

2014 年辽宁省本溪市中考数学试卷

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

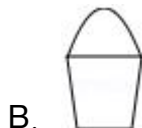
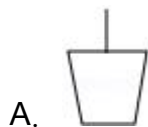
1. (3 分) $-\frac{1}{4}$ 的倒数是 ()

- A. -4 B. 4 C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

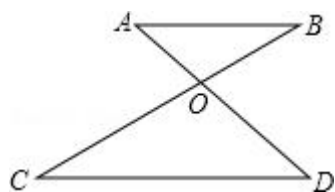
2. (3 分) 下列计算正确的是 ()

- A. $2a^3 + a^2 = 3a^5$ B. $(3a)^2 = 6a^2$
C. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ D. $2a^2 \cdot a^3 = 2a^5$

3. (3 分) 如图所示的几何体的俯视图是 ()

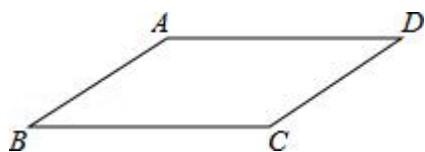


4. (3 分) 如图, $AB \parallel CD$, AD 与 BC 相交于点 O , $\angle B = 30^\circ$, $\angle D = 40^\circ$, 则 $\angle AOC$ 的度数为 ()



- A. 60° B. 70° C. 80° D. 90°

5. (3 分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 6$, $\angle B = 30^\circ$, 则此平行四边形的面积是 ()



- A. 6 B. 12 C. 18 D. 24

6. (3分) 某中学排球队 12 名队员的年龄情况如下表:

年龄 (岁)	12	13	14	15
人数 (人)	1	2	5	4

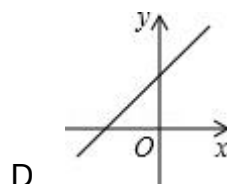
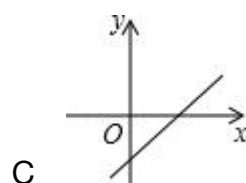
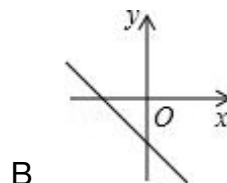
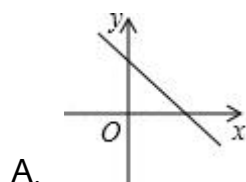
则这个队员年龄的众数是 ()

- A. 12 岁 B. 13 岁 C. 14 岁 D. 15 岁

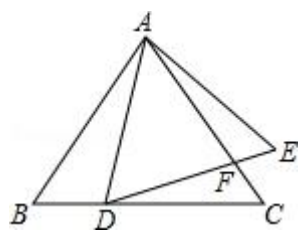
7. (3分) 底面半径为 4, 高为 3 的圆锥的侧面积是 ()

- A. 12π B. 15π C. 20π D. 36π

8. (3分) 若实数 a, b 满足 $ab < 0$, 且 $a < b$, 则函数 $y=ax+b$ 的图象可能是 ()

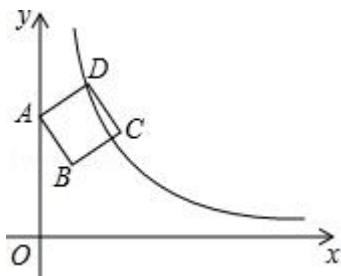


9. (3分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为等边三角形, D 在 BC 上, DE 与 AC 相交于点 F , $AB=9$, $BD=3$, 则 CF 等于 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. (3分) 如图, 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 在 y 轴上, 顶点 D 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象上, 已知点 B 的坐标是 $(\frac{6}{5}, \frac{11}{5})$, 则 k 的值为 ()



A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. (3 分) 目前发现一种病毒直径约是 0.0000252 米, 将 0.0000252 用科学记数法表示为_____.

12. (3 分) 因式分解: $a^3 - 4a =$ _____.

13. (3 分) 一个数的算术平方根是 2, 则这个数是_____.

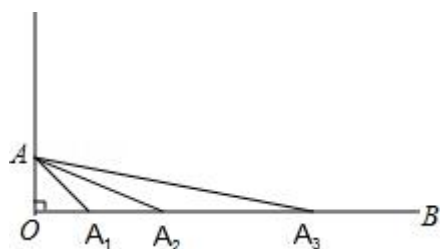
14. (3 分) 在一个不透明的盒子中放入标号分别为 1, 2, ..., 9 的形状、大小、质地完全相同的 9 个球, 充分混合后, 从中取出一个球, 标号能被 3 整除的概率是_____.

15. (3 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 45^\circ$, $\cos A = \frac{1}{2}$, 则 $\angle C$ 的度数是_____.

16. (3 分) 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x - y = m \\ x + my = n \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$, 则 $|m + n|$ 的值是_____.

17. (3 分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$, 从 -1, 2, 3 三个数中任取一个数, 作为方程中 b 的值, 再从剩下的两个数中任取一个数作为方程中 c 的值, 能使该一元二次方程有实数根的概率是_____.

18. (3 分) 如图, 已知 $\angle AOB = 90^\circ$, 点 A 绕点 O 顺时针旋转后的对应点 A_1 落在射线 OB 上, 点 A 绕点 A_1 顺时针旋转后的对应点 A_2 落在射线 OB 上, 点 A 绕点 A_2 顺时针旋转后的对应点 A_3 落在射线 OB 上, ..., 连接 $AA_1, AA_2, AA_3, \dots$, 依此作法, 则 $\angle AA_n A_{n+1}$ 等于_____度. (用含 n 的代数式表示, n 为正整数)

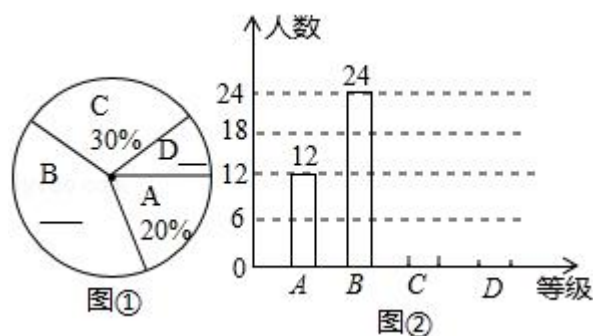


三、解答题 (第 19 题 10 分, 第 20 题 12 分, 共 22 分)

19. (10 分) 先化简, 再求值: $\left(\frac{2x^2+2x}{x^2-1} - \frac{x}{x-1}\right) \div \frac{x}{x+1}$, 其中 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - (\pi - 1)^0 + \sqrt{2}$.

20. (12 分) 某中学对全校 1200 名学生进行“校园安全知识”的教育活动, 从 1200 名学生中随机抽取部分学生进行测试, 成绩评定按从高分到低分排列分为 A、B、C、D 四个等级, 绘制了图①、图②两幅不完整的统计图, 请结合图中所给信息解答下列问题:

- (1) 求本次被抽查的学生共有多少人?
- (2) 将条形统计图和扇形统计图补充完整;
- (3) 求扇形统计图中“A”所在扇形圆心角的度数;
- (4) 估计全校“D”等级的学生有多少人?



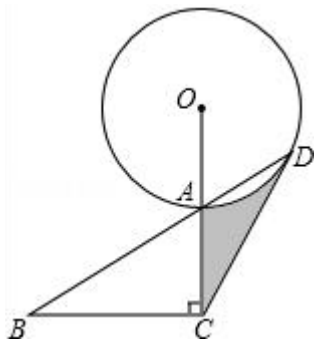
四、解答题 (第 21 题 12 分, 第 22 题 12 分, 共 24 分)

21. (12 分) 晨光文具店用进货款 1620 元购进 A 品牌的文具盒 40 个, B 品牌的文具盒 60 个, 其中 A 品牌文具盒的进货单价比 B 品牌文具盒的进货单价多 3 元.

- (1) 求 A、B 两种文具盒的进货单价?
- (2) 已知 A 品牌文具盒的售价为 23 元/个, 若使这批文具盒全部售完后利润不低于 500 元, B 品牌文具盒的销售单价最少是多少元?

22. (12 分) 如图, 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B=30^\circ$, $\angle ACB=90^\circ$, 延长 CA 到 O, 使 $AO=AC$, 以 O 为圆心, OA 长为半径作 $\odot O$ 交 BA 延长线于点 D, 连接 CD.

- (1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 若 $AB=4$, 求图中阴影部分的面积.



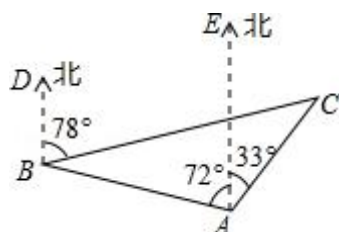
五、解答题 (满分 12 分)

23. (12 分) 某海域有 A、B、C 三艘船正在捕鱼作业，C 船突然出现故障，向 A、B 两船发出紧急求救信号，此时 B 船位于 A 船的北偏西 72° 方向，距 A 船 24 海里的海域，C 船位于 A 船的北偏东 33° 方向，同时又位于 B 船的北偏东 78° 方向.

(1) 求 $\angle ABC$ 的度数;

(2) A 船以每小时 30 海里的速度前去救援，问多长时间能到出事地点. (结果精确到 0.01 小时).

(参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$)



六、解答题 (满分 12 分)

24. (12 分) 国家推行“节能减排，低碳经济”政策后，低排量的汽车比较畅销，某汽车经销商购进 A，B 两种型号的低排量汽车，其中 A 型汽车的进货单价比 B 型汽车的进货单价多 2 万元．花 50 万元购进 A 型汽车的数量与花 40 万元购进 B 型汽车的数量相同，销售中发现 A 型汽车的每周销量 y_A (台) 与售价 x (万元/台) 满足函数关系式 $y_A = -x + 20$ ，B 型汽车的每周销量 y_B (台) 与售价 x (万元/台) 满足函数关系式 $y_B = -x + 14$.
- (1) 求 A、B 两种型号的汽车进货单价；
- (2) 已知 A 型汽车的售价比 B 型汽车的售价高 2 万元/台，设 B 型汽车售价为 t 万元/台．每周销售这两种车的总利润为 W 万元，求 W 与 t 的函数关系式，A、B 两种型号的汽车售价各为多少时，每周销售这两种车的总利润最大？最大总利润是多少万元？

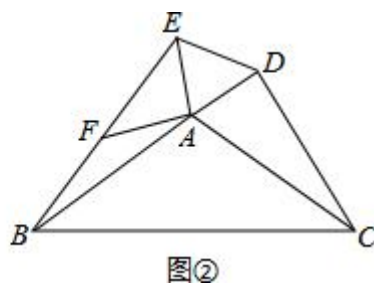
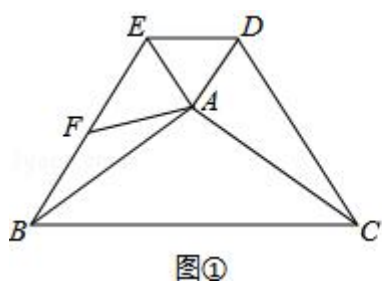
七、解答题 (满分 12 分)

25. (12 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中, $AB=AC$, $AD=AE$, $\angle BAC + \angle EAD = 180^\circ$,

$\triangle ABC$ 不动, $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转, 连接 BE 、 CD , F 为 BE 的中点, 连接 AF .

(1) 如图①, 当 $\angle BAE = 90^\circ$ 时, 求证: $CD = 2AF$;

(2) 当 $\angle BAE \neq 90^\circ$ 时, (1) 的结论是否成立? 请结合图②说明理由.

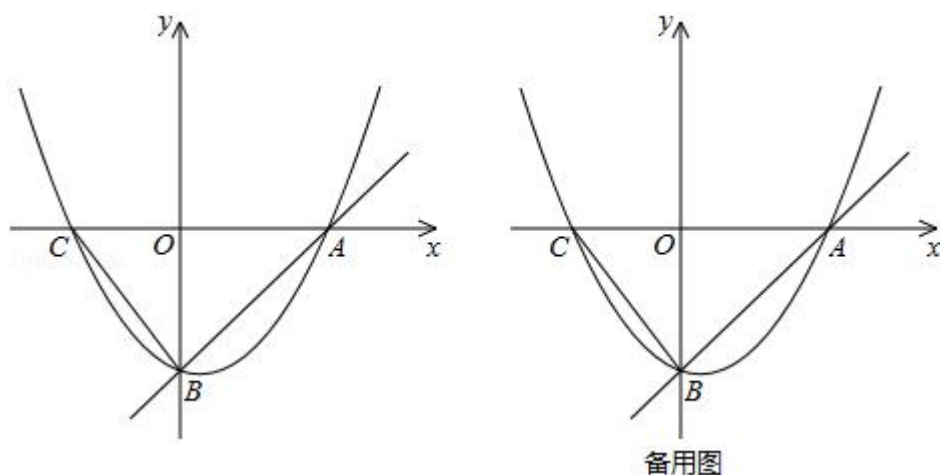


八、解答题（满分 14 分）

26. （14 分）如图，直线 $y=x-4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点，抛物线

$y=\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 经过 A 、 B 两点，与 x 轴的另一个交点为 C ，连接 BC 。

- （1）求抛物线的解析式及点 C 的坐标；
- （2）点 M 在抛物线上，连接 MB ，当 $\angle MBA+\angle CBO=45^\circ$ 时，求点 M 的坐标；
- （3）点 P 从点 C 出发，沿线段 CA 由 C 向 A 运动，同时点 Q 从点 B 出发，沿线段 BC 由 B 向 C 运动， P 、 Q 的运动速度都是每秒 1 个单位长度，当 Q 点到达 C 点时， P 、 Q 同时停止运动，试问在坐标平面内是否存在点 D ，使 P 、 Q 运动过程中的某一时刻，以 C 、 D 、 P 、 Q 为顶点的四边形为菱形？若存在，直接写出点 D 的坐标；若不存在，说明理由。



2014 年辽宁省本溪市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) $-\frac{1}{4}$ 的倒数是 ()

A. -4

B. 4

C. $\frac{1}{4}$

D. $-\frac{1}{4}$

【考点】17：倒数.

【专题】1：常规题型.

【分析】根据负数的倒数是负数，结合倒数的定义直接求解.

【解答】解： $-\frac{1}{4}$ 的倒数是 -4，

故选：A.

【点评】本题考查了倒数的定义，理解定义是关键.

2. (3 分) 下列计算正确的是 ()

A. $2a^3+a^2=3a^5$

B. $(3a)^2=6a^2$

C. $(a+b)^2=a^2+b^2$

D. $2a^2 \cdot a^3=2a^5$

【考点】35：合并同类项；47：幂的乘方与积的乘方；49：单项式乘单项式；

4C：完全平方公式.

【专题】11：计算题.

【分析】根据合并同类项法则、积的乘方、完全平方公式、单项式乘单项式判断即可.

【解答】解：A、 $2a^3$ 与 a^2 不是同类项不能合并，故 A 选项错误；

B、 $(3a)^2=9a^2$ ，故 B 选项错误；

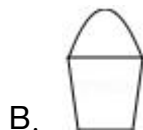
C、 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ，故 C 选项错误；

D、 $2a^2 \cdot a^3 = 2a^5$ ，故 D 选项正确，

故选：D.

【点评】本题考查了合并同类项法则、积的乘方、完全平方公式、单项式乘单项式，熟练掌握法则是解题的关键.

3. (3 分) 如图所示的几何体的俯视图是 ()



【考点】U2: 简单组合体的三视图.

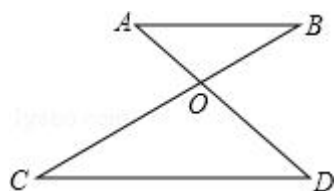
【分析】根据从上面看得到的图形是俯视图，可得答案.

【解答】解：从上面看是一个有直径的圆环，

故选：D.

【点评】本题考查了简单组合体的三视图，从上面看得到的图形是俯视图，从正面看得到的图形是主视图，从左边看得到的图形是左视图.

4. (3 分) 如图， $AB \parallel CD$ ，AD 与 BC 相交于点 O， $\angle B = 30^\circ$ ， $\angle D = 40^\circ$ ，则 $\angle AOC$ 的度数为 ()



A. 60°

B. 70°

C. 80°

D. 90°

【考点】JA: 平行线的性质; K8: 三角形的外角性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】利用平行线的性质和三角形外角等于和它不相邻的两个内角的和的性质

就可求出.

【解答】解: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle A = \angle D = 30^\circ,$$

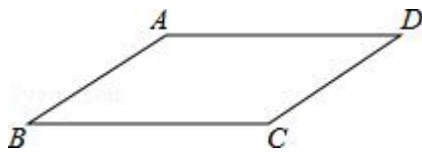
再由三角形的外角的性质得,

$$\angle AOC = \angle A + \angle B = 70^\circ.$$

故选: B.

【点评】本题考查了平行线的性质以及三角形的外角的性质, 两直线平行时, 应该想到它们的性质, 由两直线平行的关系得到角之间的数量关系, 从而达到解决问题的目的.

5. (3分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=6$, $\angle B=30^\circ$, 则此平行四边形的面积是 ()



A. 6

B. 12

C. 18

D. 24

【考点】KO: 含 30° 度角的直角三角形; L5: 平行四边形的性质.

【专题】121: 几何图形问题.

【分析】过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E, 根据含 30° 度角的直角三角形的性质: 在直角三角形中, 30° 角所对的直角边等于斜边的一半可求出 AE 的长, 利用平行四边形的面积公式即可求出其面积.

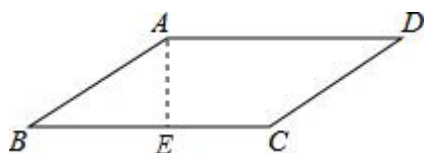
【解答】解: 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E,

$\because$ 直角 $\triangle ABE$ 中, $\angle B=30^\circ$,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 面积} = BC \cdot AE = 6 \times 2 = 12,$$

故选: B.



【点评】 本题考查了平行四边形的性质以及平行四边形的面积公式的运用和 30° 度角的直角三角形的性质：在直角三角形中， 30° 角所对的直角边等于斜边的一半.

6. (3 分) 某中学排球队 12 名队员的年龄情况如下表：

年龄 (岁)	12	13	14	15
人数 (人)	1	2	5	4

则这个队员年龄的众数是 ()

- A. 12 岁 B. 13 岁 C. 14 岁 D. 15 岁

【考点】 W5： 众数.

【专题】 27： 图表型.

【分析】 根据众数定义： 一组数据中出现次数最多的数据叫众数， 可知 15 出现的次数最多.

【解答】 解： 数据 14 出现了 5 次， 出现次数最多， 故 14 为众数，

故选： C.

【点评】 此题主要考查了众数， 关键是把握众数定义.

7. (3 分) 底面半径为 4， 高为 3 的圆锥的侧面积是 ()

- A. 12π B. 15π C. 20π D. 36π

【考点】 MP： 圆锥的计算.

【专题】 11： 计算题.

【分析】 首先根据底面半径和高利用勾股定理求得母线长， 然后直接利用圆锥的侧面积公式代入求出即可.

【解答】 解： $\because$ 圆锥的底面半径为 4， 高为 3，

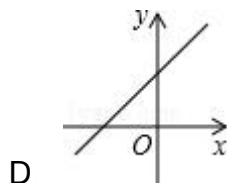
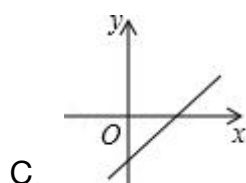
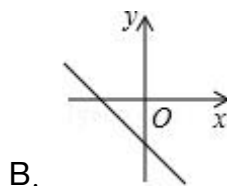
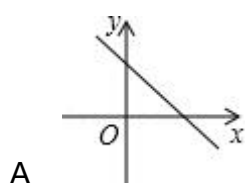
∴ 母线长为 5,

∴ 圆锥的侧面积为: $\pi rl = \pi \times 4 \times 5 = 20\pi$,

故选: C.

【点评】 本题考查了圆锥的计算, 正确理解圆锥的侧面展开图与原来的扇形之间的关系是解决本题的关键.

8. (3 分) 若实数 a , b 满足 $ab < 0$, 且 $a < b$, 则函数 $y = ax + b$ 的图象可能是 ()



【考点】 F7: 一次函数图象与系数的关系.

【专题】 31: 数形结合.

【分析】 利用 $ab < 0$, 且 $a < b$ 得到 $a < 0$, $b > 0$, 然后根据一次函数图象与系数的关系进行判断.

【解答】 解: $\because ab < 0$, 且 $a < b$,

$\therefore a < 0$, $b > 0$,

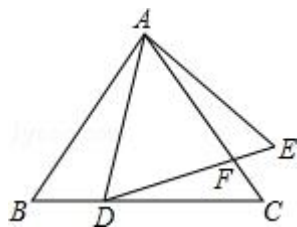
$\therefore$ 函数 $y = ax + b$ 的图象经过第二、四象限, 且与 y 轴的交点在 x 轴上方.

故选: A.

【点评】 本题考查了一次函数图象与系数的关系: 一次函数 $y = kx + b$ (k 、 b 为常数, $k \neq 0$) 是一条直线, 当 $k > 0$, 图象经过第一、三象限, y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$, 图象经过第二、四象限, y 随 x 的增大而减小; 图象与 y 轴

的交点坐标为 $(0, b)$.

9. (3 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为等边三角形, D 在 BC 上, DE 与 AC 相交于点 F , $AB=9$, $BD=3$, 则 CF 等于 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【考点】KK: 等边三角形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】121: 几何图形问题.

【分析】通过相似三角形 $\triangle ABD \sim \triangle CDF$ 的对应边成比例进行解答.

【解答】解: 如图, $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为等边三角形,

$$\therefore \angle B = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ADB = 120^\circ, \quad \angle ADB + \angle FDC = 120^\circ$$

$$\therefore \angle BAD = \angle FDC$$

$$\text{又 } \because \angle B = \angle C = 60^\circ, \therefore$$

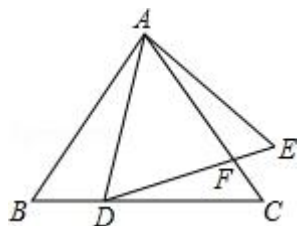
$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CDF,$$

$$\therefore AB: BD = CD: CF,$$

$$\text{即 } 9: 3 = (9 - 3): CF,$$

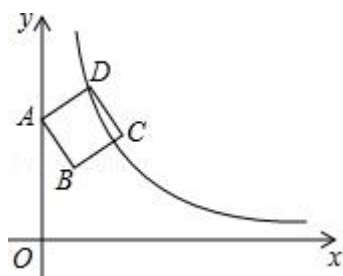
$$\therefore CF = 2.$$

故选: B.



【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质和等边三角形的性质. 此题利用了“两角法”证得两个三角形相似.

10. (3 分) 如图, 边长为 2 的正方形 ABCD 的顶点 A 在 y 轴上, 顶点 D 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象上, 已知点 B 的坐标是 $(\frac{6}{5}, \frac{11}{5})$, 则 k 的值为 ()



- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

【考点】 G6: 反比例函数图象上点的坐标特征; KD: 全等三角形的判定与性质; LE: 正方形的性质.

【专题】 31: 数形结合.

【分析】 过点 B 作 $BE \perp y$ 轴于 E, 过点 D 作 $DF \perp y$ 轴于 F, 根据正方形的性质可得 $AB=AD$, $\angle BAD=90^\circ$, 再根据同角的余角相等求出 $\angle BAE=\angle ADF$, 然后利用“角角边”证明 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DAF$ 全等, 根据全等三角形对应边相等可得 $AF=BE$, $DF=AE$, 再求出 OF, 然后写出点 D 的坐标, 再把点 D 的坐标代入反比例函数解析式计算即可求出 k.

【解答】 解: 如图, 过点 B 作 $BE \perp y$ 轴于 E, 过点 D 作 $DF \perp y$ 轴于 F, 在正方形 ABCD 中, $AB=AD$, $\angle BAD=90^\circ$,

$$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF + \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ADF,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DAF$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle ADF \\ \angle AEB = \angle DFA, \\ AB = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AF = BE, DF = AE,$$

$$\therefore \text{正方形的边长为 } 2, B \left(\frac{6}{5}, \frac{11}{5} \right),$$

$$\therefore BE = \frac{6}{5}, AE = \sqrt{2^2 - \left(\frac{6}{5} \right)^2} = \frac{8}{5},$$

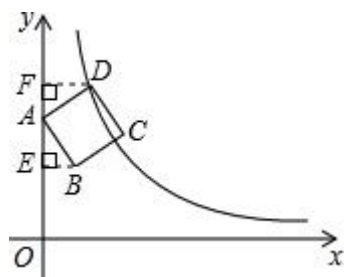
$$\therefore OF = OE + AE + AF = \frac{11}{5} + \frac{8}{5} + \frac{6}{5} = 5,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } \left(\frac{8}{5}, 5 \right),$$

$$\therefore \text{顶点 } D \text{ 在反比例函数 } y = \frac{k}{x} \text{ (} x > 0 \text{) 的图象上,}$$

$$\therefore k = xy = \frac{8}{5} \times 5 = 8.$$

故选: C.



【点评】 本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质，反比例函数图象上的点的坐标特征，作辅助线构造出全等三角形并求出点 D 的坐标是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. (3 分) 目前发现一种病毒直径约是 0.0000252 米, 将 0.0000252 用科学记数法表示为 2.52×10^{-5} .

【考点】1J: 科学记数法—表示较小的数.

【专题】1: 常规题型.

【分析】绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂, 指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定. 由此可得, 此题的 $a=2.52$, 10 的指数为 -5 .

【解答】解: $0.0000252=2.52 \times 10^{-5}$ 米.

故答案为: 2.52×10^{-5} .

【点评】本题考查用科学记数法表示较小的数, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

12. (3 分) 因式分解: $a^3 - 4a =$ $a(a+2)(a-2)$.

【考点】55: 提公因式法与公式法的综合运用.

【专题】44: 因式分解.

【分析】首先提取公因式 a , 进而利用平方差公式分解因式得出即可.

【解答】解: $a^3 - 4a = a(a^2 - 4) = a(a+2)(a-2)$.

故答案为: $a(a+2)(a-2)$.

【点评】此题主要考查了提取公因式法和公式法分解因式, 熟练掌握平方差公式是解题关键.

13. (3 分) 一个数的算术平方根是 2, 则这个数是 4.

【考点】22: 算术平方根.

【专题】 11： 计算题.

【分析】 利用算术平方根的定义计算即可得到结果.

【解答】 解： 4 的算术平方根为 2，

故答案为： 4

【点评】 此题考查了算术平方根，熟练掌握算术平方根的定义是解本题的关键.

14. (3 分) 在一个不透明的盒子中放入标号分别为 1, 2, ..., 9 的形状、大小、质地完全相同的 9 个球，充分混合后，从中取出一个球，标号能被 3 整除的概率是 $\frac{1}{3}$.

【考点】 X4： 概率公式.

【专题】 1： 常规题型.

【分析】 根据概率的求法，找准两点：①全部情况的总数；②符合条件的情况数目；二者的比值就是其发生的概率.

【解答】 解： 根据题意可知，共有 9 个球，能被 3 整除的有 3 个，

故标号能被 3 整除的概率为 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$,

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【点评】 本题考查概率的求法： 如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

15. (3 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 45^\circ$ ， $\cos A = \frac{1}{2}$ ， 则 $\angle C$ 的度数是 75° .

【考点】 K7： 三角形内角和定理； T5： 特殊角的三角函数值.

【专题】 11： 计算题.

【分析】 由条件根据 $\angle A$ 的余弦值求得 $\angle A$ 的值， 再根据三角形的内角和定理求 $\angle C$ 即可.

【解答】 解： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\cos A = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$$

【点评】 本题主要考查特殊角的余弦值以及三角形的内角和定理，属基础题.

16. (3 分) 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x-y=m \\ x+my=n \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$, 则 $|m+n|$ 的值是 3.

【考点】 97: 二元一次方程组的解.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 将 x 与 y 的值代入方程组计算求出 m 与 n 的值, 即可确定出所求式子的值.

【解答】 解: 将 $x=1, y=3$ 代入方程组得: $\begin{cases} 2-3=m \\ 1+3m=n \end{cases}$,

解得: $m=-1, n=-2$,

则 $|m+n| = |-1-2| = |-3| = 3$.

故答案为: 3

【点评】 此题考查了二元一次方程组的解, 方程组的解即为能使方程组中两方程成立的未知数的值.

17. (3 分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 从 $-1, 2, 3$ 三个数中任取一个数, 作为方程中 b 的值, 再从剩下的两个数中任取一个数作为方程中 c 的值, 能使该一元二次方程有实数根的概率是 $\frac{1}{2}$.

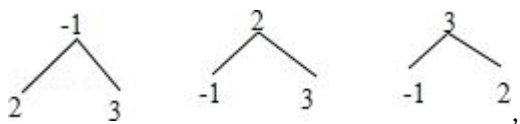
【考点】 AA: 根的判别式; X6: 列表法与树状图法.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 先利用树状图展示所有 6 种等可能的结果数, 再根据判别式的意义得到

当 $b=2, c=-1$; $b=3, c=-1$; $b=3, c=2$ 时, 该一元二次方程有实数根, 然后根据概率公式计算.

【解答】 解: 画树状图为:



共有 6 种等可能的结果数,

因为 $b^2 - 4c \geq 0$,

所以能使该一元二次方程有实数根占 3 种,

$b=2, c=-1$;

$b=3, c=-1$;

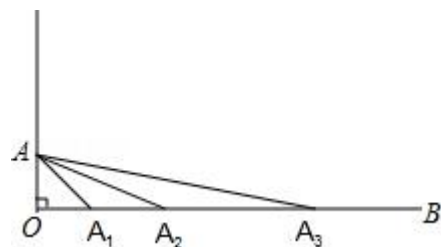
$b=3, c=2$,

所以能使该一元二次方程有实数根的概率 $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点评】 本题考查了列表法与树状图法: 利用列表法或树状图法展示所有可能的结果求出 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 求出概率. 也考查了根的判别式.

18. (3 分) 如图, 已知 $\angle AOB = 90^\circ$, 点 A 绕点 O 顺时针旋转后的对应点 A_1 落在射线 OB 上, 点 A 绕点 A_1 顺时针旋转后的对应点 A_2 落在射线 OB 上, 点 A 绕点 A_2 顺时针旋转后的对应点 A_3 落在射线 OB 上, ..., 连接 $AA_1, AA_2, AA_3, \dots$, 依此作法, 则 $\angle AA_n A_{n+1}$ 等于 $\frac{(180 - \frac{90}{2^n})}{2^n}$ 度. (用含 n 的代数式表示, n 为正整数)



【考点】 KH: 等腰三角形的性质; R2: 旋转的性质.

【专题】 2A: 规律型.

【分析】 根据旋转的性质得 $OA = OA_1$, 则根据等腰三角形的性质得 $\angle$

$\angle AA_1O = \frac{90^\circ}{2}$, 同理得到 $A_1A = A_1A_2$, 根据等腰三角形的性质和三角形外角性质得到 $\angle AA_2A_1 = \frac{1}{2} \angle AA_1O = \frac{90^\circ}{2^2}$, 同样得到 $\angle AA_3A_2 = \frac{90^\circ}{2^3}$, 于是可推广得到 $\angle AA_nA_{n-1} = \frac{90^\circ}{2^n}$, 然后利用邻补角的定义得到 $\angle AA_nA_{n+1} = 180^\circ - \frac{90^\circ}{2^n}$.

【解答】 解: $\because$ 点 A 绕点 O 顺时针旋转后的对应点 A_1 落在射线 OB 上,

$$\therefore OA = OA_1,$$

$$\therefore \angle AA_1O = \frac{90^\circ}{2},$$

$\because$ 点 A 绕点 A_1 顺时针旋转后的对应点 A_2 落在射线 OB 上,

$$\therefore A_1A = A_1A_2,$$

$$\therefore \angle AA_2A_1 = \frac{1}{2} \angle AA_1O = \frac{90^\circ}{2^2},$$

$\because$ 点 A 绕点 A_2 顺时针旋转后的对应点 A_3 落在射线 OB 上,

$$\therefore A_2A = A_2A_3,$$

$$\therefore \angle AA_3A_2 = \frac{1}{2} \angle AA_2A_1 = \frac{90^\circ}{2^3},$$

$$\therefore \angle AA_nA_{n-1} = \frac{90^\circ}{2^n},$$

$$\therefore \angle AA_nA_{n+1} = 180^\circ - \frac{90^\circ}{2^n}.$$

故答案为: $180 - \frac{90}{2^n}$.

【点评】 本题考查了旋转的性质: 旋转前后两图形全等; 对应点到旋转中心的距离相等; 对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角. 也考查了等腰三角形的性质.

三、解答题 (第 19 题 10 分, 第 20 题 12 分, 共 22 分)

19. (10 分) 先化简, 再求值: $(\frac{2x^2+2x}{x^2-1} - \frac{x}{x-1}) \div \frac{x}{x+1}$, 其中 $x = (\frac{1}{2})^{-1} - (\pi - 1)^0 + \sqrt{2}$.

【考点】 6D: 分式的化简求值; 6E: 零指数幂; 6F: 负整数指数幂.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 先计算括号内的分式的减法, 把分式除法转化为乘法运算进行化简. 最后代入求值.

【解答】 解: 原式 $= [\frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{x-1}] \div \frac{x}{x+1},$
 $= \frac{2x-x}{x-1} \times \frac{x+1}{x},$
 $= \frac{x+1}{x-1}.$

$$x = (\frac{1}{2})^{-1} - (\pi - 1)^0 + \sqrt{2},$$

$$= 2 - 1 + \sqrt{2}$$

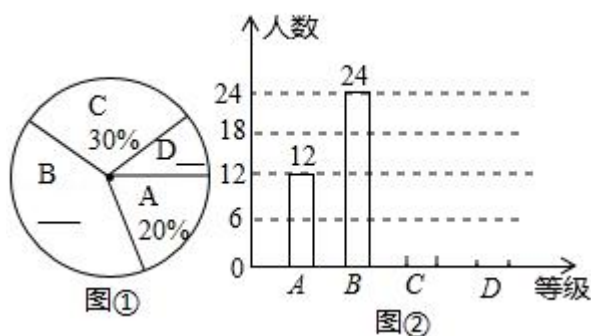
$$= 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{则原式} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

【点评】 本题考查了分式的化简求值, 零指数幂和负整数指数幂. 在化简的过程中要注意运算顺序和分式的化简. 化简的最后结果分子、分母要进行约分, 注意运算的结果要化成最简分式或整式.

20. (12 分) 某中学对全校 1200 名学生进行“校园安全知识”的教育活动, 从 1200 名学生中随机抽取部分学生进行测试, 成绩评定按从高分到低分排列分为 A、B、C、D 四个等级, 绘制了图①、图②两幅不完整的统计图, 请结合图中所给信息解答下列问题:

- (1) 求本次被抽查的学生共有多少人?
- (2) 将条形统计图和扇形统计图补充完整;
- (3) 求扇形统计图中“A”所在扇形圆心角的度数;
- (4) 估计全校“D”等级的学生有多少人?



【考点】V5：用样本估计总体；VB：扇形统计图；VC：条形统计图.

【专题】27：图表型.

【分析】(1) 根据 A 等级有 12 人，占 20%，即可求得抽查的总人数；

(2) 根据百分比的定义求得 B、D 所占的百分比，以及 C、D 类的人数，即可解答；

(3) 利用 360° 乘以对应的百分比即可求解；

(4) 利用总人数 1200 乘以对应的百分比.

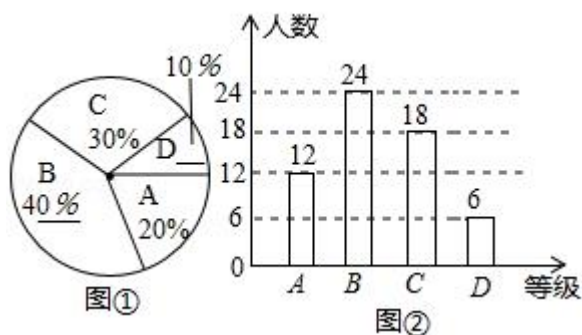
【解答】解：(1) $12 \div 20\% = 60$ (人)；

(2) B 所占的百分比是： $\frac{24}{60} \times 100\% = 40\%$,

D 所占的百分比是： $1 - 20\% - 40\% - 30\% = 10\%$.

C 的个数是： $60 \times 30\% = 18$,

D 的个数是： $60 \times 10\% = 6$.



(3) $360^{\circ} \times 20\% = 72^{\circ}$;

(4) $1200 \times 10\% = 120$ (人).

答: 估计全校“D”等级的学生有 120 人.

【点评】 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用, 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据; 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

四、解答题 (第 21 题 12 分, 第 22 题 12 分, 共 24 分)

21. (12 分) 晨光文具店用进货款 1620 元购进 A 品牌的文具盒 40 个, B 品牌的文具盒 60 个, 其中 A 品牌文具盒的进货单价比 B 品牌文具盒的进货单价多 3 元.

(1) 求 A、B 两种文具盒的进货单价?

(2) 已知 A 品牌文具盒的售价为 23 元/个, 若使这批文具盒全部售完后利润不低于 500 元, B 品牌文具盒的销售单价最少是多少元?

【考点】 8A: 一元一次方程的应用; C9: 一元一次不等式的应用.

【专题】 124: 销售问题.

【分析】 (1) 设 A 品牌文具盒的进价为 x 元/个, 根据晨光文具店用进货款 1620 元, 可得出方程, 解出即可;

(2) 设 B 品牌文具盒的销售单价为 y 元, 根据全部售完后利润不低于 500 元, 可得不等式, 解出即可.

【解答】 解: (1) 设 A 品牌文具盒的进价为 x 元/个,

依题意得: $40x + 60(x - 3) = 1620$,

解得: $x = 18$,

$$x - 3 = 15.$$

答：A 品牌文具盒的进价为 18 元/个，B 品牌文具盒的进价为 15 元/个.

(2) 设 B 品牌文具盒的销售单价为 y 元,

依题意得： $(23 - 18) \times 40 + 60(y - 15) \geq 500$,

解得： $y \geq 20$.

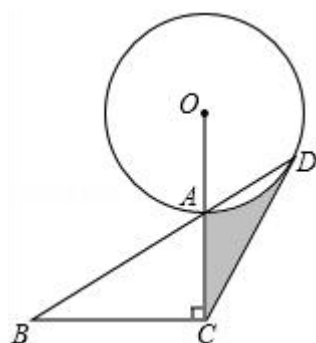
答：B 品牌文具盒的销售单价最少为 20 元.

【点评】 本题考查了一元一次方程及一元一次不等式的知识，解答本题的关键是仔细审题，找到不等关系及等量关系，难度一般.

22. (12 分) 如图，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 30^\circ$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，延长 CA 到 O，使 $AO = AC$ ，以 O 为圆心，OA 长为半径作 $\odot O$ 交 BA 延长线于点 D，连接 CD.

(1) 求证：CD 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $AB = 4$ ，求图中阴影部分的面积.



【考点】 KM：等边三角形的判定与性质；KO：含 30° 度角的直角三角形；KQ：勾股定理；MD：切线的判定；MO：扇形面积的计算.

【专题】 11：计算题；14：证明题.

【分析】 (1) 连接 OD，求出 $\angle OAD = 60^\circ$ ，得出等边三角形 OAD，求出 $AD = OA = AC$ ，

$\angle ODA = \angle O = 60^\circ$, 求出 $\angle ADC = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle OAD = 30^\circ$, 求出 $\angle ODC = 90^\circ$,

根据切线的判定得出即可;

(2) 求出 OD, 根据勾股定理求出 CD 长, 分别求出三角形 ODC 和扇形 AOD 的面积, 相减即可.

【解答】 (1) 证明: 连接 OD,

$$\because \angle BCA = 90^\circ, \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\because OD = OA,$$

$\therefore \triangle OAD$ 是等边三角形,

$$\therefore AD = OA = AC, \angle ODA = \angle O = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle OAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ODC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ,$$

即 $OD \perp DC$,

$\therefore OD$ 为半径,

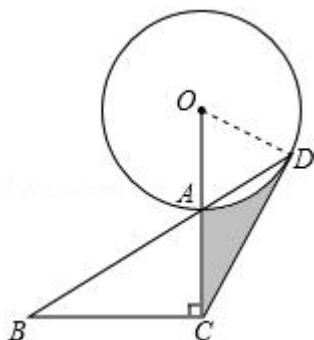
$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解: $\because AB = 4, \angle ACB = 90^\circ, \angle B = 30^\circ$,

$$\therefore OD = OA = AC = \frac{1}{2} AB = 2,$$

$$\text{由勾股定理得: } CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ODC} - S_{\text{扇形 AOD}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \frac{60\pi \times 2^2}{360} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi.$$



【点评】 本题考查了扇形的面积，切线的判定，含 30° 度角的直角三角形的性质，勾股定理，等边三角形的性质和判定的应用，主要考查学生综合运用性质进行推理和计算的能力，综合性比较强，有一定的难度.

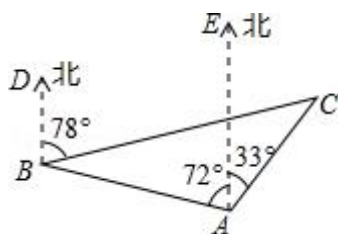
五、解答题 (满分 12 分)

23. (12 分) 某海域有 A、B、C 三艘船正在捕鱼作业，C 船突然出现故障，向 A、B 两船发出紧急求救信号，此时 B 船位于 A 船的北偏西 72° 方向，距 A 船 24 海里的海域，C 船位于 A 船的北偏东 33° 方向，同时又位于 B 船的北偏东 78° 方向.

(1) 求 $\angle ABC$ 的度数;

(2) A 船以每小时 30 海里的速度前去救援，问多长时间能到出事地点. (结果精确到 0.01 小时).

(参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$)



【考点】 TB: 解直角三角形的应用 - 方向角问题.

【专题】 12: 应用题.

【分析】(1) 根据两直线平行，同旁内角互补，即可得到 $\angle DBA$ 的度数，则 $\angle ABC$ 即可求得；

(2) 作 $AH \perp BC$ 于点 H ，分别在直角 $\triangle ABH$ 和直角 $\triangle ACH$ 中，利用三角函数求得 BH 和 CH 的长，则 BC 即可求得，进而求得时间.

【解答】解：(1) $\because BD \parallel AE$,

$$\therefore \angle DBA + \angle BAE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 108^\circ - 78^\circ = 30^\circ;$$

(2) 作 $AH \perp BC$ ，垂足为 H ，

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 72^\circ - 33^\circ - 30^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

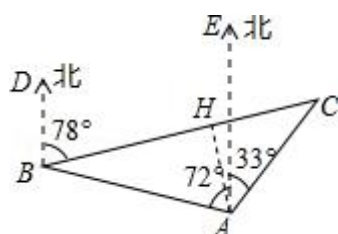
$$\therefore AH = \frac{1}{2}AB = 12,$$

$$\therefore \sin C = \frac{AH}{AC},$$

$$\therefore AC = \frac{AH}{\sin C} = \frac{12}{\sin 45^\circ} = 12\sqrt{2}.$$

$$\text{则 } A \text{ 到出事地点的时间是: } \frac{12\sqrt{2}}{30} \approx \frac{2 \times 1.414}{5} \approx 0.57 \text{ 小时.}$$

答：约 0.57 小时能到达出事地点.



【点评】本题主要考查了方向角含义，正确记忆三角函数的定义是解决本题的关键.

六、解答题 (满分 12 分)

24. (12 分) 国家推行“节能减排，低碳经济”政策后，低排量的汽车比较畅销，

某汽车经销商购进 A, B 两种型号的低排量汽车，其中 A 型汽车的进货单价比 B 型汽车的进货单价多 2 万元。花 50 万元购进 A 型汽车的数量与花 40 万元购进 B 型汽车的数量相同，销售中发现 A 型汽车的每周销量 y_A (台) 与售价 x (万元/台) 满足函数关系式 $y_A = -x + 20$ ，B 型汽车的每周销量 y_B (台) 与售价 x (万元/台) 满足函数关系式 $y_B = -x + 14$ 。

(1) 求 A、B 两种型号的汽车的进货单价；

(2) 已知 A 型汽车的售价比 B 型汽车的售价高 2 万元/台，设 B 型汽车售价为 t 万元/台。每周销售这两种车的总利润为 W 万元，求 W 与 t 的函数关系式，A、B 两种型号的汽车售价各为多少时，每周销售这两种车的总利润最大？最大总利润是多少万元？

【考点】 B7: 分式方程的应用； HE: 二次函数的应用。

【专题】 124: 销售问题。

【分析】 (1) 利用花 50 万元购进 A 型汽车的数量与花 40 万元购进 B 型汽车的数量相等，进而得出等式求出即可；

(2) 分别表示出两种汽车的利润进而得出函数关系式求出最值即可。

【解答】 解：(1) 设 A 种型号的汽车的进货单价为 m 万元，

依题意得： $\frac{50}{m} = \frac{40}{m-2}$ ，

解得： $m=10$ ，

检验： $m=10$ 时， $m \neq 0$ ， $m-2 \neq 0$ ，

故 $m=10$ 是原分式方程的解，

故 $m-2=8$ 。

答：A 种型号的汽车的进货单价为 10 万元，B 种型号的汽车的进货单价为 8 万元；

(2) 根据题意得出：

$$W = (t+2 - 10) [- (t+2) + 20] + (t - 8) (-t+14)$$

$$= -2t^2 + 48t - 256,$$

$$= -2(t - 12)^2 + 32,$$

$\because a = -2 < 0$ ，抛物线开口向下，

$\therefore$ 当 $t=12$ 时，W 有最大值为 32，

$$12+2=14,$$

答：A 种型号的汽车售价为 14 万元/台，B 种型号的汽车售价为 12 万元/台时，

每周销售这两种车的总利润最大，最大总利润是 32 万元.

【点评】 此题主要考查了二次函数的应用以及二次函数最值的求法，得出 W 与 x 的函数关系式是解题关键.

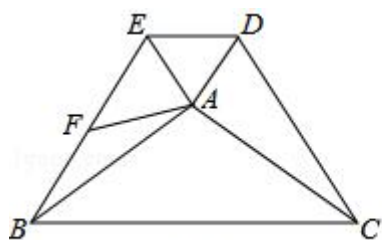
七、解答题（满分 12 分）

25. (12 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中， $AB=AC$ ， $AD=AE$ ， $\angle BAC + \angle EAD = 180^\circ$ ，

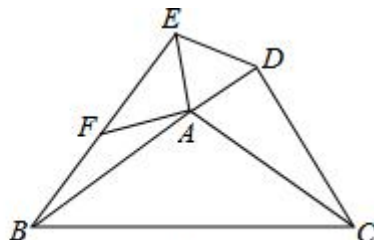
$\triangle ABC$ 不动， $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转，连接 BE、CD，F 为 BE 的中点，连接 AF.

(1) 如图①，当 $\angle BAE = 90^\circ$ 时，求证： $CD = 2AF$ ；

(2) 当 $\angle BAE \neq 90^\circ$ 时，(1) 的结论是否成立？请结合图②说明理由.



图①



图②

【考点】KD: 全等三角形的判定与性质; KH: 等腰三角形的性质; KX: 三角形中位线定理; R2: 旋转的性质.

【专题】152: 几何综合题.

【分析】(1) 因为 AF 是直角三角形 ABE 的中线, 所以 $BE=2AF$, 然后通过 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ 即可求得.

(2) 延长 EA 交 BC 于 G , 在 AG 上截取 $AH=AD$, 证出 $\triangle ABH \cong \triangle ACD$ 从而证得 $BH=CD$, 然后根据三角形的中位线等于底边的一半, 求得 $BH=2AF$, 即可求得.

【解答】(1) 证明: 如图①,

$$\therefore \angle BAC + \angle EAD = 180^\circ, \quad \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = 90^\circ,$$

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 中

$$\begin{cases} AE=AD \\ \angle BAE=\angle CAD=90^\circ \\ AB=AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CD=BE,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, F 为 BE 的中点,

$$\therefore BE=2AF,$$

$$\therefore CD=2AF.$$

(2) 成立,

证明: 如图②, 延长 EA 交 BC 于 G, 在 AG 上截取 AH=AD,

$$\therefore \angle BAC + \angle EAD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle DAC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle BAH = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BAH,$$

在 $\triangle ABH$ 与 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AH=AD \\ \angle BAH=\angle CAD \\ AB=AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABH \cong \triangle ACD \text{ (SAS)}$$

$$\therefore BH=DC,$$

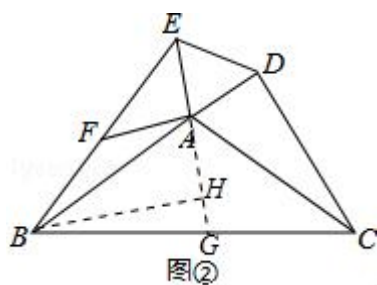
$$\therefore AD=AE, AH=AD,$$

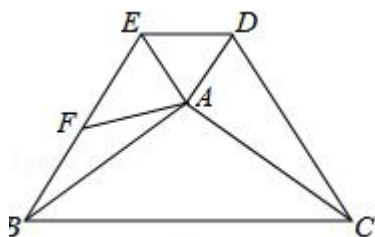
$$\therefore AE=AH,$$

$$\therefore EF=FB,$$

$$\therefore BH=2AF,$$

$$\therefore CD=2AF.$$





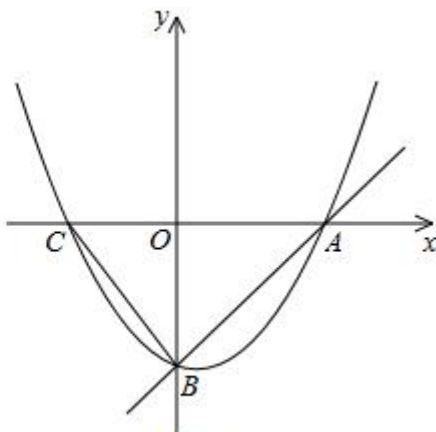
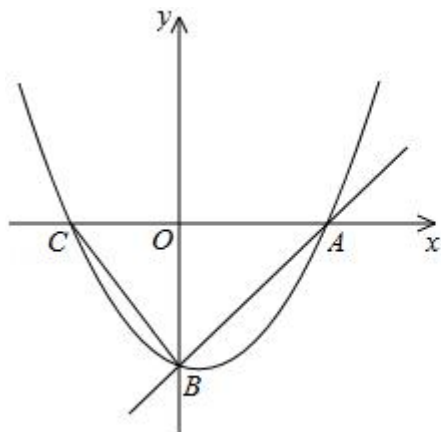
图①

【点评】 本题考查了三角形全等的判定和性质，等腰三角形的性质，三角形中位线的性质等．作出正确的辅助线是解题关键

八、解答题（满分 14 分）

26. （14 分）如图，直线 $y=x-4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点，抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 经过 A 、 B 两点，与 x 轴的另一个交点为 C ，连接 BC ．

- （1）求抛物线的解析式及点 C 的坐标；
- （2）点 M 在抛物线上，连接 MB ，当 $\angle MBA+\angle CBO=45^\circ$ 时，求点 M 的坐标；
- （3）点 P 从点 C 出发，沿线段 CA 由 C 向 A 运动，同时点 Q 从点 B 出发，沿线段 BC 由 B 向 C 运动， P 、 Q 的运动速度都是每秒 1 个单位长度，当 Q 点到达 C 点时， P 、 Q 同时停止运动，试问在坐标平面内是否存在点 D ，使 P 、 Q 运动过程中的某一时刻，以 C 、 D 、 P 、 Q 为顶点的四边形为菱形？若存在，直接写出点 D 的坐标；若不存在，说明理由．



备用图

【考点】HF：二次函数综合题；L8：菱形的性质；T7：解直角三角形.

【专题】16：压轴题.

【分析】(1) 首先求出点 A、B 的坐标，然后利用待定系数法求出抛物线的解析式，进而求出点 C 的坐标；

(2) 满足条件的点 M 有两种情形，需要分类讨论：

①当 $BM \perp BC$ 时，如答图 2-1 所示；

②当 BM 与 BC 关于 y 轴对称时，如答图 2-2 所示.

(3) $\triangle CPQ$ 的三边均可能成为菱形的对角线，以此为基础进行分类讨论：

①若以 CQ 为菱形对角线，如答图 3-1. 此时 $BQ=t$ ，菱形边长= t ；

②若以 PQ 为菱形对角线，如答图 3-2. 此时 $BQ=t$ ，菱形边长= t ；

③若以 CP 为菱形对角线，如答图 3-3. 此时 $BQ=t$ ，菱形边长= $5-t$.

【解答】解：(1) 直线解析式 $y=x-4$,

令 $x=0$, 得 $y=-4$;

令 $y=0$, 得 $x=4$.

$\therefore A(4, 0)$ 、 $B(0, -4)$.

$\therefore$ 点 A、B 在抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 上,

$$\therefore \begin{cases} \frac{16}{3}+4b+c=0 \\ c=-4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b=-\frac{1}{3} \\ c=-4 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为: $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-4$.

$$\text{令 } y=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-4=0,$$

解得: $x=-3$ 或 $x=4$,

∴ C (- 3, 0).

(2) $\angle MBA + \angle CBO = 45^\circ$,

设 M (x, y),

①当 $BM \perp BC$ 时, 如答图 2 - 1 所示.

∵ $\angle ABO = 45^\circ$,

∴ $\angle MBA + \angle CBO = 45^\circ$, 故点 M 满足条件.

过点 M_1 作 $M_1E \perp y$ 轴于点 E, 则 $M_1E = x$, $OE = -y$,

∴ $BE = 4 + y$.

∵ $\tan \angle M_1BE = \tan \angle BCO = \frac{4}{3}$,

∴ $\frac{x}{4+y} = \frac{4}{3}$,

∴ 直线 BM_1 的解析式为: $y = \frac{3}{4}x - 4$.

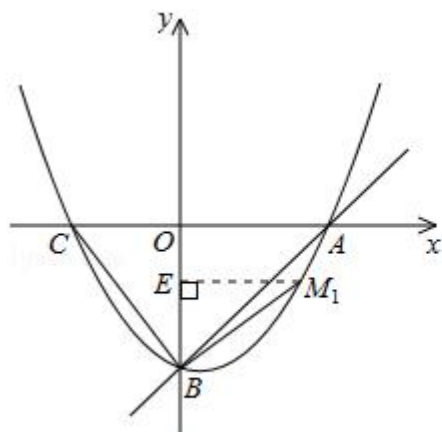
联立 $y = \frac{3}{4}x - 4$ 与 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4$,

得: $\frac{3}{4}x - 4 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4$,

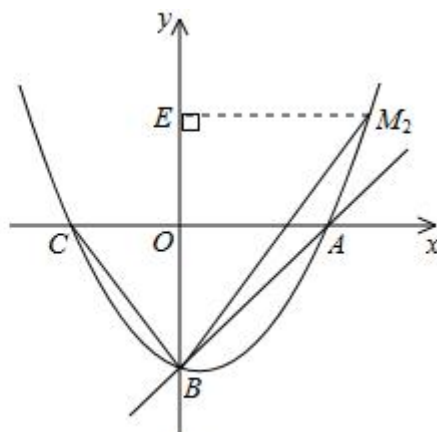
解得: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{13}{4}$,

∴ $y_1 = -4$, $y_2 = -\frac{25}{16}$,

∴ $M_1 (\frac{13}{4}, -\frac{25}{16})$;



答图2-1



答图2-2

②当 BM 与 BC 关于 y 轴对称时，如答图 2 - 2 所示.

$$\because \angle ABO = \angle MBA + \angle MBO = 45^\circ, \quad \angle MBO = \angle CBO,$$

$$\therefore \angle MBA + \angle CBO = 45^\circ,$$

故点 M 满足条件.

过点 M_2 作 $M_2E \perp y$ 轴于点 E,

则 $M_2E = x$, $OE = y$,

$$\therefore BE = 4 + y.$$

$$\because \tan \angle M_2BE = \tan \angle CBO = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{x}{4+y} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{直线 } BM_2 \text{ 的解析式为: } y = \frac{4}{3}x - 4.$$

$$\text{联立 } y = \frac{4}{3}x - 4 \text{ 与 } y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4 \text{ 得: } \frac{4}{3}x - 4 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4,$$

$$\text{解得: } x_1 = 0, \quad x_2 = 5,$$

$$\therefore y_1 = -4, \quad y_2 = \frac{8}{3},$$

$$\therefore M_2 \left(5, \frac{8}{3} \right).$$

综上所述，满足条件的点 M 的坐标为: $\left(\frac{13}{4}, -\frac{25}{16} \right)$ 或 $\left(5, \frac{8}{3} \right)$.

(3) 设 $\angle BCO = \theta$, 则 $\tan\theta = \frac{4}{3}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

假设存在满足条件的点 D, 设菱形的对角线交于点 E, 设运动时间为 t.

①若以 CQ 为菱形对角线, 如答图 3-1. 此时 $BQ = t$, 菱形边长 = t.

$$\therefore CE = \frac{1}{2}CQ = \frac{1}{2}(5-t).$$

$$\text{在 Rt}\triangle PCE \text{ 中, } \cos\theta = \frac{CE}{CP} = \frac{\frac{1}{2}(5-t)}{t} = \frac{3}{5},$$

$$\text{解得 } t = \frac{25}{11}.$$

$$\therefore CQ = 5 - t = \frac{30}{11}.$$

过点 Q 作 $QF \perp x$ 轴于点 F,

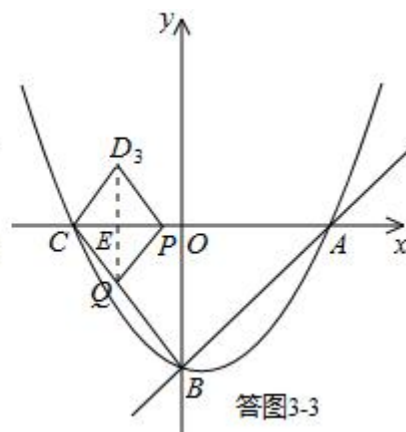
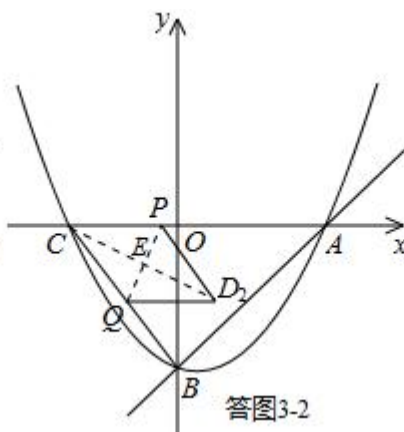
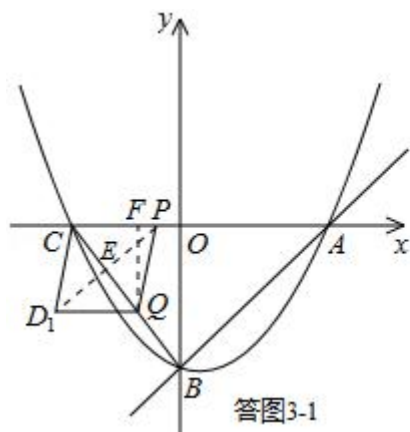
$$\text{则 } QF = CQ \cdot \sin\theta = \frac{24}{11}, \quad CF = CQ \cdot \cos\theta = \frac{18}{11},$$

$$\therefore OF = 3 - CF = \frac{15}{11}.$$

$$\therefore Q \left(-\frac{15}{11}, -\frac{24}{11} \right).$$

$\therefore$ 点 D_1 与点 Q 横坐标相差 t 个单位,

$$\therefore D_1 \left(-\frac{40}{11}, -\frac{24}{11} \right);$$



②若以 PQ 为菱形对角线, 如答图 3-2. 此时 $BQ = t$, 菱形边长 = t.

$$\therefore BQ = CQ = t,$$

$$\therefore t = \frac{5}{2}, \text{ 点 Q 为 BC 中点,}$$

$$\therefore Q \left(-\frac{3}{2}, -2 \right).$$

$\therefore$ 点 D_2 与点 Q 横坐标相差 t 个单位,

$$\therefore D_2 (1, -2);$$

③若以 CP 为菱形对角线, 如答图 3-3. 此时 $BQ=t$, 菱形边长 $=5-t$.

$$\text{在 Rt}\triangle CEQ \text{ 中, } \cos\theta = \frac{CE}{CQ} = \frac{\frac{1}{2}t}{5-t} = \frac{3}{5},$$

$$\text{解得 } t = \frac{30}{11}.$$

$$\therefore OE = 3 - CE = 3 - \frac{1}{2}t = \frac{18}{11}, \quad D_3E = QE = CQ \cdot \sin\theta = \left(5 - \frac{30}{11}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{20}{11}.$$

$$\therefore D_3 \left(-\frac{18}{11}, \frac{20}{11} \right).$$

综上所述, 存在满足条件的点 D , 点 D 坐标为: $\left(-\frac{40}{11}, -\frac{24}{11} \right)$ 或 $(1, -2)$

$$\text{或 } \left(-\frac{18}{11}, \frac{20}{11} \right).$$

【点评】 本题是二次函数压轴题, 着重考查了分类讨论的数学思想, 考查了二次函数的图象与性质、解直角三角形 (或相似)、菱形、一次函数、解方程等知识点, 难度较大. 第 (3) 问为存在型与运动型的综合问题, 涉及两个动点, 注意按照菱形对角线进行分类讨论, 做到条理清晰、不重不漏.