

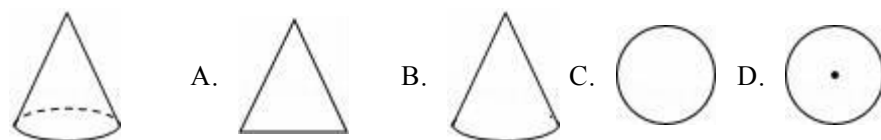
2016 年福建省南平市中考数学试卷

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分）

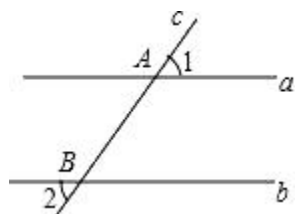
1. -3 的倒数是（ ）

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

2. 如图所示的几何体的左视图是（ ）



3. 如图，直线 $a \parallel b$ ，直线 c 与 a 、 b 分别交于 A 、 B 两点，若 $\angle 1 = 46^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ （ ）



- A. 44° B. 46° C. 134° D. 54°

4. 下列事件是必然事件的是（ ）

- A. 某种彩票中奖率是 1%，则买这种彩票 100 张一定会中奖
 B. 一组数据 1, 2, 4, 5 的平均数是 4
 C. 三角形的内角和等于 180°
 D. 若 a 是实数，则 $|a| > 0$

5. 2016 年欧洲杯足球赛中，某国家足球队首发上场的 11 名队员身高如表：

身高 (cm)	176	178	180	182	186	188	192
人数	1	2	3	2	1	1	1

则这 11 名队员身高的众数和中位数分别是（ ）（单位：cm）

- A. 180, 182 B. 180, 180 C. 182, 182 D. 3, 2

6. 若正六边形的半径长为 4，则它的边长等于（ ）

- A. 4 B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

7. 下列运算正确的是（ ）

- A. $3x+2y=5xy$ B. $(m^2)^3=m^5$ C. $(a+1)(a-1)=a^2-1$ D. $\frac{b+2}{b}=2$

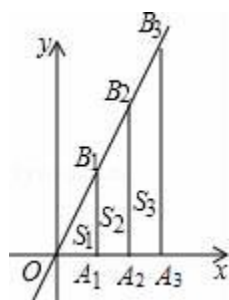
8. 下列一元二次方程中，没有实数根的是（ ）

A. $x^2 - 2x - 3 = 0$ B. $x^2 - x + 1 = 0$ C. $x^2 + 2x + 1 = 0$ D. $x^2 = 1$

9. 闽北某村原有林地 120 公顷，旱地 60 公顷，为适应产业结构调整，需把一部分旱地改造为林地，改造后，旱地面积占林地面积的 20%，设把 x 公顷旱地改造为林地，则可列方程为 ()

A. $60 - x = 20\% (120 + x)$ B. $60 + x = 20\% \times 120$
C. $180 - x = 20\% (60 + x)$ D. $60 - x = 20\% \times 120$

10. 如图，已知直线 $l: y = 2x$ ，分别过 x 轴上的点 $A_1 (1, 0)$ 、 $A_2 (2, 0)$ 、...、 $A_n (n, 0)$ ，作垂直于 x 轴的直线交 l 于点 B_1 、 B_2 、...、 B_n ，将 $\triangle OA_1B_1$ ，四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 、...、四边形 $A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$ 的面积依次记为 S_1 、 S_2 、...、 S_n ，则 $S_n =$ ()



A. n^2 B. $2n+1$ C. $2n$ D. $2n-1$

二、填空题 (共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分)

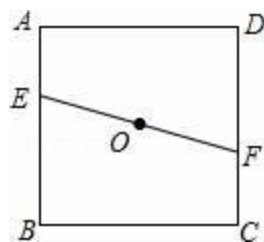
11. 甲、乙两人在相同条件下各射击 10 次，他们成绩的平均数相同，方差分别是 $s_{\text{甲}}^2 = 0.2$ ， $s_{\text{乙}}^2 = 0.5$ ，则设两人中成绩更稳定的是_____ (填“甲”或“乙”)

12. 计算: $(2\sqrt{7})^2 =$ _____.

13. 分解因式: $mn^2 + 2mn + m =$ _____.

14. 写出一个 y 关于 x 的二次函数的解析式，且它的图象的顶点在 y 轴上: _____.

15. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别为 AB 、 CD 上的点，且 $AE = CF = \frac{1}{3}AB$ ，点 O 为线段 EF 的中点，过点 O 作直线与正方形的一组对边分别交于 P 、 Q 两点，并且满足 $PQ = EF$ ，则这样的直线 PQ (不同于 EF) 有_____条.



16. 如图，等腰 $\triangle ABC$ 中， $CA=CB=4$ ， $\angle ACB=120^\circ$ ，点 D 在线段 AB 上运动（不与 A 、 B 重合），将 $\triangle CAD$ 与 $\triangle CBD$ 分别沿直线 CA 、 CB 翻折得到 $\triangle CAP$ 与 $\triangle CBQ$ ，给出下列结论：

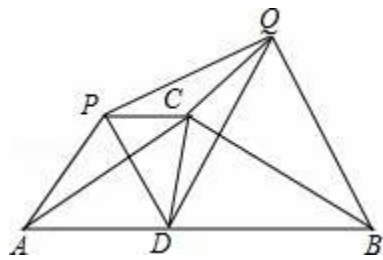
① $CD=CP=CQ$ ；

② $\angle PCQ$ 的大小不变；

③ $\triangle PCQ$ 面积的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ ；

④当点 D 在 AB 的中点时， $\triangle PDQ$ 是等边三角形，

其中所有正确结论的序号是_____.



三、解答题（共9小题，满分86分）

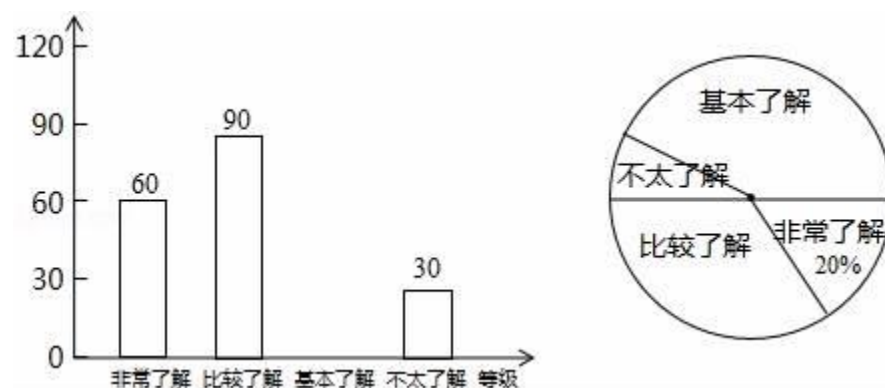
17. 计算： $(2\pi)^0 + |-6| - \sqrt[3]{8}$.

18. 解分式方程： $\frac{3}{x} = \frac{4}{1+x}$.

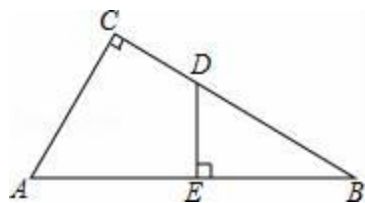
19. 解不等式组：
$$\begin{cases} 2x - 6 < 0, & \text{①} \\ 1 - x < 0, & \text{②} \end{cases}$$
.

20. 国务院办公厅在 2015 年 3 月 16 日发布了《中国足球发展改革总方案》，一年过去了，为了了解足球知识的普及情况，某校举行“足球在身边”的专题调查活动，采取随机抽样的方法进行问卷调查，调查结果划分为“非常了解”、“比较了解”、“基本了解”、“不太了解”四个等级，并将调查结果绘制成两幅不完整的统计图（如图），请根据图中提供的信息，解答下列问题：

- (1) 被调查的学生共有_____人.
- (2) 在扇形统计图中，表示“比较了解”的扇形的圆心角度数为_____度；
- (3) 从该校随机抽取一名学生，抽中的学生对足球知识是“基本了解”的概率的是多少？



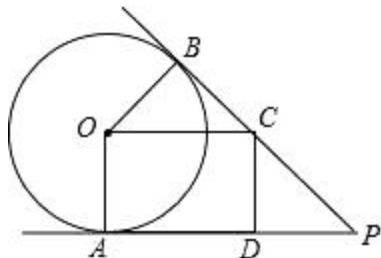
21. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=14$ ， $AC=7$ ， D 是 BC 上一点， $BD=8$ ， $DE \perp AB$ ，垂足为 E ，求线段 DE 的长.



22. 如图, PA, PB 是 $\odot O$ 的切线, A, B 为切点, 点 C 在 PB 上, $OC \parallel AP$, $CD \perp AP$ 于 D

(1) 求证: $OC=AD$;

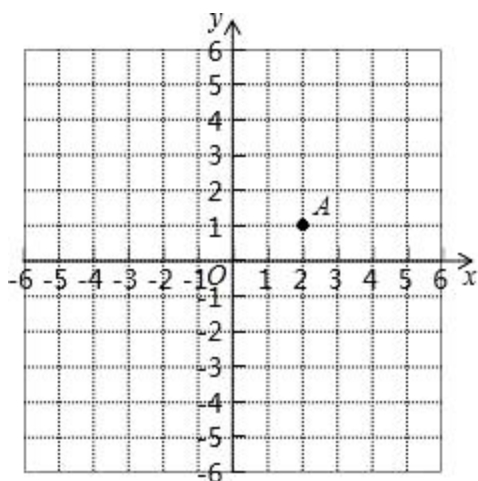
(2) 若 $\angle P=50^\circ$, $\odot O$ 的半径为 4, 求四边形 AOCD 的周长 (精确到 0.1)



23. 已知正比例函数 $y_1=ax$ ($a \neq 0$) 与反比例函数 $y_2=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象在第一象限内交于点 A (2, 1)

(1) 求 a, k 的值;

(2) 在直角坐标系中画出这两个函数的大致图象, 并根据图象直接回答 $y_1 > y_2$ 时 x 的取值范围.

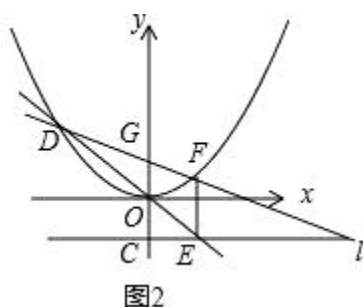
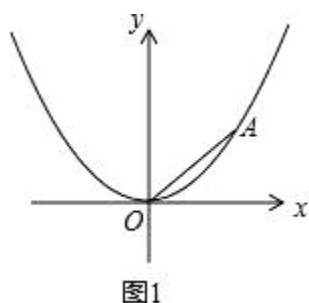


24. (12 分) (2016•南平) 已知, 抛物线 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 经过点 A (4, 4),

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 如图 1, 抛物线上存在点 B, 使得 $\triangle AOB$ 是以 AO 为直角边的直角三角形, 请直接写出所有符合条件的点 B 的坐标: _____.

(3) 如图 2, 直线 l 经过点 C (0, -1), 且平行与 x 轴, 若点 D 为抛物线上任意一点 (原点 O 除外), 直线 DO 交 l 于点 E, 过点 E 作 $EF \perp l$, 交抛物线于点 F, 求证: 直线 DF 一定经过点 G (0, 1).

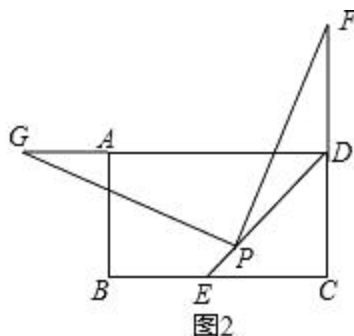
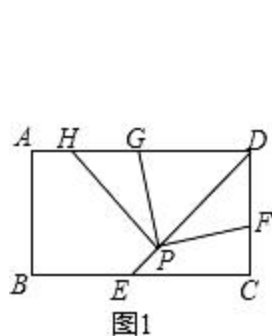


25. 已知在矩形 ABCD 中, $\angle ADC$ 的平分线 DE 与 BC 边所在的直线交于点 E, 点 P 是线段 DE 上一定点 (其中 $EP < PD$)

(1) 如图 1, 若点 F 在 CD 边上 (不与 D 重合), 将 $\angle DPF$ 绕点 P 逆时针旋转 90° 后, 角的两边 PD、PF 分别交射线 DA 于点 H、G.

①求证: $PG=PF$; ②探究: DF、DG、DP 之间有怎样的数量关系, 并证明你的结论.

(2) 拓展: 如图 2, 若点 F 在 CD 的延长线上 (不与 D 重合), 过点 P 作 $PG \perp PF$, 交射线 DA 于点 G, 你认为 (1) 中 DE、DG、DP 之间的数量关系是否仍然成立? 若成立, 给出证明; 若不成立, 请写出它们所满足的数量关系式, 并说明理由.



2016 年福建省南平市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分）

1. -3 的倒数是（ ）

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

【考点】倒数.

【专题】常规题型.

【分析】直接根据倒数的定义进行解答即可.

【解答】解： $\because (-3) \times (-\frac{1}{3}) = 1$,

$\therefore -3$ 的倒数是 $-\frac{1}{3}$.

故选：D.

【点评】本题考查的是倒数的定义，即乘积是 1 的两数互为倒数.

2. 如图所示的几何体的左视图是（ ）



- A.  B.  C.  D. 

【考点】简单几何体的三视图.

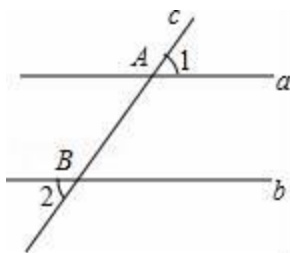
【分析】左视图是从物体左面看，所得到的图形.

【解答】解：从左面看可得到一个三角形.

故选：A.

【点评】本题考查了几何体的三种视图，掌握定义是关键. 注意所有的看到的棱都应表现在三视图中.

3. 如图，直线 $a \parallel b$ ，直线 c 与 a 、 b 分别交于 A、B 两点，若 $\angle 1 = 46^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ （ ）



A. 44° B. 46° C. 134° D. 54°

【考点】 平行线的性质.

【分析】 先根据平行线的性质求出 $\angle 3$ 的度数, 再由对顶角的定义即可得出结论.

【解答】 解: 如图所示:

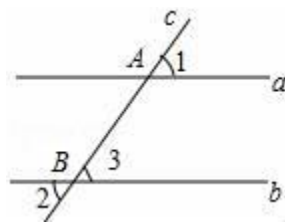
$\because$ 直线 $a \parallel b$, $\angle 1 = 46^\circ$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3 = 46^\circ$.

$\because \angle 2$ 与 $\angle 3$ 是对顶角,

$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 46^\circ$.

故选: B.



【点评】 本题考查的是平行线的性质、对顶角相等的性质, 熟练掌握两直线平行, 同位角相等是解决问题的关键.

4. 下列事件是必然事件的是 ()

A. 某种彩票中奖率是 1%, 则买这种彩票 100 张一定会中奖

B. 一组数据 1, 2, 4, 5 的平均数是 4

C. 三角形的内角和等于 180°

D. 若 a 是实数, 则 $|a| > 0$

【考点】 随机事件.

【分析】 必然事件就是一定发生的事件, 即发生的概率是 1 的事件. 据此判断即可解答.

【解答】 解: A、某种彩票中奖率是 1%, 则买这种彩票 100 张一定会中奖为随机事件, 不符合题意;

B、一组数据 1, 2, 4, 5 的平均数是 4 是不可能事件, 不符合题意;

C、三角形的内角和等于 180° 为必然事件，符合题意；

D、若 a 是实数，则 $|a| > 0$ 为事件事件，不符合题意.

故选 C.

【点评】 本题主要考查必然事件、不可能事件、随机事件的概念，理解概念是解决基础题的主要方法.

用到的知识点为：必然事件指在一定条件下一定发生的事件；不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件.

5. 2016 年欧洲杯足球赛中，某国家足球队首发上场的 11 名队员身高如表：

身高 (cm)	176	178	180	182	186	188	192
人数	1	2	3	2	1	1	1

则这 11 名队员身高的众数和中位数分别是 () (单位：cm)

A. 180, 182 B. 180, 180 C. 182, 182 D. 3, 2

【考点】 众数；中位数.

【分析】 依据众数和中位数的定义求解即可.

【解答】 解： $\because$ 180 出现的次数最多，

$\therefore$ 众数是 180.

将这组数据按照由大到小的顺序排列：176、178、178、180、180、180、182、182、186、188、192.

所以众数为 180.

故选：B.

【点评】 本题主要考查的是众数和中位数的定义，掌握众数和中位数的定义是解题的关键.

6. 若正六边形的半径长为 4，则它的边长等于 ()

A. 4 B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

【考点】 正多边形和圆.

【分析】 根据正六边形的外接圆半径和正六边形的边长将组成一个等边三角形，即可求解.

【解答】 解：正六边形的中心角为 $360^\circ \div 6 = 60^\circ$ ，那么外接圆的半径和正六边形的边长将组成一个等边三角形，

故正六边形的半径等于 4，则正六边形的边长是 4.

故选：A.

【点评】此题主要考查了正多边形和圆，利用正六边形的外接圆半径和正六边形的边长将组成一个等边三角形得出是解题关键.

7. 下列运算正确的是 ()

A. $3x+2y=5xy$ B. $(m^2)^3=m^5$ C. $(a+1)(a-1)=a^2-1$ D. $\frac{b+2}{b}=2$

【考点】平方差公式；合并同类项；幂的乘方与积的乘方；约分.

【分析】根据同类项、幂的乘方、平方差公式以及约分的知识进行判断即可.

【解答】解：A、 $3x+2y \neq 5xy$ ，此选项错误；

B、 $(m^2)^3=m^6$ ，此选项错误；

C、 $(a+1)(a-1)=a^2-1$ ，此选项正确；

D、 $\frac{2+2}{b} \neq 2$ ，此选项错误；

故选 C.

【点评】本题主要考查了平方差公式、合并同类项、幂的乘方以及约分等知识，解题的关键是掌握运算法则.

8. 下列一元二次方程中，没有实数根的是 ()

A. $x^2-2x-3=0$ B. $x^2-x+1=0$ C. $x^2+2x+1=0$ D. $x^2=1$

【考点】根的判别式.

【分析】分别找出一元二次方程中的二次项系数 a，一次项系数 b、常数项 c，再利用一元二次方程根的判别式 ($\Delta=b^2-4ac$) 判断方程的根的情况.

【解答】解：A、 $a=1$ ， $b=-2$ ， $c=-3$ ， $b^2-4ac=4+12=16>0$ ，有两个不相等的实数根，故此选项错误；

B、 $a=1$ ， $b=-1$ ， $c=1$ ， $b^2-4ac=1-4=-3<0$ ，没有实数根，故此选项正确；

C、 $a=1$ ， $b=2$ ， $c=1$ ， $b^2-4ac=4-4=0$ ，有两个相等的实数根，故此选项错误；

D、 $a=1$ ， $b=0$ ， $c=-1$ ， $b^2-4ac=4>0$ ，有两个不相等的实数根，故此选项错误；

故选：B.

【点评】此题主要考查了根的判别式，关键是掌握一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta=b^2-4ac$ 有如下关系：

- ①当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；
 ②当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；
 ③当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

9. 闽北某村原有林地 120 公顷，旱地 60 公顷，为适应产业结构调整，需把一部分旱地改造为林地，改造后，旱地面积占林地面积的 20%，设把 x 公顷旱地改造为林地，则可列方程为（ ）

- A. $60 - x = 20\% (120 + x)$ B. $60 + x = 20\% \times 120$
 C. $180 - x = 20\% (60 + x)$ D. $60 - x = 20\% \times 120$

【考点】由实际问题抽象出一元一次方程.

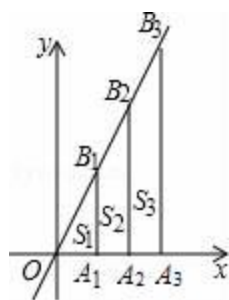
【分析】设把 x 公顷旱地改为林地，根据旱地面积占林地面积的 20% 列出方程即可.

【解答】解：设把 x 公顷旱地改为林地，根据题意可得方程： $60 - x = 20\% (120 + x)$.

故选：A.

【点评】本题考查一元一次方程的应用，关键是设出未知数以及改造后的旱地与林地的关系为等量关系列出方程.

10. 如图，已知直线 $l: y = 2x$ ，分别过 x 轴上的点 $A_1 (1, 0)$ 、 $A_2 (2, 0)$ 、...、 $A_n (n, 0)$ ，作垂直于 x 轴的直线交 l 于点 B_1 、 B_2 、...、 B_n ，将 $\triangle OA_1B_1$ ，四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 、...、四边形 $A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$ 的面积依次记为 S_1 、 S_2 、...、 S_n ，则 $S_n =$ （ ）



- A. n^2 B. $2n+1$ C. $2n$ D. $2n-1$

【考点】一次函数图象上点的坐标特征.

【专题】规律型.

【分析】根据直线 l 的解析式以及三角形的面积可以找出部分 S_n 的值，根据数的变化找出变化规律“ $S_n = 2n - 1$ ”，此题得解.

【解答】解：观察，得出规律： $S_1 = \frac{1}{2}OA_1 \cdot A_1B_1 = 1$ ， $S_2 = \frac{1}{2}OA_2 \cdot A_2B_2 - \frac{1}{2}OA_1 \cdot A_1B_1 = 3$ ，
 $S_3 = \frac{1}{2}OA_3 \cdot A_3B_3 - \frac{1}{2}OA_2 \cdot A_2B_2 = 5$ ， $S_4 = \frac{1}{2}OA_4 \cdot A_4B_4 - \frac{1}{2}OA_3 \cdot A_3B_3 = 7$ ，...，
 $\therefore S_n = 2n - 1$.

故选 D.

【点评】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征以及规律型中的数的变化类，解题的关键是找出变化规律“ $S_n = 2n - 1$ ”. 本题属于基础题，难度不大，解决该题型题目时，根据一次函数图象上点的坐标特征以及三角形的面积找出部分 S_n 的值，再根据面积的变化找出变化规律是关键.

二、填空题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

11. 甲、乙两人在相同条件下各射击 10 次，他们成绩的平均数相同，方差分别是 $s_{\text{甲}}^2 = 0.2$ ， $s_{\text{乙}}^2 = 0.5$ ，则设两人中成绩更稳定的是 甲（填“甲”或“乙”）

【考点】方差；算术平均数.

【分析】由方差反映了一组数据的波动情况，方差越小，则数据的波动越小，成绩越稳定可以作出判断.

【解答】解： $\because S_{\text{甲}}^2 = 0.2$ ， $S_{\text{乙}}^2 = 0.5$ ，
 则 $S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2$ ，
 可见较稳定的是甲.
 故答案为：甲.

【点评】本题考查方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定.

12. 计算： $(2\sqrt{7})^2 = \underline{28}$.

【考点】二次根式的乘除法.

【分析】直接利用二次根式乘法运算法则求出答案.

【解答】解：原式 $= 2^2 \times (\sqrt{7})^2 = 28$.
 故答案为：28.

【点评】此题主要考查了二次根式的乘法运算，正确掌握运算法则是解题关键.

13. 分解因式: $mn^2+2mn+m=$ $m(n+1)^2$.

【考点】提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】首先提取公因式 m ，进而利用完全平方公式分解因式得出答案.

【解答】解: $mn^2+2mn+m$

$$=m(n^2+2n+1)$$

$$=m(n+1)^2.$$

故答案为: $m(n+1)^2$.

【点评】此题主要考查了提取公因式法以及公式法分解因式，熟练应用完全平方公式是解题关键.

14. 写出一个 y 关于 x 的二次函数的解析式，且它的图象的顶点在 y 轴上: $y=x^2$ (答案不唯一).

【考点】二次函数的性质.

【专题】开放型.

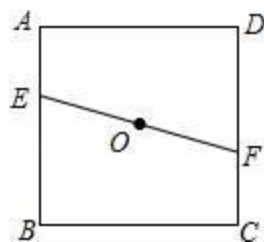
【分析】根据二次函数的图象的顶点在 y 轴上，则 $b=0$ ，进而得出答案.

【解答】解: 由题意可得: $y=x^2$ (答案不唯一).

故答案为: $y=x^2$ (答案不唯一).

【点评】此题主要考查了二次函数的性质，正确得出 b 的值是解题关键.

15. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别为 AB 、 CD 上的点，且 $AE=CF=\frac{1}{3}AB$ ，点 O 为线段 EF 的中点，过点 O 作直线与正方形的一组对边分别交于 P 、 Q 两点，并且满足 $PQ=EF$ ，则这样的直线 PQ (不同于 EF) 有 3 条.



【考点】正方形的性质；全等三角形的判定与性质.

【分析】能画3条：①与EF互相垂直且垂足为O，构建直角三角形，可以证明两直角三角形全等得EF=PQ；

②在AD上截取 $AP = \frac{1}{3}AD$ ，连接PO并延长得到PQ；

③同理在AB上截取 $BQ = \frac{1}{3}AB$ ，连接QO并延长得到PQ.

【解答】解：这样的直线PQ（不同于EF）有3条，

①如图1，过O作 $PQ \perp EF$ ，交AD于P，BC于Q，

则 $PQ=EF$ ；

②如图2，以点A为圆心，以AE为半径画弧，交AD于P，连接PO并延长交BC于Q，

则 $PQ=EF$ ；

③如图3，以B为圆心，以AE为半径画弧，交AB于Q，连接QO并延长交DC于点P，

则 $PQ=EF$.

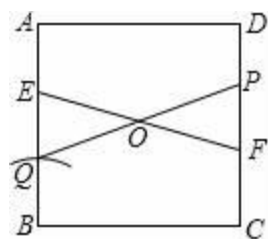


图3

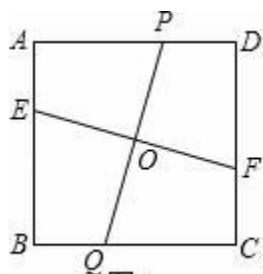


图1

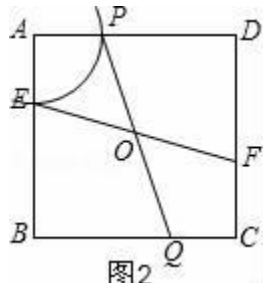


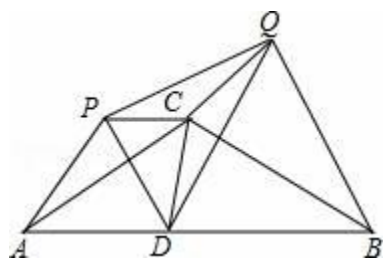
图2

【点评】本题考查了正方形的性质和全等三角形的性质与判定，本题虽然是做一条线段与EF相等，实际上是做好两件事：①画线段PQ，②能证明这两条线段相等，这比证明更为复杂，因此首先要构建直角三角形全等，找到与EF相等的边长的位置，本题的线段不止一条，容易丢解，要思考周全.

16. 如图，等腰 $\triangle ABC$ 中， $CA=CB=4$ ， $\angle ACB=120^\circ$ ，点 D 在线段 AB 上运动（不与 A 、 B 重合），将 $\triangle CAD$ 与 $\triangle CBD$ 分别沿直线 CA 、 CB 翻折得到 $\triangle CAP$ 与 $\triangle CBQ$ ，给出下列结论：

- ① $CD=CP=CQ$ ；
- ② $\angle PCQ$ 的大小不变；
- ③ $\triangle PCQ$ 面积的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ ；
- ④当点 D 在 AB 的中点时， $\triangle PDQ$ 是等边三角形，

其中所有正确结论的序号是①②④。



【考点】几何变换综合题.

【分析】①由折叠直接得到结论；

②由折叠的性质求出 $\angle ACP+\angle BCQ=120^\circ$ ，再用周角的意义求出 $\angle PCQ=120^\circ$ ；

③先作出 $\triangle PCQ$ 的边 PC 上的高，用三角函数求出 $QE=\sqrt{3}CQ$ ，得到 $S_{\triangle PCQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}CD^2$ ，判断出 $\triangle PCQ$ 面积最小时，点 D 的位置，求出最小的 $CD=CF$ ，即可；

④先判断出 $\triangle APD$ 是等边三角形， $\triangle BDQ$ 是等边三角形，再求出 $\angle PDQ=60^\circ$ ，即可.

【解答】解：① $\because$ 将 $\triangle CAD$ 与 $\triangle CBD$ 分别沿直线 CA 、 CB 翻折得到 $\triangle CAP$ 与 $\triangle CBQ$ ，

$\therefore CP=CD=CQ$ ，

$\therefore$ ①正确；

② $\because$ 将 $\triangle CAD$ 与 $\triangle CBD$ 分别沿直线 CA 、 CB 翻折得到 $\triangle CAP$ 与 $\triangle CBQ$ ，

$\therefore \angle ACP=\angle ACD$ ， $\angle BCQ=\angle BCD$ ，

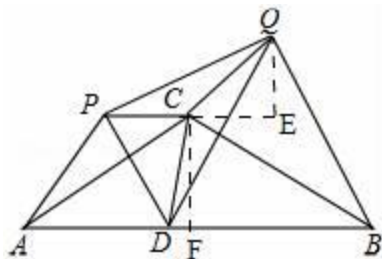
$\therefore \angle ACP+\angle BCQ=\angle ACD+\angle BCD=\angle ACB=120^\circ$ ，

$\therefore \angle PCQ=360^\circ-(\angle ACP+\angle BCQ+\angle ACB)=360^\circ-(120^\circ+120^\circ)=120^\circ$ ，

$\therefore \angle PCQ$ 的大小不变；

$\therefore$ ②正确；

③如图，



过点 Q 作 $QE \perp PC$ 交 PC 延长线于 E,

$$\because \angle PCQ = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle QCE = 60^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle QCE$ 中, $\tan \angle QCE = \frac{QE}{CQ}$,

$$\therefore QE = CQ \times \tan \angle QCE = CQ \times \tan 60^\circ = \sqrt{3}CQ,$$

$$\because CP = CD = CQ$$

$$\therefore S_{\triangle PCQ} = \frac{1}{2}CP \times QE = \frac{1}{2}CP \times \sqrt{3}CQ = \frac{\sqrt{3}}{2}CD^2,$$

$\therefore$ CD 最短时, $S_{\triangle PCQ}$ 最小,

即: $CD \perp AB$ 时, CD 最短,

过点 C 作 $CF \perp AB$, 此时 CF 就是最短的 CD,

$$\because AC = BC = 4, \angle ACB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}BC = 2,$$

即: CD 最短为 2,

$$\therefore S_{\triangle PCQ \text{ 最小}} = \frac{\sqrt{3}}{2}CD^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2^2 = 2\sqrt{3},$$

$\therefore$ ③错误,

④ $\because$ 将 $\triangle CAD$ 与 $\triangle CBD$ 分别沿直线 CA、CB 翻折得到 $\triangle CAP$ 与 $\triangle CBQ$,

$$\therefore AD = AP, \angle DAC = \angle PAC,$$

$$\because \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle APD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle APD$ 是等边三角形,

$$\therefore PD = AD, \angle ADP = 60^\circ,$$

同理: $\triangle BDQ$ 是等边三角形,

$$\therefore DQ = BD, \angle BDQ = 60^\circ,$$

$\therefore \angle PDQ=60^\circ$,

$\because$ 当点 D 在 AB 的中点,

$\therefore AD=BD$,

$\therefore PD=DQ$,

$\therefore \triangle DPQ$ 是等边三角形.

$\therefore$ ④正确,

故答案为: ①②④.

【点评】 此题是几何变换综合题, 主要考查了折叠的性质, 等腰三角形的性质, 等边三角形的判定, 锐角三角函数, 极值的确定, 三角形的面积公式, 解本题的关键是判断出 $\angle PCQ=120^\circ$ 是个定值; (其实这个题目中还有 $\angle PDQ=60^\circ$ 也是定值), 解本题的难点是确定出 $\triangle PCQ$ 面积最小时, 点 D 的位置.

三、解答题 (共 9 小题, 满分 86 分)

17. 计算: $(2\pi)^0 + |-6| - \sqrt[3]{8}$.

【考点】 实数的运算; 零指数幂.

【分析】 首先计算零次幂、绝对值、开立方, 然后计算有理数的加减即可.

【解答】 解: 原式 $= 1 + 6 - 2 = 5$.

【点评】 此题主要考查了实数的运算, 关键是掌握零指数幂、开方、绝对值等考点的运算.

18. 解分式方程: $\frac{3}{x} = \frac{4}{1+x}$.

【考点】 解分式方程.

【分析】 先去分母, 再解一元一次方程即可.

【解答】 解: 去分母得, $3(1+x) = 4x$,

去括号得, $3+3x=4x$,

移项、合并得, $x=3$,

检验: 把 $x=3$ 代入 $x(x+1) = 3 \times 4 = 12 \neq 0$,

$\therefore x=3$ 是原方程的解.

【点评】 本题考查了解分式方程, 解分式方程一定要验根.

19. 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x - 6 < 0, & \text{①} \\ 1 - x < 0, & \text{②} \end{cases}$$

【考点】解一元一次不等式组.

【分析】分别求出各不等式的解集, 再求出其公共解集即可.

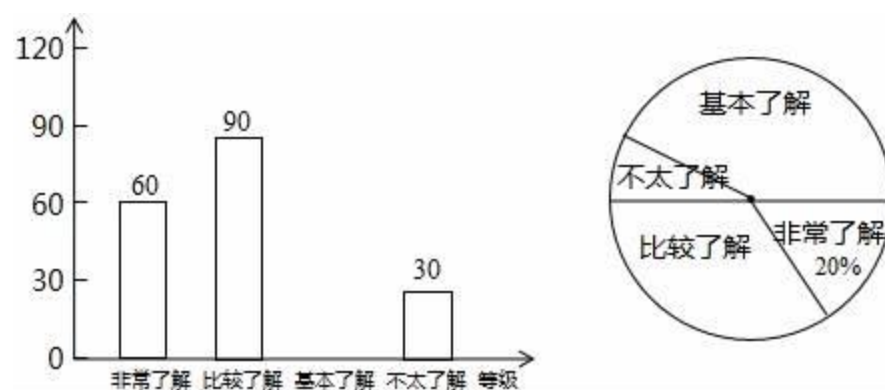
【解答】解: 由①得, $x < 3$, 由②得, $x > 1$,

故不等式组的解集为: $1 < x < 3$.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组, 熟知“同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

20. 国务院办公厅在 2015 年 3 月 16 日发布了《中国足球发展改革总方案》, 一年过去了, 为了了解足球知识的普及情况, 某校举行“足球在身边”的专题调查活动, 采取随机抽样的方法进行问卷调查, 调查结果划分为“非常了解”、“比较了解”、“基本了解”、“不太了解”四个等级, 并将调查结果绘制成两幅不完整的统计图 (如图), 请根据图中提供的信息, 解答下列问题:

- (1) 被调查的学生共有 300 人.
- (2) 在扇形统计图中, 表示“比较了解”的扇形的圆心角度数为 108 度;
- (3) 从该校随机抽取一名学生, 抽中的学生对足球知识是“基本了解”的概率的是多少?



【考点】概率公式; 扇形统计图; 条形统计图.

【专题】统计与概率.

【分析】(1) 根据统计图中的数据可以求得本次调查的人数;

(2) 根据条形统计图中的数据可以求得在扇形统计图中, 表示“比较了解”的扇形的圆心角度数;

(3) 根据统计图中的数据可以求得从该校随机抽取一名学生，抽中的学生对足球知识是“基本了解”的概率.

【解答】解：(1) 由题意可得，

被调查的学生有： $60 \div 20\% = 300$ (人)，

故答案为：300；

(2) 在扇形统计图中，表示“比较了解”的扇形的圆心角度数为： $360^\circ \times \frac{90}{300} = 108^\circ$ ，

故答案为：108；

(3) 由题意可得，

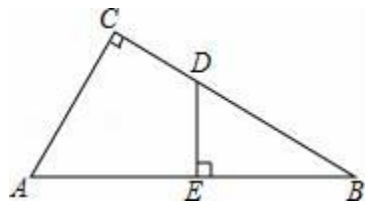
从该校随机抽取一名学生，抽中的学生对足球知识是“基本了解”的概率是：

$$\frac{300 - 60 - 90 - 30}{300} = 0.4,$$

即从该校随机抽取一名学生，抽中的学生对足球知识是“基本了解”的概率是 0.4.

【点评】本题考查概率公式、条形统计图、扇形统计图，解题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用数形结合的思想解决问题.

21. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=14$ ， $AC=7$ ， D 是 BC 上一点， $BD=8$ ， $DE \perp AB$ ，垂足为 E ，求线段 DE 的长.



【考点】相似三角形的判定与性质.

【分析】根据相似三角形的判定与性质，可得答案.

【解答】解： $\because DE \perp AB$ ，

$$\therefore \angle BED = 90^\circ,$$

$$\text{又 } \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BED = \angle C.$$

$$\text{又 } \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BED \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC},$$

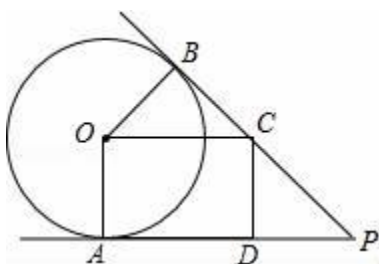
$$\therefore DE = \frac{BD \cdot AC}{AB} = \frac{8 \times 7}{14} = 4$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质，利用相似三角形的性质得出 $\frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC}$ 是解题关键.

22. 如图，PA，PB 是 $\odot O$ 的切线，A，B 为切点，点 C 在 PB 上，OC $\parallel$ AP，CD $\perp$ AP 于 D

(1) 求证：OC=AD；

(2) 若 $\angle P=50^\circ$ ， $\odot O$ 的半径为 4，求四边形 AOCD 的周长（精确到 0.1）



【考点】 切线的性质.

【分析】 (1) 只要证明四边形 OADC 是矩形即可.

(2) 在 $\text{RT}\triangle OBC$ 中，根据 $\sin \angle BCO = \frac{OB}{OC}$ ，求出 OC 即可解决问题.

【解答】 (1) 证明： $\because$ PA 切 $\odot O$ 于点 A，

$\therefore OA \perp PA$ ，即 $\angle OAD = 90^\circ$ ，

$\because OC \parallel AP$ ，

$\therefore \angle COA = 180^\circ - \angle OAD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ，

$\because CD \parallel PA$ ，

$\therefore \angle CDA = \angle OAD = \angle COA = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 AOCD 是矩形，

$\therefore OC = AD$.

(2) 解： $\because$ PB 切 $\odot O$ 于点 B，

$\therefore \angle OBP = 90^\circ$ ，

$\because OC \parallel AP$ ，

$\therefore \angle BCO = \angle P = 50^\circ$ ，

在 $\text{RT}\triangle OBC$ 中, $\sin \angle BCO = \frac{OB}{OC}$, $OB=4$,

$$\therefore OC = \frac{4}{\sin 50^\circ} \approx 5.22,$$

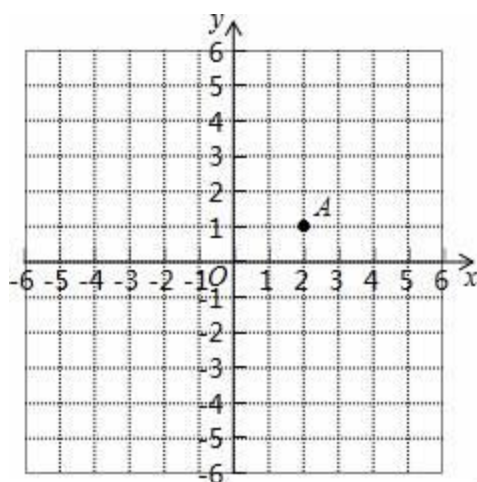
$\therefore$ 矩形 $OADC$ 的周长为 $2(OA+OC) = 2 \times (4+5.22) = 18.4$.

【点评】 本题考查切线的性质、矩形的判定和性质等知识解题的关键是灵活应用这些知识解决问题, 属于中考常考题型.

23. 已知正比例函数 $y_1=ax$ ($a \neq 0$) 与反比例函数 $y_2=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象在第一象限内交于点 $A(2, 1)$

(1) 求 a, k 的值;

(2) 在直角坐标系中画出这两个函数的大致图象, 并根据图象直接回答 $y_1 > y_2$ 时 x 的取值范围.



【考点】 反比例函数与一次函数的交点问题.

【分析】 (1) 将 A 坐标代入双曲线解析式中, 求出 k 的值, 确定出反比例函数解析式, 将 A 坐标代入一次函数解析式中, 求出 a 的值, 确定出一次函数解析式;

(2) 画出两函数图象, 由函数图象, 即可得到 $y_1 > y_2$ 时 x 的取值范围.

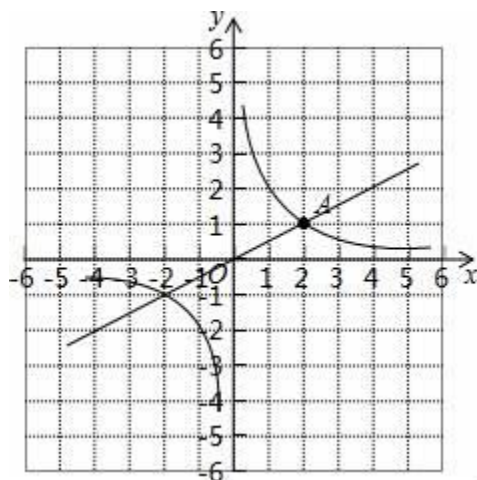
【解答】 解: (1) 将 $A(2, 1)$ 代入正比例函数解析式得: $1=2a$, 即 $a=\frac{1}{2}$,

故 $y_1=\frac{1}{2}x$;

将 $A(2, 1)$ 代入双曲线解析式得: $1=\frac{k}{2}$, 即 $k=2$,

故 $y_2=\frac{2}{x}$;

(2) 如图所示:



由图象可得: 当 $y_1 > y_2$ 时, $-2 < x < 0$ 或 $x > 2$.

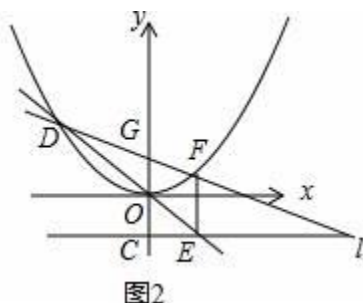
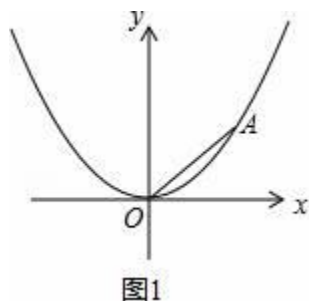
【点评】 此题考查了反比例函数与一次函数的交点问题, 涉及的知识有: 待定系数法确定函数解析式, 利用了数形结合的思想, 数形结合是数学中重要的思想方法.

24. (12 分) (2016•南平) 已知, 抛物线 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 经过点 A (4, 4),

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 如图 1, 抛物线上存在点 B, 使得 $\triangle AOB$ 是以 AO 为直角边的直角三角形, 请直接写出所有符合条件的点 B 的坐标: B (-4, 4) 或 (-8, 16).

(3) 如图 2, 直线 l 经过点 C (0, -1), 且平行与 x 轴, 若点 D 为抛物线上任意一点 (原点 O 除外), 直线 DO 交 l 于点 E, 过点 E 作 $EF \perp l$, 交抛物线于点 F, 求证: 直线 DF 一定经过点 G (0, 1).



【考点】 二次函数综合题.

【分析】 (1) 利用待定系数法求出抛物线解析式,

(2) 分两种情况, 先确定出直线 OB 或 AB, 和抛物线解析式联立确定出点 B 的解析式;

(3) 先设出点 D 坐标，确定出点 F 坐标，进而得出直线 DF 解析式，将点 G 坐标代入直线 DF 看是否满足解析式.

【解答】解：(1) $\because$ 抛物线 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 经过点 A (4, 4) ,

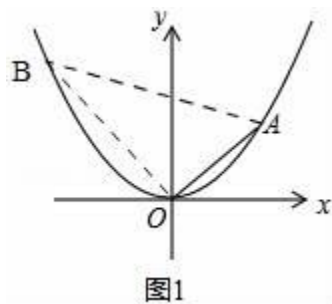
$$\therefore 16a=4,$$

$$\therefore a=\frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y=\frac{1}{4}x^2,$$

(2) 存在点 B，使得 $\triangle AOB$ 是以 AO 为直角边的直角三角形，

理由：如图 1，



$\therefore$ 使得 $\triangle AOB$ 是以 AO 为直角边的直角三角形

$\therefore$ 直角顶点是点 O，或点 A，

①当直角顶点是点 O 时，过点 O 作 $OB \perp OA$ ，交抛物线于点 B，

$\because$ 点 A (4, 4) ,

$\therefore$ 直线 OA 解析式为 $y=x$,

$\therefore$ 直线 OB 解析式为 $y=-x$,

$$\therefore \begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2 \\ y=-x \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ (舍) 或 } \begin{cases} x=-4 \\ y=4 \end{cases},$$

$\therefore B (-4, 4)$,

②当直角顶点为点 A，过点 A 作 $AB \perp OA$ ，

由①有，直线 OA 的解析式为 $y=x$ ，

$\because A (4, 4)$,

$\therefore$ 直线 AB 解析式为 $y=-x+8$,

$$\therefore \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ y = -x + 8 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} \text{ (舍) 或 } \begin{cases} x=-8 \\ y=16 \end{cases},$$

$$\therefore B(-8, 16),$$

$\therefore$ 满足条件的点 B $(-4, 4)$ 或 $(-8, 16)$;

故答案为 B $(-4, 4)$ 或 $(-8, 16)$;

(3) 证明: 设点 D $(m, \frac{1}{4}m^2)$,

$$\therefore \text{直线 DO 解析式为 } y = \frac{m}{4}x,$$

$$\because l \parallel x \text{ 轴, } C(0, -1),$$

$$\text{令 } y = -1, \text{ 则 } x = -\frac{4}{m},$$

$$\therefore \text{直线 DO 与 } l \text{ 交于 } E(-\frac{4}{m}, -1),$$

$$\because EF \perp l, l \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore F \text{ 横坐标为 } -\frac{4}{m},$$

$$\because \text{点 F 在抛物线上},$$

$$\therefore F(-\frac{4}{m}, \frac{4}{m^2})$$

设直线 DF 解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{4}{m}k + b = \frac{4}{m^2} \\ mk + b = \frac{m^2}{4} \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{m^2 - 4}{4m} \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 DF 解析式为 } y = \frac{m^2 - 4}{4m}x + 1,$$

$\therefore$ 点 G $(0, 1)$ 满足直线 DF 解析式,

$\therefore$ 直线 DF 一定经过点 G.

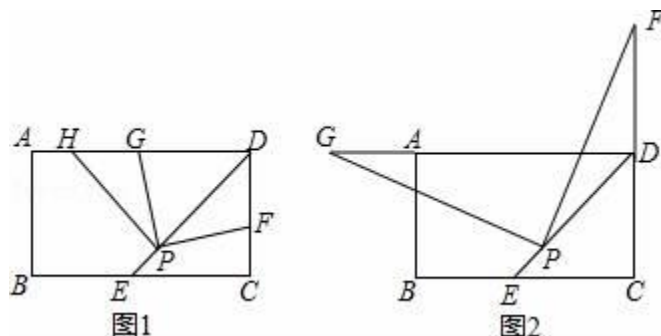
【点评】此题是二次函数综合题，主要考查了待定系数法，函数图象的交点坐标，直角三角形的性质，判断点是否在直线上，解本题的关键是确定出点 B 的坐标，确定出直线 DF 的解析式是解本题的难点.

25. 已知在矩形 ABCD 中， $\angle ADC$ 的平分线 DE 与 BC 边所在的直线交于点 E，点 P 是线段 DE 上一定点（其中 $EP < PD$ ）

(1) 如图 1，若点 F 在 CD 边上（不与 D 重合），将 $\angle DPF$ 绕点 P 逆时针旋转 90° 后，角的两边 PD、PF 分别交射线 DA 于点 H、G.

①求证：PG=PF； ②探究：DF、DG、DP 之间有怎样的数量关系，并证明你的结论.

(2) 拓展：如图 2，若点 F 在 CD 的延长线上（不与 D 重合），过点 P 作 $PG \perp PF$ ，交射线 DA 于点 G，你认为 (1) 中 DE、DG、DP 之间的数量关系是否仍然成立？若成立，给出证明；若不成立，请写出它们所满足的数量关系式，并说明理由.



【考点】四边形综合题.

【分析】(1) ①若证 $PG=PF$ ，可证 $\triangle HPG \cong \triangle DPF$ ，已知 $\angle DPH = \angle HPG$ ，由旋转可知 $\angle GPF = \angle HPD = 90^\circ$ 及 DE 平分 $\angle ADC$ 得 $\triangle HPD$ 为等腰直角三角形，即 $\angle DHP = \angle PDF = 45^\circ$ ， $PD=PH$ ，即可得证；

②由 $\triangle HPD$ 为等腰直角三角形， $\triangle HPG \cong \triangle DPF$ 知 $HD = \sqrt{2}DP$ ， $HG=DF$ ，根据 $DG+DF=DG+GH=DH$ 即可得；

(2) 过点 P 作 $PH \perp PD$ 交射线 DA 于点 H，先证 $\triangle HPD$ 为等腰直角三角形可得 $PH=PD$ ， $HD = \sqrt{2}DP$ ，再证 $\triangle HPG \cong \triangle DPF$ 可得 $HG=DF$ ，根据 $DH=DG - HG=DG - DF$ 可得 $DG - DF = \sqrt{2}DP$.

【解答】解：(1) ① $\because \angle GPF = \angle HPD = 90^\circ$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle GPH = \angle FPD$ ，

$\because DE$ 平分 $\angle ADC$ ，

$$\therefore \angle PDF = \angle ADP = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle HPD$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle DHP = \angle PDF = 45^\circ,$$

在 $\triangle HPG$ 和 $\triangle DPF$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle PHG = \angle PDF \\ PH = PD \\ \angle GPH = \angle FPD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle HPG \cong \triangle DPF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore PG = PF;$$

$$\textcircled{2} \text{ 结论: } DG + DF = \sqrt{2}DP,$$

由 $\textcircled{1}$ 知, $\triangle HPD$ 为等腰直角三角形, $\triangle HPG \cong \triangle DPF$,

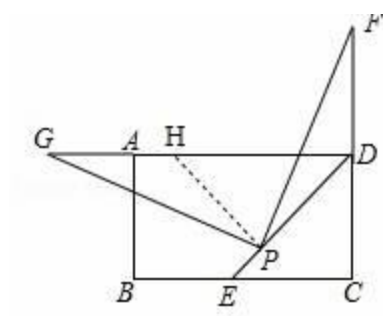
$$\therefore HD = \sqrt{2}DP, \quad HG = DF,$$

$$\therefore HD = HG + DG = DF + DG,$$

$$\therefore DG + DF = \sqrt{2}DP;$$

(2) 不成立, 数量关系式应为: $DG - DF = \sqrt{2}DP$,

如图, 过点 P 作 $PH \perp PD$ 交射线 DA 于点 H ,



$$\therefore PF \perp PG,$$

$$\therefore \angle GPF = \angle HPD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GPH = \angle FPD,$$

$\therefore DE$ 平分 $\angle ADC$, 且在矩形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \angle HDP = \angle EDC = 45^\circ$, 得到 $\triangle HPD$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle DHP = \angle EDC = 45^\circ, \text{ 且 } PH = PD, \quad HD = \sqrt{2}DP,$$

$$\therefore \angle GHP = \angle FDP = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

在 $\triangle HPG$ 和 $\triangle DPF$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle GPH = \angle FPD \\ \angle GHP = \angle FDP \\ PH = PD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle HPG \cong \triangle DPF,$$

$$\therefore HG = DF,$$

$$\therefore DH = DG - HG = DG - DF,$$

$$\therefore DG - DF = \sqrt{2}DP.$$

【点评】 本题主要考查等腰直角三角形的性质、全等三角形的判定与性质、矩形的性质的综合运用,灵活运用全等三角形的判定与性质将待求证线段关系转移至其他两线段间关系是解题的关键.

