\text{则 } AB = \tan 48^\circ \cdot BD \approx \frac{11}{10} \times 60 = 66 \text{ (米)},$$

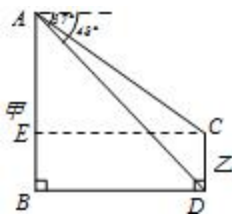
$$\therefore \tan 37^\circ = \frac{AE}{CE},$$

在 $Rt\triangle ACE$ 中，

$$\text{则 } AE = \tan 37^\circ \cdot CE \approx \frac{3}{4} \times 60 = 45 \text{ (米)},$$

$$\therefore CD = BE = AB - AE = 66 - 45 = 21 \text{ (米)},$$

$\therefore$ 乙楼的高度 CD 为 21 米.



点评： 本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，本题要求学生借助俯角构造直角三角形，并结合图形利用三角函数解直角三角形.

24. (10 分) (2015•丹东) 某商店购进一种商品，每件商品进价 30 元. 试销中发现这种商品每天的销售量 y (件) 与每件销售价 x (元) 的关系数据如下：

x 30 32 34 36

y 40 36 32 28

(1) 已知 y 与 x 满足一次函数关系，根据上表，求出 y 与 x 之间的关系式 (不写出自变量 x 的取值范围)；

(2) 如果商店销售这种商品, 每天要获得 150 元利润, 那么每件商品的销售价应定为多少元?

(3) 设该商店每天销售这种商品所获利润为 w (元), 求出 w 与 x 之间的关系式, 并求出每件商品销售价定为多少元时利润最大?

考点: 二次函数的应用.

分析: (1) 根据待定系数法解出解析式即可;

(2) 根据题意列出方程解答即可;

(3) 根据题意列出函数解析式, 利用函数解析式的最值解答即可.

解答: 解: (1) 设该函数的表达式为 $y=kx+b$, 根据题意, 得

$$\begin{cases} 40=30k+b \\ 36=32k+b \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} k=-2 \\ b=100 \end{cases}.$

故该函数的表达式为 $y=-2x+100$;

(2) 根据题意得,

$$(-2x+100)(x-30)=150,$$

解这个方程得, $x_1=35$, $x_2=45$,

故每件商品的销售价定为 35 元或 45 元时日利润为 150 元;

(3) 根据题意, 得

$$w=(-2x+100)(x-30)$$

$$=-2x^2+160x-3000$$

$$=-2(x-40)^2+200,$$

$\because a=-2 < 0$ 则抛物线开口向下, 函数有最大值,

即当 $x=40$ 时, w 的值最大,

$\therefore$ 当销售单价为 40 元时获得利润最大.

点评: 此题考查二次函数的应用, 关键是根据题意列出方程和函数解析式, 利用函数解析式的最值分析.

25. (12 分) (2015•丹东) 在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O ; 在 $Rt\triangle PMN$ 中, $\angle MPN=90^\circ$.

(1) 如图 1, 若点 P 与点 O 重合且 $PM \perp AD$ 、 $PN \perp AB$, 分别交 AD 、 AB 于点 E 、 F , 请直接写出 PE 与 PF 的数量关系;

(2) 将图 1 中的 $Rt\triangle PMN$ 绕点 O 顺时针旋转角度 α ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$).

①如图 2, 在旋转过程中 (1) 中的结论依然成立吗? 若成立, 请证明; 若不成立, 请说明理由;

②如图 2, 在旋转过程中, 当 $\angle DOM = 15^\circ$ 时, 连接 EF , 若正方形的边长为 2, 请直接写出线段 EF 的长;

③如图 3, 旋转后, 若 $Rt\triangle PMN$ 的顶点 P 在线段 OB 上移动 (不与点 O 、 B 重合), 当 $BD = 3BP$ 时, 猜想此时 PE 与 PF 的数量关系, 并给出证明; 当 $BD = m \cdot BP$ 时, 请直接写出 PE 与 PF 的数量关系.

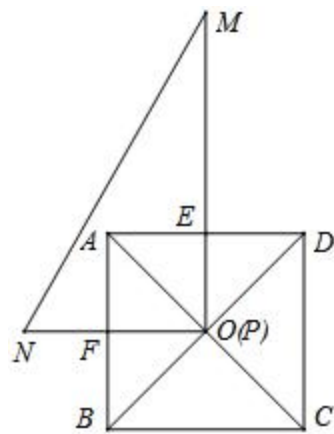


图 1

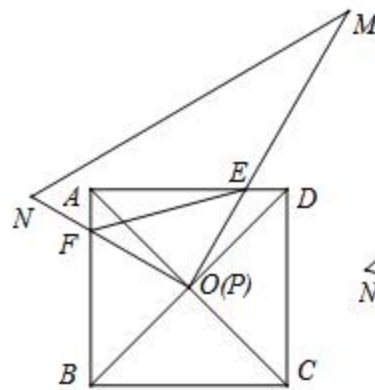


图 2

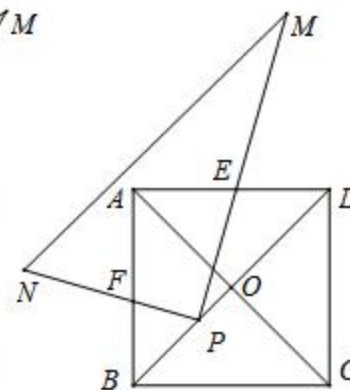


图 3

考点: 四边形综合题.

分析: (1) 根据正方形的性质和角平分线的性质解答即可;

(2) ①根据正方形的性质和旋转的性质证明 $\triangle FOA \cong \triangle EOD$, 得到答案;

②作 $OG \perp AB$ 于 G , 根据余弦的概念求出 OF 的长, 根据勾股定理求值即可;

③过点 P 作 $HP \perp BD$ 交 AB 于点 H , 根据相似三角形的判定和性质求出 PE 与 PF 的数量关系, 根据解答结果总结规律得到当 $BD = m \cdot BP$ 时, PE 与 PF 的数量关系.

解答: 解: (1) $PE = PF$, 理由:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$, 又 $PM \perp AD$ 、 $PN \perp AB$,

$\therefore PE = PF$;

(2) ①成立, 理由:

$\because AC, BD$ 是正方形 $ABCD$ 的对角线,

$\therefore OA=OD, \angle FAO=\angle EDO=45^\circ, \angle AOD=90^\circ,$

$\therefore \angle DOE+\angle AOE=90^\circ,$

$\because \angle MPN=90^\circ,$

$\therefore \angle FOA+\angle AOE=90^\circ,$

$\therefore \angle FOA=\angle DOE,$

在 $\triangle FOA$ 和 $\triangle EOD$ 中,

$$\begin{cases} \angle FAO=\angle EDO \\ OA=OD \\ \angle FOA=\angle DOE \end{cases},$$

$\therefore \triangle FOA \cong \triangle EOD,$

$\therefore OE=OF$, 即 $PE=PF$;

②作 $OG \perp AB$ 于 G ,

$\because \angle DOM=15^\circ,$

$\therefore \angle AOF=15^\circ$, 则 $\angle FOG=30^\circ$,

$$\because \cos \angle FOG = \frac{OG}{OF},$$

$$\therefore OF = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 又 } OE=OF,$$

$$\therefore EF = \frac{2\sqrt{6}}{3};$$

③ $PE=2PF$,

证明: 如图 3, 过点 P 作 $HP \perp BD$ 交 AB 于点 H ,

则 $\triangle HPB$ 为等腰直角三角形, $\angle HPD=90^\circ$,

$\therefore HP=BP$,

$\because BD=3BP$,

$\therefore PD=2BP$,

$\therefore PD=2HP$,

又 $\because \angle HPF+\angle HPE=90^\circ, \angle DPE+\angle HPE=90^\circ$,

$\therefore \angle HPF=\angle DPE$,

又 $\because \angle BHP=\angle EDP=45^\circ$,

$\therefore \triangle PHF \sim \triangle PDE$,

$$\therefore \frac{PF}{PE} = \frac{PH}{PD} = \frac{1}{2},$$

即 $PE = 2PF$,

由此规律可知, 当 $BD = m \cdot BP$ 时, $PE = (m - 1) \cdot PF$.

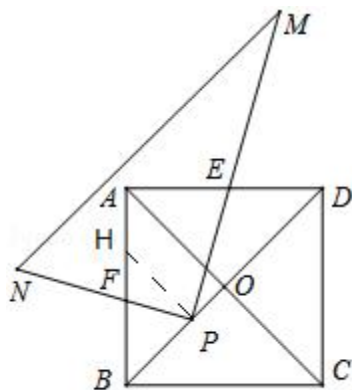


图 3

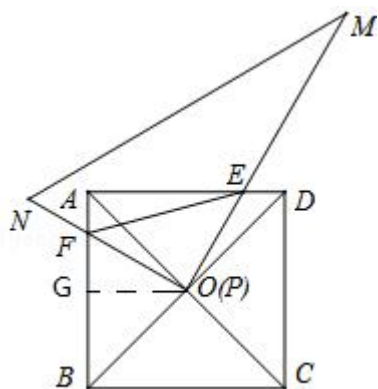


图 2

点评: 本题考查的是正方形的性质和旋转变换, 掌握旋转变换的性质、找准对应关系正确运用三角形全等和相似的判定和性质定理是解题的关键, 正确作出辅助线是解答本题的重点.

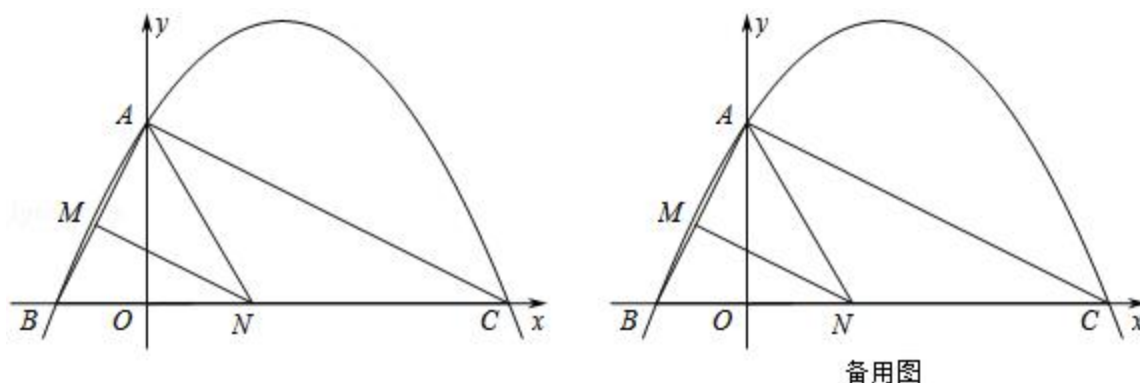
26. (14 分) (2015•丹东) 如图, 已知二次函数 $y = ax^2 + \frac{3}{2}x + c$ 的图象与 y 轴交于点 $A(0, 4)$, 与 x 轴交于点 B 、 C , 点 C 坐标为 $(8, 0)$, 连接 AB 、 AC .

(1) 请直接写出二次函数 $y = ax^2 + \frac{3}{2}x + c$ 的表达式;

(2) 判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由;

(3) 若点 N 在 x 轴上运动, 当以点 A 、 N 、 C 为顶点的三角形是等腰三角形时, 请直接写出此时点 N 的坐标;

(4) 若点 N 在线段 BC 上运动 (不与点 B 、 C 重合), 过点 N 作 $NM \parallel AC$, 交 AB 于点 M , 当 $\triangle AMN$ 面积最大时, 求此时点 N 的坐标.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 根据待定系数法即可求得;

(2) 根据抛物线的解析式求得 B 的坐标, 然后根据勾股定理分别求得 $AB^2=20$, $AC^2=80$, $BC^2=10$, 然后根据勾股定理的逆定理即可证得 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

(3) 分别以 A 、 C 两点为圆心, AC 长为半径画弧, 与 x 轴交于三个点, 由 AC 的垂直平分线与 x 轴交于一个点, 即可求得点 N 的坐标;

(4) 设点 N 的坐标为 $(n, 0)$, 则 $BN=n+2$, 过 M 点作 $MD \perp x$ 轴于点 D , 根据三角形相似对应边成比例求得 $MD=\frac{2}{5}(n+2)$, 然后根据 $S_{\triangle AMN}=S_{\triangle ABN}-S_{\triangle BMN}$ 得出关于 n 的二次函数, 根据函数解析式求得即可.

解答: 解: (1) $\because$ 二次函数 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 的图象与 y 轴交于点 $A(0, 4)$, 与 x 轴交于点 B 、 C , 点 C 坐标为 $(8, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} c=4 \\ 64a+12+c=0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ c=4 \end{cases}.$$

$$\therefore \text{抛物线表达式: } y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4;$$

(2) $\triangle ABC$ 是直角三角形.

$$\text{令 } y=0, \text{ 则 } -\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4=0,$$

$$\text{解得 } x_1=8, x_2=-2,$$

∴点B的坐标为 (-2, 0),

由已知可得,

在Rt△ABO中 $AB^2=BO^2+AO^2=2^2+4^2=20$,

在Rt△AOC中 $AC^2=AO^2+CO^2=4^2+8^2=80$,

又∵ $BC=OB+OC=2+8=10$,

∴在△ABC中 $AB^2+AC^2=20+80=10^2=BC^2$

∴△ABC是直角三角形.

(3) ∵A (0, 4), C (8, 0),

$$\therefore AC = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

①以A为圆心, 以AC长为半径作圆, 交x轴于N, 此时N的坐标为 (-8, 0),

②以C为圆心, 以AC长为半径作圆, 交x轴于N, 此时N的坐标为 $(8 - 4\sqrt{5}, 0)$ 或 $(8 + 4\sqrt{5}, 0)$

③作AC的垂直平分线, 交x轴于N, 此时N的坐标为 (3, 0),

综上, 若点N在x轴上运动, 当以点A、N、C为顶点的三角形是等腰三角形时, 点N的坐标分别为 (-8, 0)、 $(8 - 4\sqrt{5}, 0)$ 、(3, 0)、 $(8 + 4\sqrt{5}, 0)$.

(4) 设点N的坐标为 (n, 0), 则 $BN=n+2$, 过M点作 $MD \perp x$ 轴于点D,

∴ $MD \parallel OA$,

∴ $\triangle BMD \sim \triangle BAO$,

$$\therefore \frac{BM}{BA} = \frac{MD}{OA},$$

∵ $MN \parallel AC$

$$\therefore \frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC},$$

$$\therefore \frac{MD}{OA} = \frac{BN}{BC},$$

∵ $OA=4$, $BC=10$, $BN=n+2$

$$\therefore MD = \frac{2}{5} (n+2),$$

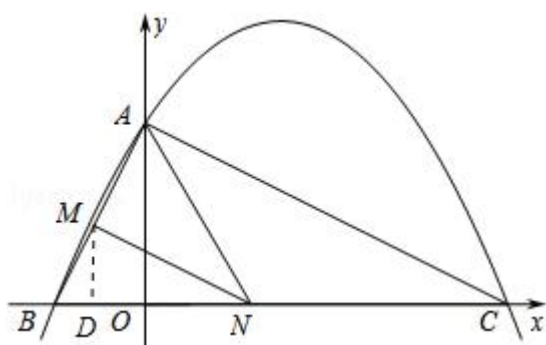
∵ $S_{\triangle AMN} = S_{\triangle ABN} - S_{\triangle BMN}$

$$= \frac{1}{2} BN \cdot OA - \frac{1}{2} BN \cdot MD$$

$$= \frac{1}{2} (n+2) \times 4 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} (n+2)^2$$

$$= -\frac{1}{5}(n-3)^2 + 5,$$

∴当 $\triangle AMN$ 面积最大时， N 点坐标为 $(3, 0)$.



点评： 本题是二次函数的综合题，考查了待定系数法求解析式，勾股定理和逆定理，等腰三角形的性质，三角形相似的判定和性质以及函数的最值等，熟练掌握性质定理是解题的关键.