

2016 年厦门市中考数学试卷

一、选择题（本大题 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 1° 等于 ()

- A. $10'$ B. $12'$ C. $60'$ D. $100'$

2. 方程 $x^2 - 2x = 0$ 的根是 ()

- A. $x_1 = x_2 = 0$ B. $x_1 = x_2 = 2$ C. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ D. $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

3. 如图 1, 点 E, F 在线段 BC 上, $\triangle ABF$ 与 $\triangle DCE$ 全等, 点 A 与点 D, 点 B 与点 C 是对应顶点, AF 与 DE 交于点 M, 则 $\angle DCE =$ ()

- A. $\angle B$ B. $\angle A$ C. $\angle EMF$ D. $\angle AFB$

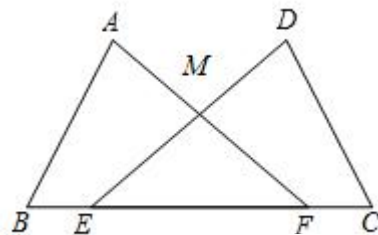


图 1

4. 不等式组 $\begin{cases} 2x < 6 \\ x + 1 \geq -4 \end{cases}$ 的解集是 ()

- A. $-5 \leq x < 3$ B. $-5 < x \leq 3$ C. $x \geq -5$ D. $x < 3$

5. 如图 2, DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 过点 C 作 $CF \parallel BD$ 交 DE 的延长线于点 F, 则下列结论正确的是 ()

- A. $EF = CF$ B. $EF = DE$ C. $CF < BD$ D. $EF > DE$

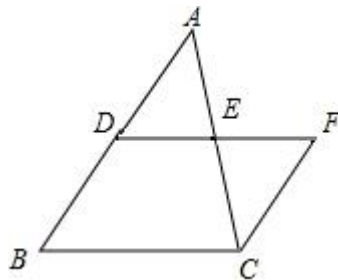


图 2

6. 已知甲、乙两个函数图象上部分点的横坐标 x 与对应的纵坐标 y 分别如下表所示, 两个函数图象仅有一个交点, 则交点的纵坐标 y 是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

甲

x	1	2	3	4
y	0	1	2	3

乙

x	-2	2	4	6
y	0	2	3	4

7. 已知 $\triangle ABC$ 的周长是 l , $BC = l - 2AB$, 则下列直线一定为 $\triangle ABC$ 的对称轴的是 ()

- A. $\triangle ABC$ 的边 AB 的垂直平分线 B. $\angle ACB$ 的平分线所在的直线
C. $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线所在的直线 D. $\triangle ABC$ 的边 AC 上的高所在的直线

8. 已知压强的计算公式是 $P = \frac{F}{S}$, 我们知道, 刀具在使用一段时间后, 就好变钝, 如果刀刃磨薄, 刀具就会变得锋利. 下列说法中, 能正确解释刀具变得锋利这一现象的是 ()

- A. 当受力面积一定时, 压强随压力的增大而增大
B. 当受力面积一定时, 压强随压力的增大而减小

- C. 当压力一定时, 压强随受力面积的减小而减小
D. 当压力一定时, 压强随受力面积的减小而增大

9. 动物学家通过大量的调查估计, 某种动物活到 20 岁的概率为 0.8, 活到 25 岁的概率为 0.6, 则现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是 ()

- A. 0.8 B. 0.75 C. 0.6 D. 0.48

10. 设 $681 \times 2019 - 681 \times 2018 = a$, $2015 \times 2016 - 2013 \times 2018 = b$, $\sqrt{678^2 + 1358 + 690 + 678} = c$,

则 a , b , c 的大小关系是 ()

- A. $b < c < a$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

二、填空题 (本大题有 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

11. 不透明的袋子里装有 2 个白球, 1 个红球, 这些球除颜色外无其他差别, 从袋子中随机摸出 1 个球, 则摸出白球的概率是_____.

12. 计算 $\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} =$ _____.

13. 如图 3, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, 且 $AD = 2$, $DB = 3$, 则 $\frac{DE}{BC} =$ _____.

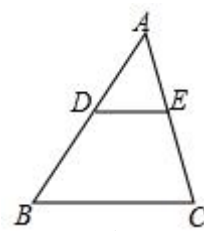


图 3

14. 公元 3 世纪, 我国古代数学家刘徽就能利用近似公式 $\sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$ 得到的近似值. 他的算法是:

先将 $\sqrt{2}$ 看出 $\sqrt{1^2 + 1}$: 由近似公式得到 $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2 \times 1} = \frac{3}{2}$; 再将 $\sqrt{2}$ 看成 $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)}$, 由近似值公

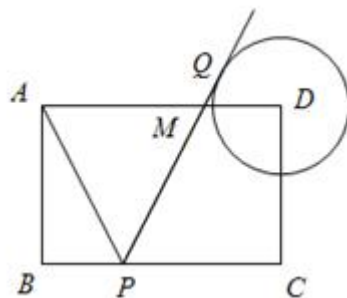
式得到 $\sqrt{2} \approx \frac{3}{2} + \frac{-\frac{1}{4}}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{17}{12}$; ……依此算法, 所得 $\sqrt{2}$ 的近似值会越来越精确. 当 $\sqrt{2}$ 取得近似值 $\frac{577}{408}$ 时,

近似公式中的 a 是 _____, r 是_____.

15. 已知点 $P(m, n)$ 在抛物线 $y = ax^2 - x - a$ 上, 当 $m \geq -1$ 时, 总有 $n \leq 1$ 成立, 则 a 的取值范围是 _____.

16. 如图 4, 在矩形 ABCD 中, $AD = 3$, 以顶点 D 为圆心, 1 为半径作 $\odot D$, 过边 BC 上的一点 P 作射线 PQ 与 $\odot D$ 相切于点 Q, 且交边 AD 于点 M, 连接 AP, 若 $AP + PQ = 2\sqrt{6}$, $\angle APB = \angle QPC$, 则 $\angle QPC$ 的大小约

为_____度_____分. (参考数据: $\sin 11^\circ 32' = \frac{1}{5}$, $\tan 36^\circ 52' = \frac{3}{4}$)



三、解答题 (共 86 分)

图 4

17. (7 分) 计算: $10 + 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \div \frac{1}{5}$

18. (7 分) 解方程组 $\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x + y = -8 \end{cases}$

19. (7 分) 某公司内设四个部门, 2015 年各部门人数及相应的每人所创年利润如下表所示, 求该公式 2015 年平均每人所创年利润.

部门	人数	每人所创年利润/万元
A	1	36
B	6	27
C	8	16
D	11	20

20. (7 分) 如图 5, AE 与 CD 交于点 O, $\angle A = 50^\circ$, $OC = OE$, $\angle C = 25^\circ$, 求证: $AB \parallel CD$.

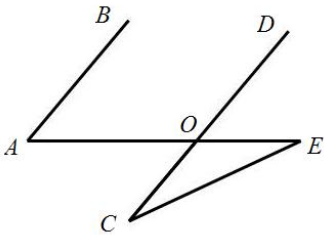


图 5

21. (7 分) 已知一次函数 $y = kx + 2$, 当 $x = -1$ 时, $y = 1$, 求此函数的解析式, 并在平面直角坐标系中画出此函数图象.

22. (7 分) 如图 6, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 4$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° , 若点 A, B 的对应点分别我点 D, E , 画出旋转后的三角形, 并求点 A 与点 D 之间的距离. (不要求尺规作图)

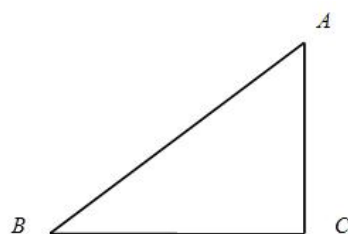


图 6

23. (7 分) 如图 7, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BCD$ 是钝角, $AB = AD$, BD 平分 $\angle ABC$, 若 $CD = 3$, $BD = 2\sqrt{6}$,

$\sin \angle DBC = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求对角线 AC 的长.

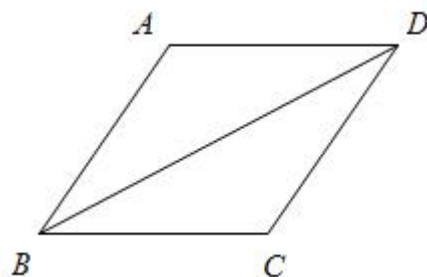


图 7

24. (7 分) 如图 8, 是药品研究所所测得的某种新药在成人用药后, 血液中的药物浓度 y (微克/毫升) 用药后的时间 x (小时) 变化的图象 (图象由线段 OA 与部分双曲线 AB 组成). 并测得当 $y = a$ 时, 该药物才具有疗效. 若成人用药 4 小时, 药物开始产生疗效, 且用药后 9 小时, 药物仍具有疗效, 则成人用药后, 血液中药物浓则至少需要多长时间达到最大度?

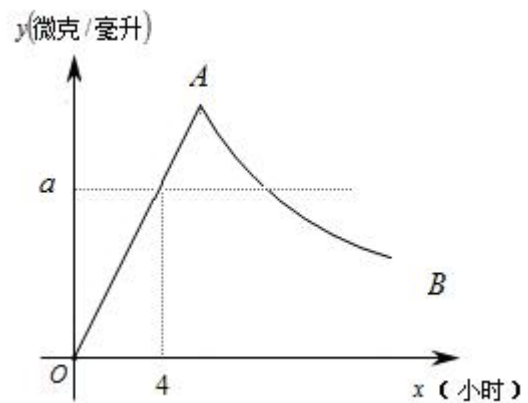


图 8

25. (7 分) 如图 9, 在平面直角坐标系中 xOy 中, 已知点 $A(1, m+1)$, $B(a, m+1)$, $C(3, m+3)$, $D(1, m+a)$, $m > 0$, $1 < a < 3$, 点 $P(n-m, n)$ 是四边形 $ABCD$ 内的一点, 且 $\triangle PAD$ 与 $\triangle PBC$ 的面积相等, 求 $n-m$ 的值.

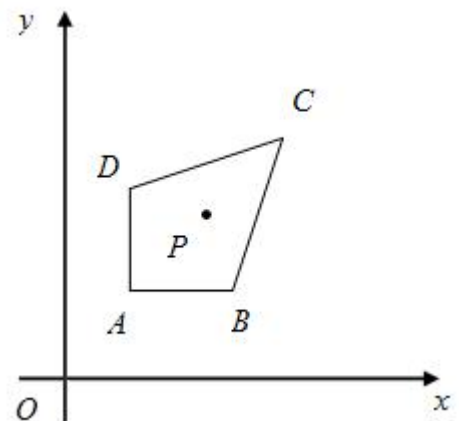


图 9

26. (11 分) 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 $\odot O$ 上, 点 D 在半径 OA 上 (不与点 O , A 重合).
- (1) 如图 10, 若 $\angle COA = 60^\circ$, $\angle CDO = 70^\circ$, 求 $\angle ACD$ 的度数.
 - (2) 如图 11, 点 E 在线段 OD 上 (不与 O , D 重合), CD 、 CE 的延长线分别交 $\odot O$ 于点 F 、 G , 连接 BF , BG , 点 P 是 CO 的延长线与 BF 的交点, 若 $CD = 1$, $BG = 2$, $\angle OCD = \angle OBG$, $\angle CFP = \angle CPF$, 求 CG 的长.

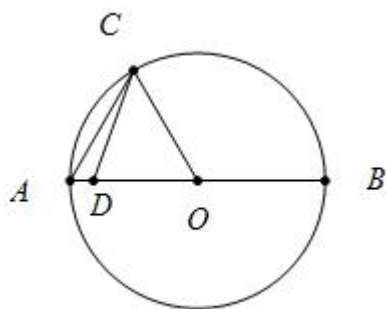


图 10

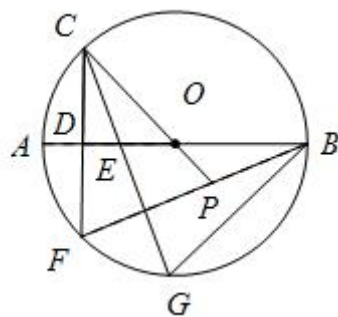


图 10

27. (12 分) 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与直线 $y = -4x + m$ 相交于第一象限不同的两点, $A(5, n)$, $B(e, f)$

(1) 若点 B 的坐标为 $(3, 9)$, 求此抛物线的解析式;

(2) 将此抛物线平移, 设平移后的抛物线为 $y = -x^2 + px + q$, 过点 A 与点 $(1, 2)$, 且 $m - q = 25$,

在平移过程中, 若抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 向下平移了 S ($S > 0$) 个单位长度, 求 S 的取值范围.

2016 年厦门市中考数学试卷答案与解析

一、选择题（本大题 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 1° 等于 ()

- A. $10'$ B. $12'$ C. $60'$ D. $100'$

解析：本题属于基础题，主要考察度数的单位换算。

答案：C

2. 方程 $x^2 - 2x = 0$ 的根是 ()

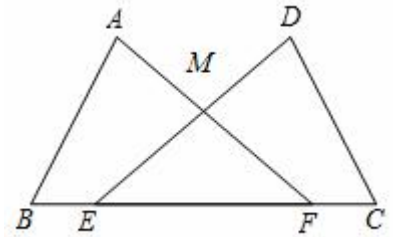
- A. $x_1 = x_2 = 0$ B. $x_1 = x_2 = 2$ C. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ D. $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

解析：本题属于基础题，主要考察一元二次方程的解，解得 $x(x-2)=0$;故答案选择C。

答案：C

3. 如图 1, 点 E, F 在线段 BC 上, $\triangle ABF$ 与 $\triangle DCE$ 全等, 点 A 与点 D, 点 B 与点 C 是对应顶点, AF 与 DE 交于点 M, 则 $\angle DCE =$ ()

- A. $\angle B$ B. $\angle A$ C. $\angle EMF$ D. $\angle AFB$



解析：本题属于基础题，主要考察三角形全等的性质，根据全等对应角相等，得到 $\angle DEC = \angle AFB$.

答案：D

4. 不等式组 $\begin{cases} 2x < 6 \\ x+1 \geq -4 \end{cases}$ 的解集是 ()

- A. $-5 \leq x < 3$ B. $-5 < x \leq 3$ C. $x \geq -5$ D. $x < 3$

解析：本题属于基础题，主要考察解不等式组，分别解得两个不等式的解为： $x < 3$ 和 $x \geq -5$ 综合解集为 $-5 \leq x < 3$ 。

答案：A

5. 如图 2, DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 过点 C 作 $CF \parallel BD$ 交 DE 的延长线于点 F, 则下列结论正确的是 ()

- A. $EF = CF$ B. $EF = DE$ C. $CF < BD$ D. $EF > DE$

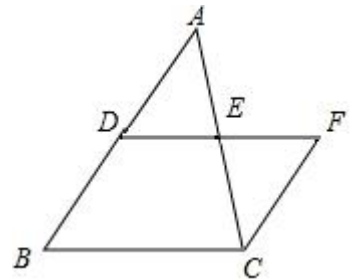


图 2

解析：本题主要考察中位线和平行四边形的性质，由于 $DE \parallel BC, CF \parallel BD$ ，所以四边形 $BD CF$ 为□，故，

$$DF = BC, \text{ 又因为 } DE = \frac{1}{2} BC, \text{ 所以 } DE = \frac{1}{2} DF \text{ 故 } DE = FE.$$

答案：B

6. 已知甲、乙两个函数图象上部分点的横坐标 x 与对应的纵坐标 y 分别如下表所示，两个函数图象仅有一个交点，则交点的纵坐标 y 是（ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

甲				
x	1	2	3	4
y	0	1	2	3

乙				
x	-2	2	4	6
y	0	2	3	4

解析：本题主要考察一次函数的交点问题，由甲乙两个表可以得到甲乙的交点 (4,3)。

答案：D

7. 已知 $\triangle ABC$ 的周长是 l ， $BC = l - 2AB$ ，则下列直线一定为 $\triangle ABC$ 的对称轴的是（ ）

- A. $\triangle ABC$ 的边 AB 的垂直平分线 B. $\angle ACB$ 的平分线所在的直线
C. $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线所在的直线 D. $\triangle ABC$ 的边 AC 上的高所在的直线

解析：本题主要考察等腰三角形的性质，由 $BC = l - AB$ 可以得到 $AB = AC$ ，故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，由等腰三角形三线合一可以等到，底边 BC 的中线所在直线一定为 $\triangle ABC$ 的对称轴。

答案：C

8. 已知压强的计算公式是 $P = \frac{F}{S}$ ，我们知道，刀具在使用一段时间后，就好变钝，如果刀刃磨薄，刀具就会变得锋利。下列说法中，能正确解释刀具变得锋利这一现象的是（ ）

- A. 当受力面积一定时，压强随压力的增大而增大
B. 当受力面积一定时，压强随压力的增大而减小
C. 当压力一定时，压强随受力面积的减小而减小
D. 当压力一定时，压强随受力面积的减小而增大

解析：本题主要考察反比例函数和正比例函数的增减性。由 $P = \frac{F}{S}$ 可以知道，当受力面积 S 一定时，压强 P 和压力 F 是正比例函数，因为 $S > 0$ ，所以压强随压力的增大而增大，排除 B 选项；当压力 F 一定时，压强 P 和受力面积 S 是反比例函数，因为 $F > 0$ ，所以压强随受力面积的减小而增大，排除 C 选项。但是根据题意刀刃磨薄，刀具就会变得锋利，可以知道是受力面积变小。

答案：D

9. 动物学家通过大量的调查估计，某种动物活到 20 岁的概率为 0.8，活到 25 岁的概率为 0.6，则现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是（ ）

- A. 0.8 B. 0.75 C. 0.6 D. 0.48

解析：设共有这种动物 x 只，则活到 20 岁的只数为 $0.8x$ ，活到 25 岁的只数为 $0.6x$ ，故现年 20 岁到这种动物活到 25 岁的概率为 $\frac{0.6x}{0.8x} = 0.75$

答案：B

10. 设 $681 \times 2019 - 681 \times 2018 = a$ ， $2015 \times 2016 - 2013 \times 2018 = b$ ， $\sqrt{678^2 + 1358 + 690 + 678} = c$ ，则 a ， b ， c 的大小关系是（ ）

- A. $b < c < a$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

解析： $a = 681 \times 2019 - 681 \times 2018 = 681 \times (2019 - 2018) = 681$ ； $b = 2015 \times (2015 + 1) -$

$$(2015 - 2)(2015 + 3) = 2015^2 + 2015 - 2015^2 - 3 \times 2015 + 2 \times 2015 + 6 = 2015(1 - 3 + 2)$$

$$+ 6 = 6, c = \sqrt{678^2 + 678 + 680 + 690 + 678} = \sqrt{678 \times (678 + 1 + 1) + 680 + 690}$$

$$= \sqrt{678 \times 680 + 680 + 690} = \sqrt{680 \times (678 + 1) + 690} = \sqrt{680 \times (680 - 1) + 690}$$

$$= \sqrt{680^2 + 10}, a = \sqrt{(680 + 1)^2} = \sqrt{680^2 + 1360 + 1^2}, b < c < a$$

答案：A

二、填空题（本大题有 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

11. 不透明的袋子里装有 2 个白球，1 个红球，这些球除颜色外无其他差别，从袋子中随机摸出 1 个球，则摸出白球的概率是_____.

解析：算出所有摸出球的事件，从中找出符合题意的摸出白球的事件，然后代入概率公式

答案： $\frac{2}{3}$

12. 计算 $\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} =$ _____.

解析：直接同分母相加减

答案：1

13. 如图 3，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ，且 $AD = 2$ ， $DB = 3$ ，则 $\frac{DE}{BC} =$ _____.

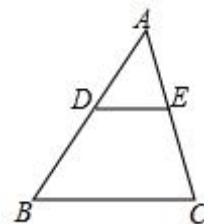


图 3

解析：证明出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，所以 AD 与 AB 为对应边，DE 与 BC 为对应边，所以求出相似比为 $\frac{2}{5}$

答案： $\frac{2}{5}$

14. 公元 3 世纪，我国古代数学家刘徽就能利用近似公式 $\sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$ 得到的近似值. 他的算法是：

先将 $\sqrt{2}$ 看出 $\sqrt{1^2 + 1}$ ：由近似公式得到 $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2 \times 1} = \frac{3}{2}$ ；再将 $\sqrt{2}$ 看成 $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)}$ ，由近似值公

式得到 $\sqrt{2} \approx \frac{3}{2} + \frac{-\frac{1}{4}}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{17}{12}$ ；……依此算法，所得 $\sqrt{2}$ 的近似值会越来越精确. 当 $\sqrt{2}$ 取得近似值 $\frac{577}{408}$ 时，

近似公式中的 a 是 _____， r 是_____.

解析: 解: 依题
$$\begin{cases} a^2 + r = 2 \\ a + \frac{r}{2a} = \frac{577}{408} \end{cases}$$

$$\therefore a + \frac{r}{2a} = \frac{2a^2 + r}{2a} = \frac{a^2 + a^2 + r}{2a} = \frac{577}{408}$$

$$\therefore \frac{a^2 + 2}{2a} = \frac{577}{408}$$

$$\therefore 408(a^2 + 2) = 2a \cdot 577$$

$$\therefore 204a^2 - 577a + 408 = 0$$

$$\therefore (12a - 17)(17a - 24) = 0$$

$$\therefore a_1 = \frac{17}{12}, a_2 = \frac{24}{17}$$

$$\therefore r = 2 - a^2 \text{ 得, } r_1 = -\frac{1}{144}, r_2 = \frac{2}{289}$$

答案: $\therefore a_1 = \frac{17}{12}, a_2 = \frac{24}{17}, r_1 = -\frac{1}{144}, r_2 = \frac{2}{289}$

15. 已知点 $P(m, n)$ 在抛物线 $y = ax^2 - x - a$ 上, 当 $m \geq -1$ 时, 总有 $n \leq 1$ 成立, 则 a 的取值范围是 _____.

解析: 题目中由解析式易得顶点坐标是 $\left(\frac{1}{2a}, \frac{-4a^2 - 1}{4a}\right)$, 条件中要求满,

成立, 则抛物线开口必须 $a < 0$ 才能符合题意, 分类讨论:

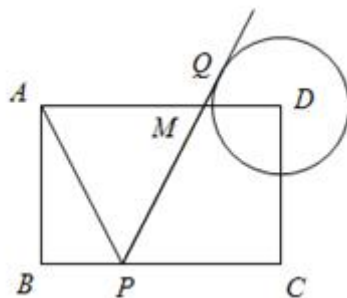
(1) 当 $\frac{1}{2a} \leq -1$ 时, 将 $m = -1$ 代入得 $a + 1 - a \leq 1$ 成立, 解得 $-\frac{1}{2} \leq a <$

(2) 当 $\frac{1}{2a} > -1$ 时, $\frac{-4a^2 - 1}{4a} \leq 1$, 无解

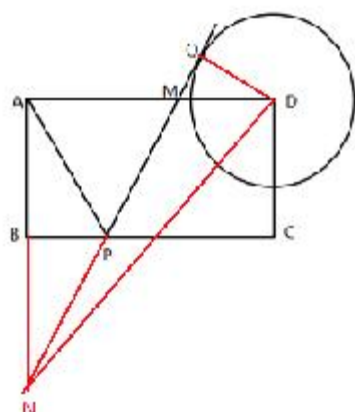
答案: $-\frac{1}{2} \leq a < 0$

16. 如图 4, 在矩形 ABCD 中, $AD = 3$, 以顶点 D 为圆心, 1 为半径作 $\odot D$, 过边 BC 上的一点 P 作射线 PQ 与 $\odot D$ 相切于点 Q, 且交边 AD 于点 M, 连接 AP, 若 $AP + PQ = 2\sqrt{6}$, $\angle APB = \angle QPC$, 则 $\angle QPC$ 的大小约为 _____ 度

分. (参考数据: $\sin 11^\circ 32' = \frac{1}{5}$, $\tan 36^\circ 52' = \frac{3}{4}$)



解析：延长 MP 、 AB 交于点 N ，连接 DQ 、 DN ，如图：



$$\because \angle APB = \angle QPC, \angle BPN = \angle QPC$$

$$\therefore \angle APB = \angle BPN, \text{ 即容易得到 } AP = PN,$$

$$\text{由 } AP + QP = 2\sqrt{6}, \text{ 得 } QN = 2\sqrt{6},$$

$$\text{勾股定理得 } DN = 5, AN = 4,$$

在 $\triangle ADN$ 中，

$$\tan \angle AND = \frac{3}{4} = \tan 36^\circ 52'$$

在 $\triangle QDN$ 中，

$$\sin \angle QND = \frac{1}{5} = \sin 11^\circ 32'$$

答案： $64^\circ 40'$

三、解答题（共 86 分）

17. (7 分) 计算： $10 + 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \div \frac{1}{5}$

$$\text{解：原式} = 10 + 8 \times \frac{1}{4} - 2 \div \frac{1}{5}$$

$$= 10 + 2 - 2 \times 5$$

$$= 2$$

18. (7 分) 解方程组 $\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x + y = -8 \end{cases}$

解：
$$\begin{cases} x + y = 1(1) \\ 4x + y = -8(2) \end{cases}$$

②-①得

$$3x = -9$$

$$x = -3$$

把 $x = -3$ 代入①中得

$$y = 4$$

所以解为
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$$

19. (7 分) 某公司内设四个部门，2015 年各部门人数及相应的每人所创年利润如下表所示，求该公式 2015 年平均每人所创年利润.

部门	人数	每人所创年利润/万元
A	1	36
B	6	27
C	8	16
D	11	20

解：设该公司2015年平均每人所创年利润为x万元.

$$x = \frac{36 \times 1 + 27 \times 6 + 16 \times 8 + 20 \times 11}{1 + 6 + 8 + 11}$$

=21

答：该公司 2015 年平均每人所创年利润为 21 万元。

20. (7 分) 如图 5，AE 与 CD 交于点 O， $\angle A = 50^\circ$ ， $OC = OE$ ， $\angle C = 25^\circ$ ，求证：AB//CD.

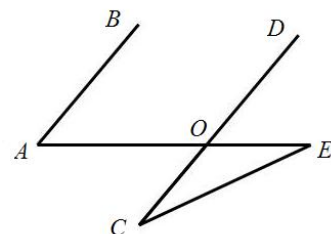


图 5

解：

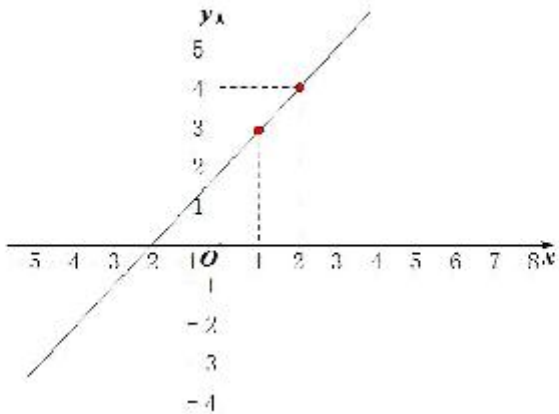
$\because OC = OE$
 $\therefore \angle OEC = \angle OCE$
 $\because \angle C = 25^\circ$
 $\therefore \angle OEC = \angle OCE = 25^\circ$
 $\therefore \angle DOE = \angle OEC + \angle OCE = 25^\circ + 25^\circ = 50^\circ$
 $\because \angle A = 50^\circ$
 $\therefore AB \parallel CD$

21. (7 分) 已知一次函数 $y = kx + 2$ ，当 $x = -1$ 时， $y = 1$ ，求此函数的解析式，并在平面直角坐标系中画出此函数图象.

解： $\because$ 一次函数 $y = kx + 2$ ，当 $x = -1$ 时 $y = 1$

$\therefore -k + 2 = 1$
 $\therefore k = 1$
 $\therefore y = x + 2$

x	1	2
y	3	4



22. (7 分) 如图 6，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 4$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° ，若点 A ， B 的对应点分别我点 D ， E ，画出旋转后的三角形，并求点 A 与点 D 之间的距离. (不要求尺规作图)

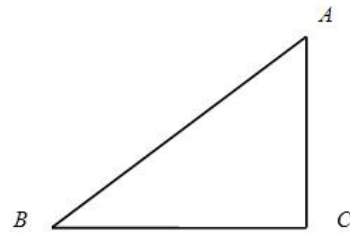


图 6

解：

连结 AD

在直角三角形 ABC 中

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AB = 5, BC = 4$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\therefore AC = 3$$

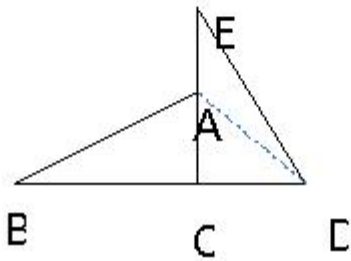
$$AC = CD$$

$\triangle ACD$ 为等腰直角三角形

$$\therefore AC = CD = 3$$

$$\therefore AD = CD + AC$$

$$AD = 3\sqrt{2}$$



23. (7 分) 如图 7, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BCD$ 是钝角, $AB = AD$, BD 平分 $\angle ABC$, 若 $CD = 3$, $BD = 2\sqrt{6}$,

$\sin \angle DBC = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求对角线 AC 的长.

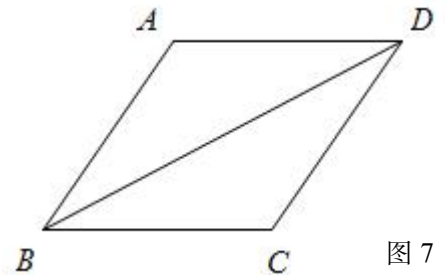


图 7

解：依题作四边形 $ABCD$ ，过点 D 做 DE 垂直 BC 交 BC 的延长线于点 E AC ， BD 相较于点 O

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle BED \text{ 中, } BD = 2\sqrt{6}, \sin\angle CBD = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \frac{DE}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{DE}{2\sqrt{6}}$$

$$\therefore DE = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = 4$$

$$\text{在 } Rt\triangle CED \text{ 中, } CD = 3 \therefore CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = 1$$

$$\therefore BC = BE - CE = 3$$

$$\therefore BC = CD \quad \therefore \angle 1 = \angle 3$$

$$\therefore BD \text{ 平分 } \angle ABC$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 3 \quad \therefore \angle 4 = \angle 1$$

$$\therefore AD \parallel BC$$

$$\therefore AD = AB$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 4 \quad \therefore \angle 2 = \angle 3$$

$$\therefore AB \parallel DC$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形}$$

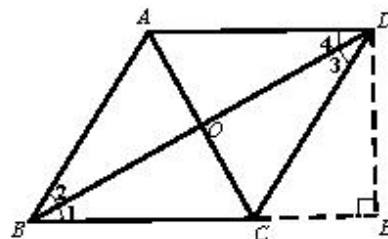
$$\therefore BC = CD$$

$$\therefore \square ABCD \text{ 是菱形} \quad \therefore AC, BD \text{ 互相垂直平分}$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle BOC \text{ 中, } BC = 3, \sin\angle CBD = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore OC = \sin\angle CBD \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = \sqrt{3}$$

$$\therefore AC = 2OC = 2\sqrt{3}$$



24. (7 分) 如图 8，是药品研究所所测得的某种新药在成人用药后，血液中的药物浓度 y （微克/毫升）用药后的时间 x （小时）变化的图象（图象由线段 OA 与部分双曲线 AB 组成），并测得当 $y = a$ 时，该药物才具有疗效。若成人用药 4 小时，药物开始产生疗效，且用药后 9 小时，药物仍具有疗效，则成人用药后，血液中药浓度至少需要多长时间达到最大度？

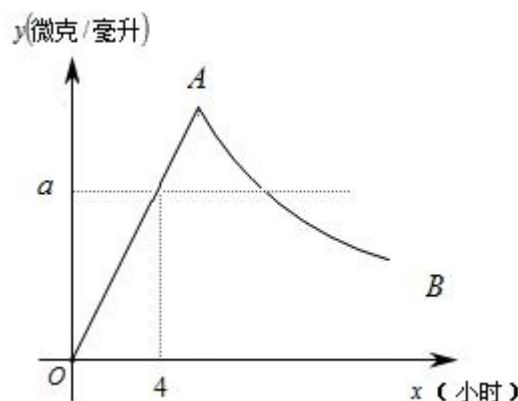


图 8

解：令 $OA: y = mx, m > 0$; $AB: y = \frac{k}{x}, k > 0$.

又 OA 经过 $(4, a)$, $\therefore a = 4m, m = \frac{a}{4} \therefore OA: y = \frac{a}{4}x$

过 C 点作 CD 平行 x 轴交 AB 于 D .

$\therefore y_D = y_C = a$, 将 $y_D = a$ 代入 $AB: y = \frac{k}{x}, k > 0 \therefore x_D = \frac{k}{a}$.

$\therefore$ 用药后 9 小时药物仍然具有疗效, 所以 $\therefore x_D = \frac{k}{a} \geq 9, k \geq 9a$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{a}{4}x \\ y = \frac{k}{x} \end{cases} \Rightarrow x_A^2 = \frac{4k}{a} \geq 36 \Rightarrow x_A \geq 6$$

$\therefore$ 药物浓度至少需要 6 个小时达到最大。

25. (7 分) 如图 9, 在平面直角坐标系中 xOy 中, 已知点 $A(1, m+1)$, $B(a, m+1)$, $C(3, m+3)$, $D(1, m+a)$, $m > 0$, $1 < a < 3$, 点 $P(n-m, n)$ 是四边形 $ABCD$ 内的一点, 且 $\triangle PAD$ 与 $\triangle PBC$ 的面积相等, 求 $n-m$ 的值.

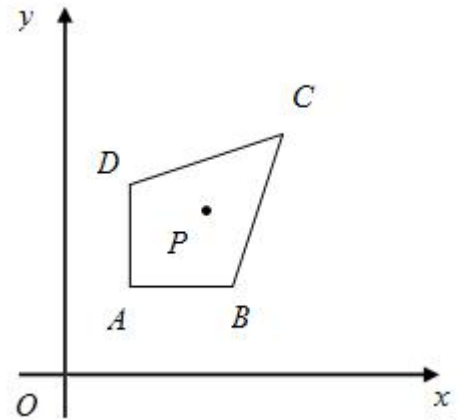


图 9

解：依题作图，过点 P 作 PQ 平行于 x 轴，交 BC 于点 Q ，作 PE 垂直 AD 于点 E

$$\therefore AB \parallel x \text{ 轴}, AD \parallel y \text{ 轴}, E(1, n)$$

$$\therefore PE = n - m - 1, AD = a - 1$$

$$\therefore S_{\triangle PAD} = \frac{1}{2} AD \cdot PE = \frac{1}{2} (a - 1)(n - m - 1)$$

设 $\triangle PQC$ 的高为 h_1 ， $\triangle PBC$ 的高为 h_2 ，

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle PBC} &= S_{\triangle PQC} + S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot h_2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot (h_1 + h_2) \end{aligned}$$

$$\because h_1 + h_2 = m + 3 - (m + 1) = 2$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot 2 = PQ$$

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$

$$\because B(a, m+1) \quad C(3, m+3)$$

$$\therefore \text{求得设直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = \frac{2}{3-a}x + m + 3 - \frac{6}{3-a}$$

$$\text{令 } y = n, \text{ 求得 } x = \frac{(n-m-3)(3-a)}{2} + 3$$

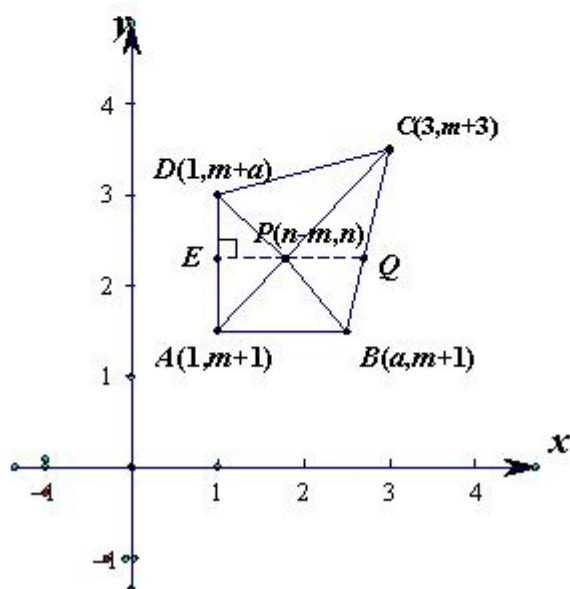
$$\begin{aligned} \therefore PQ &= \frac{(n-m-3)(3-a)}{2} + 3 - (n-m) \\ &= \frac{(n-m-3)(1-a)}{2} \end{aligned}$$

$$\because S_{\triangle PAD} = S_{\triangle PBC}$$

$$\therefore \frac{(n-m-3)(1-a)}{2} = \frac{1}{2}(a-1)(n-m-1)$$

$$\because 1 < a < 3 \therefore a-1 \neq 0$$

$$\therefore -(n-m-3) = n-m-1 \quad \text{即 } n-m=2$$



26. (11 分) 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 $\odot O$ 上, 点 D 在半径 OA 上 (不与点 O , A 重合).

(1) 如图 10, 若 $\angle COA = 60^\circ$, $\angle CDO = 70^\circ$, 求 $\angle ACD$ 的度数.

(2) 如图 11, 点 E 在线段 OD 上 (不与 O , D 重合), CD 、 CE 的延长线分别交 $\odot O$ 于点 F 、 G , 连接 BF ,

Figure 1 shows a circle with center O and diameter AB . A point C is on the circle. A point D is located on the segment AO . Lines AC , AD , and CD are drawn. The angle $\angle ACD$ is labeled as α .

$$\therefore \text{弧} BH = \text{弧} HG \quad \angle OQB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle CDO = \angle OQB = 90^\circ$$

$\because OA$ 为直径

$$\therefore OD \text{ 垂直平分 } CF$$

$$\therefore \text{弧} AC = \text{弧} AF$$

$$\because \angle CFP = \angle CPF \quad \angle 5 = \angle CPF$$

$$\therefore \angle 5 = \angle CFP \quad CF = CP$$

$$\because \text{弧} FG = \text{弧} FG$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 7$$

$$\therefore \angle 7 + \angle CFP = \angle 3 + \angle 5 = 90^\circ$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 7$$

$$\therefore \text{弧} FG = \text{弧} GH$$

$$\because AG \parallel CH,$$

$$\therefore \text{弧} AC = \text{弧} GH = \text{弧} AF$$

$$\therefore \text{弧} FG + \text{弧} AF = \text{弧} GH + \text{弧} HB$$

$$\therefore \text{弧}AG = \text{弧}GB \quad \therefore AG = GB$$

$\because AB$ 为直径

$$\therefore \angle AGB = 90^\circ$$

$\therefore \triangle ABG$ 为等腰直角三角形

$$\therefore \angle ABG = 45^\circ$$

$\therefore \triangle OQB$ 为等腰直角三角形

$$\therefore OQ = QB = 1$$

$$\therefore \text{在} Rt\triangle OQB \text{ 中, } OB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\because OC = OB = \sqrt{2}$$

$$\therefore CQ = OC + OQ = \sqrt{2} + 1$$

$$\therefore \text{在} Rt\triangle CGQ \text{ 中, } CG = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 + 1} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

27. (12 分) 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与直线 $y = -4x + m$ 相交于第一象限不同的两点, $A(5, n)$, $B(e, f)$

(1) 若点 B 的坐标为 (3, 9), 求此抛物线的解析式;

(2) 将此抛物线平移, 设平移后的抛物线为 $y = -x^2 + px + q$, 过点 A 与点 (1, 2), 且 $m - q = 25$,

在平移过程中, 若抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 向下平移了 S ($S > 0$) 个单位长度, 求 S 的取值范围.

解：（1）

$\because$ 直线 $y = -4x + m$ 过点 $B(3, 9)$

$$\therefore 9 = -4 \times 3 + m$$

$$\therefore m = 21$$

$$\therefore y = -4x + 21$$

$\because$ 直线 $y = -4x + 21$ 过点 $A(5, n)$

$$\therefore n = -4 \times 5 + 21$$

$$\therefore n = 1$$

$$\therefore A(5, 1)$$

$\therefore$ 把 A, B 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 可得

$$\therefore \begin{cases} 9 = -9 + 3b + c \\ 1 = -25 + 5b + c \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b = 4 \\ c = 6 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 4x + 6$

(2)

$\because$ 抛物线为 $y = -x^2 + px + q$ 与直线 $y = -4x + m$ 过点 $A(5, n)$

$$\therefore n = -25 + 5p + q \quad n = -20 + m$$

$\because$ 抛物线为 $y = -x^2 + px + q$ 过点 $(1, 2)$

$$\therefore 2 = -1 + p + q$$

整理可得：

$$20 = m - n \quad \text{①}$$

$$5p + q - n = 25 \quad \text{②}$$

$$p + q = 3 \quad \text{③}$$

$$\therefore m - q = 25 \quad \text{④}$$

$$\therefore \text{①}-\text{④} \text{ 得 } q - n = -5 \quad \text{⑤}$$

把⑤代入②得： $5p = 30$ 即： $p = 6$

依次解得： $q = -3$ ， $n = 2$ ， $m = 22$

$\therefore A(5, 2)$ ；

一次函数解析式为 $y = -4x + 22$ ；

平移后的抛物线为 $y = -x^2 + 6x - 3$

∵ 当抛物线在平移的过程中，抛物线的 a 不变，

∴ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + bx + c$

∵ 抛物线与直线有两个交点

如图所示，当抛物线过点 B 以及，抛物线在点 A 出与直线相切时，只有一个交点

∴ 抛物线介于点 AB 之间

① 当抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 过点 $A(5, 2)$ ， $B(0, 22)$ 时

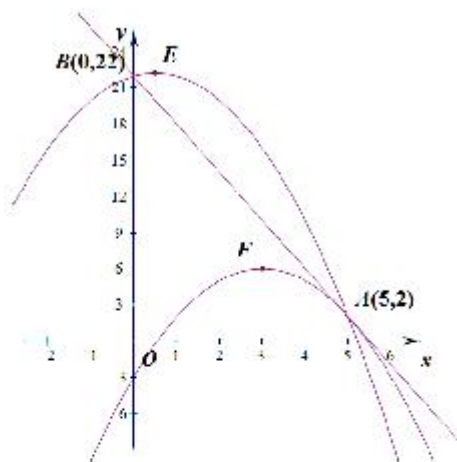
求得 $c = 22$ ， $b = 1$

∴ 抛物线的解析式为： $y = -x^2 + x + 22$

∴ 顶点坐标为： $\left(\frac{1}{2}, \frac{89}{4}\right)$

② 当抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 点 A 出与直线相切时，

$$\begin{cases} y = -x^2 + bx + c \\ y = -4x + 22 \end{cases} \Rightarrow x^2 - (b+4)x + (22-c) = 0 \text{ 中的 } \Delta = 0$$



$$\therefore (b+4)^2 - 4(22-c) = 0$$

$$\because y = -x^2 + bx + c \text{ 过点 } A(5, 2)$$

$$\therefore 2 = -25 + 5b + c$$

$$\therefore c = 27 - 5b$$

$$\text{把 } c = 27 - 5b \text{ 代入可得: } b^2 - 12b + 36 = 0$$

$$\therefore b = 6$$

$$\therefore c = 27 - 5b = -3$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = -x^2 + 6x - 3$$

$$\therefore \text{顶点坐标为 } (3, 6)$$

$$\therefore \frac{89}{4} - 6 = \frac{65}{4}$$

$$\therefore 0 < S < \frac{65}{4}$$