

2015 年福建省龙岩市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，每小题的四个选项中，只有一项符合题目要求）

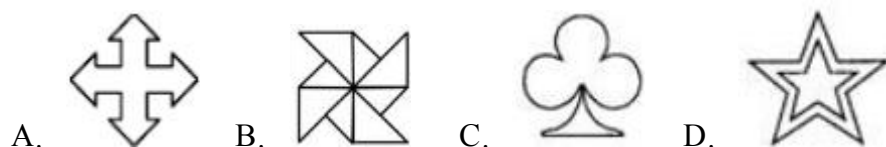
1. (4 分) (2015•龙岩) -1 的倒数是 ()

A. -1 B. 0 C. 1 D. ± 1

2. (4 分) (2015•龙岩) 下列运算正确的是 ()

A. $x^2 \cdot x^3 = x^6$ B. $(x^2)^3 = x^6$ C. $x^3 + x^2 = x^5$ D. $x + x^2 = x^3$

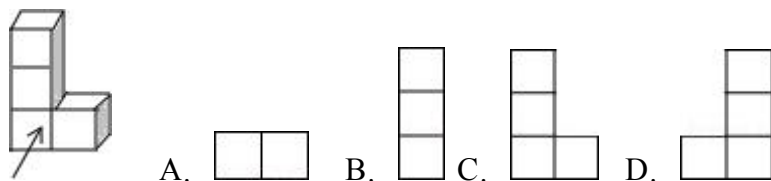
3. (2015•龙岩) 下列图形中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



4. (4 分) (2015•龙岩) 下列事件中，属于随机事件的是 ()

- A. $\sqrt{63}$ 的值比 8 大
B. 购买一张彩票，中奖
C. 地球自转的同时也在绕日公转
D. 袋中只有 5 个黄球，摸出一个球是白球

5. (4 分) (2015•龙岩) 如图所示几何体的主视图是 ()



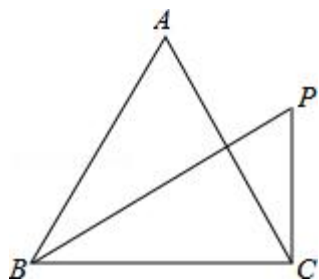
6. (4 分) (2015•龙岩) 若甲、乙、丙、丁四位同学一学期 4 次数学测试的平均成绩恰好都是 85 分，方差分别为 $S_{\text{甲}}^2 = 0.80$, $S_{\text{乙}}^2 = 1.31$, $S_{\text{丙}}^2 = 1.72$, $S_{\text{丁}}^2 = 0.42$, 则成绩最稳定的同学是 ()

A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

7. (4 分) (2015•龙岩) 下列统计图能够显示数据变化趋势的是 ()

A. 条形图 B. 扇形图 C. 折线图 D. 直方图

8. (4分) (2015•龙岩) 如图, 在边长为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形 ABC 中, 过点 C 垂直于 BC 的直线交 $\angle ABC$ 的平分线于点 P, 则点 P 到边 AB 所在直线的距离为()

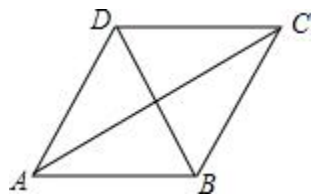


- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 1

9. (4分) (2015•龙岩) 已知点 P (a, b) 是反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 图象上异于点 (-1, -1) 的一个动点, 则 $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} =$ ()

- A. 2 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

10. (4分) (2015•龙岩) 如图, 菱形 ABCD 的周长为 16, $\angle ABC = 120^\circ$, 则 AC 的长为 ()



- A. $4\sqrt{3}$ B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. 2

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

11. (3分) (2015•龙岩) 2015 年 6 月 14 日是第 12 个“世界献血者日”, 据国家相关部委公布, 2014 年全国献血人数达到约 130 000 000 人次, 将数据 130 000 000 用科学记数法表示为_____.

12. (3分) (2015•龙岩) 分解因式: $a^2 + 2a =$ _____.

13. (3分) (2015•龙岩) 若 $4a - 2b = 2\pi$, 则 $2a - b + \pi =$ _____.

14. (3分) (2015•龙岩) 圆锥的底面半径是 1, 母线长是 4, 则它的侧面展开图的圆心角是_____°.

15. (3 分) (2015•龙岩) 抛物线 $y=2x^2-4x+3$ 绕坐标原点旋转 180° 所得的抛物线的解析式是_____.

16. (3 分) (2015•龙岩) 我们把平面内与四边形各边端点构成的三角形都是等腰三角形的点叫做这个四边形的腰点 (如矩形的对角线交点是矩形的一个腰点), 则正方形的腰点共有_____个.

三、解答题 (本大题共 9 小题, 共 92 分)

17. (6 分) (2015•龙岩) 计算: $|- \sqrt{2}| + 2015^0 - 2\sqrt{2}\sin 30^\circ + \sqrt[3]{8} - 9 \times \frac{1}{3}$.

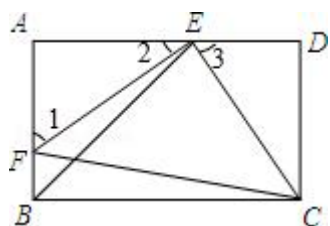
18. (6 分) (2015•龙岩) 先化简, 再求值: $(x+1)(x-1) + x(2-x) + (x-1)^2$, 其中 $x=2\sqrt{3}$.

19. (8 分) (2015•龙岩) 解方程: $1 + \frac{3x}{x-2} = \frac{6}{x-2}$.

20. (10 分) (2015•龙岩) 如图, E, F 分别是矩形 ABCD 的边 AD, AB 上的点, 若 $EF=EC$, 且 $EF \perp EC$.

(1) 求证: $AE=DC$;

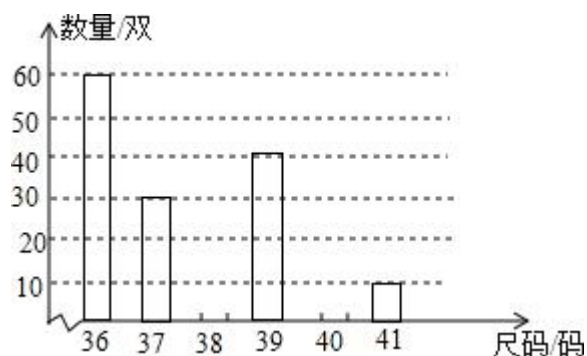
(2) 已知 $DC=\sqrt{2}$, 求 BE 的长.



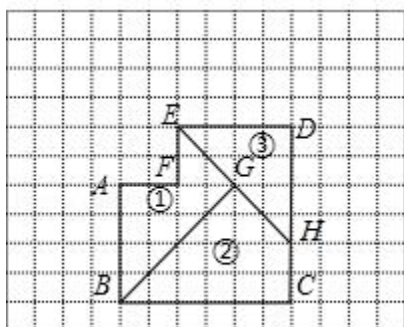
21. (11 分) (2015•龙岩) 某商场经理对某一品牌旅游鞋近一个月的销售情况进行统计后, 绘制了如下统计表与条形图:

尺码 (码)	数量 (双)	百分比 (%)
36	60	30
37	30	15
38	a	b
39	40	20
40	c	5
41	10	5

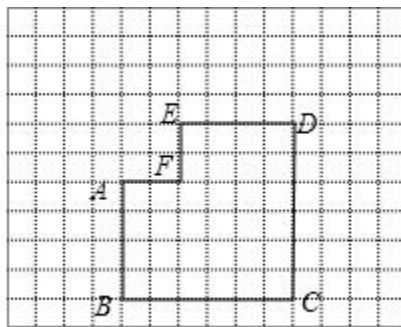
- (1) 写出表中 a, b, c 的值;
- (2) 补全条形图;
- (3) 商场经理准备购进同一品牌的旅游鞋 1500 双, 请根据市场实际情况估计他应该购进 38 码的鞋多少双?



22. (12 分) (2015•龙岩) 下列网格中的六边形 ABCDEF 是由边长为 6 的正方形左上角剪去边长为 2 的正方形所得, 该六边形按一定的方法可剪拼成一个正方形.



图甲



图乙

- (1) 根据剪拼前后图形的面积关系求出拼成的正方形的边长；
- (2) 如图甲，把六边形 $ABCDEF$ 沿 EH , BG 剪成①②③三部分，请在图甲中画出将②③与①拼成的正方形，然后标出②③变动后的位置，并指出②③属于旋转、平移和轴对称中的哪一种变换；
- (3) 在图乙中画出一一种与图甲不同位置的两条裁剪线，并在图乙中画出将此六边形剪拼成的正方形.

23. (12 分) (2015•龙岩) 某公交公司有 A, B 型两种客车，它们的载客量和租金如下表:

	A	B
载客量 (人/辆)	45	30
租金 (元/辆)	400	280

红星中学根据实际情况，计划租用 A, B 型客车共 5 辆，同时送七年级师生到基地校参加社会实践活动，设租用 A 型客车 x 辆，根据要求回答下列问题:

(1) 用含 x 的式子填写下表:

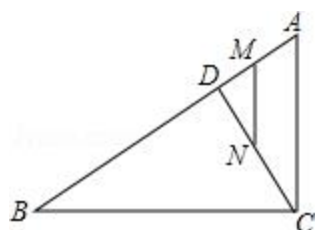
	车辆数 (辆)	载客量	租金 (元)
A	x	$45x$	$400x$
B	$5 - x$		

(2) 若要保证租车费用不超过 1900 元，求 x 的最大值;

(3) 在 (2) 的条件下, 若七年级师生共有 195 人, 写出所有可能的租车方案, 并确定最省钱的租车方案.

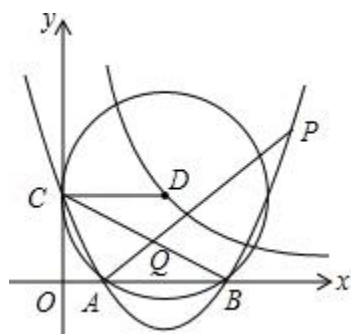
24. (13 分) (2015•龙岩) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=6$, $BC=8$, 点 D 以每秒 1 个单位长度的速度由点 A 向点 B 匀速运动, 到达 B 点即停止运动, M , N 分别是 AD , CD 的中点, 连接 MN , 设点 D 运动的时间为 t .

- (1) 判断 MN 与 AC 的位置关系;
- (2) 求点 D 由点 A 向点 B 匀速运动的过程中, 线段 MN 所扫过区域的面积;
- (3) 若 $\triangle DMN$ 是等腰三角形, 求 t 的值.



25. (14 分) (2015•龙岩) 如图, 已知点 D 在双曲线 $y=\frac{20}{x}$ ($x>0$) 的图象上, 以 D 为圆心的 $\odot D$ 与 y 轴相切于点 $C(0, 4)$, 与 x 轴交于 A , B 两点, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A , B , C 三点, 点 P 是抛物线上的动点, 且线段 AP 与 BC 所在直线有交点 Q .

- (1) 写出点 D 的坐标并求出抛物线的解析式;
- (2) 证明 $\angle ACO=\angle OBC$;
- (3) 探究是否存在点 P , 使点 Q 为线段 AP 的四等分点? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2015 年福建省龙岩市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，每小题的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1. (4 分) (2015•龙岩) -1 的倒数是 ()

A. -1 B. 0 C. 1 D. ± 1

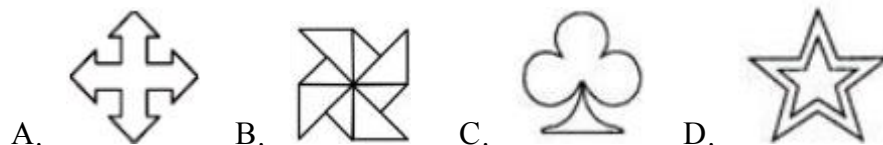
【解答】解： -1 的倒数是 -1 ，
故选：A.

2. (4 分) (2015•龙岩) 下列运算正确的是 ()

A. $x^2 \cdot x^3 = x^6$ B. $(x^2)^3 = x^6$ C. $x^3 + x^2 = x^5$ D. $x + x^2 = x^3$

【解答】解：A、 $x^2 \cdot x^3 = x^5$ ，错误；
B、 $(x^2)^3 = x^6$ ，正确；
C、 x^3 与 x^2 不是同类项，不能合并，错误；
D、 x 与 x^2 不是同类项，不能合并，错误；
故选 B

3. (2015•龙岩) 下列图形中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【解答】解：A、既是轴对称图形，又是中心对称图形，故 A 正确；
B、不是轴对称图形，是中心对称图形，故 B 错误；
C、是轴对称图形，不是中心对称图形，故 C 错误；
D、是轴对称图形，不是中心对称图形，故 D 错误.
故选：A.

4. (4分) (2015•龙岩) 下列事件中, 属于随机事件的是 ()

- A. $\sqrt{63}$ 的值比 8 大
- B. 购买一张彩票, 中奖
- C. 地球自转的同时也在绕日公转
- D. 袋中只有 5 个黄球, 摸出一个球是白球

【解答】解: A、 $\sqrt{63}$ 的值比 8 大属于不可能事件, 此选项错误;

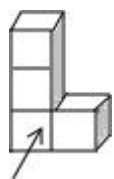
B、购买一张彩票, 可能中奖, 也可能不中奖, 属于随机事件, 此选项正确;

C、地球自转的同时也在绕日公转属于确定事件, 此选项错误;

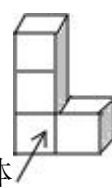
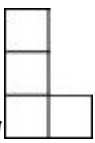
D、袋中只有 5 个黄球, 摸出一个球是白球属于不可能事件, 此选项错误.

故选: B.

5. (4分) (2015•龙岩) 如图所示几何体的主视图是 ()



- A.  B.  C.  D. 

【解答】解: 几何体  的主视图为 .

故选 C

6. (4分) (2015•龙岩) 若甲、乙、丙、丁四位同学一学期 4 次数学测试的平均成绩恰好都是 85 分, 方差分别为 $S_{\text{甲}}^2=0.80$, $S_{\text{乙}}^2=1.31$, $S_{\text{丙}}^2=1.72$, $S_{\text{丁}}^2=0.42$, 则成绩最稳定的同学是 ()

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【解答】解: $\because S_{\text{甲}}^2=0.80$, $S_{\text{乙}}^2=1.31$, $S_{\text{丙}}^2=1.72$, $S_{\text{丁}}^2=0.42$,

$$\therefore S_{\text{丁}}^2 < S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2 < S_{\text{丙}}^2,$$

$\therefore$ 成绩最稳定的同学是丁.

故选: D.

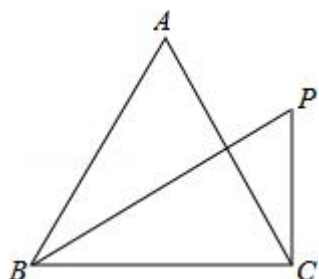
7. (4 分) (2015•龙岩) 下列统计图能够显示数据变化趋势的是 ()

A. 条形图 B. 扇形图 C. 折线图 D. 直方图

【解答】 解: 易于显示数据的变化趋势和变化规律的统计图是折线统计图.

故选 C.

8. (4 分) (2015•龙岩) 如图, 在边长为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形 ABC 中, 过点 C 垂直于 BC 的直线交 $\angle ABC$ 的平分线于点 P, 则点 P 到边 AB 所在直线的距离为 ()



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 1

【解答】 解: $\because \triangle ABC$ 为等边三角形, BP 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle PBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\because PC \perp BC,$$

$$\therefore \angle PCB = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PCB \text{ 中, } PC = BC \cdot \tan \angle PBC = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1,$$

$\therefore$ 点 P 到边 AB 所在直线的距离为 1,

故选: D.

9. (4分) (2015•龙岩) 已知点 P (a, b) 是反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 图象上异于点 (-1, -1) 的一个动点, 则 $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=(\quad)$

A. 2 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

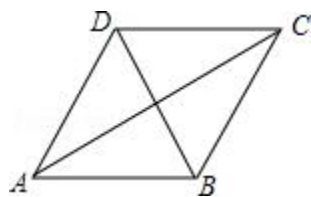
【解答】解: $\because$ 点 P (a, b) 是反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 图象上异于点 (-1, -1) 的一个动点,

$$\therefore ab=1,$$

$$\therefore \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=\frac{1+b}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{(1+a)(1+b)}=\frac{2+a+b}{1+a+b+ab}=\frac{2+a+b}{2+a+b}=1.$$

故选: B.

10. (4分) (2015•龙岩) 如图, 菱形 ABCD 的周长为 16, $\angle ABC=120^\circ$, 则 AC 的长为 ()



A. $4\sqrt{3}$ B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. 2

【解答】解: 在菱形 ABCD 中,

$$\because \angle ABC=120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE=60^\circ, \quad AC \perp BD,$$

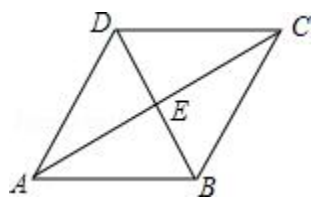
$\because$ 菱形 ABCD 的周长为 16,

$$\therefore AB=4,$$

$$\text{在 RT}\triangle ABE \text{ 中, } AE=AB\sin \angle ABE=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3},$$

$$\text{故可得 } AC=2AE=4\sqrt{3}.$$

故选 A.



二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

11. (3 分) (2015•龙岩) 2015 年 6 月 14 日是第 12 个“世界献血者日”，据国家相关部委公布，2014 年全国献血人数达到约 130 000 000 人次，将数据 130 000 000 用科学记数法表示为 1.3×10^8 .

【解答】解：将 130 000 000 用科学记数法表示为 1.3×10^8 .

故答案为： 1.3×10^8 .

12. (3 分) (2015•龙岩) 分解因式： $a^2+2a=$ $a(a+2)$.

【解答】解： $a^2+2a=a(a+2)$.

13. (3 分) (2015•龙岩) 若 $4a-2b=2\pi$ ，则 $2a-b+\pi=$ 2π .

【解答】解：因为 $4a-2b=2\pi$,

所以可得 $2a-b=\pi$,

把 $2a-b=\pi$ 代入 $2a-b+\pi=2\pi$.

14. (3 分) (2015•龙岩) 圆锥的底面半径是 1，母线长是 4，则它的侧面展开图的圆心角是 90° .

【解答】解：设圆锥侧面展开图的圆心角为 n .

根据题意得 $2\pi \times 1 = \frac{n\pi \times 4}{180}$

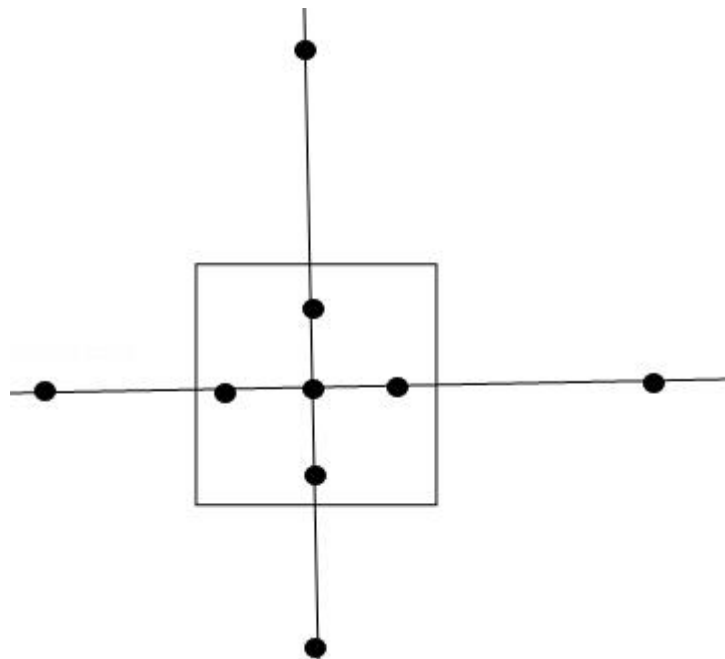
解得 $n=90^\circ$.

故答案为： 90°

15. (3 分) (2015•龙岩) 抛物线 $y=2x^2-4x+3$ 绕坐标原点旋转 180° 所得的抛物线的解析式是 $y=-2x^2-4x-3$.

【解答】解：将 $y=2x^2-4x+3$ 化为顶点式，得 $y=2(x-1)^2+1$ ，
 抛物线 $y=2x^2-4x+3$ 绕坐标原点旋转 180° 所得的抛物线的解析式是 $y=-2(x+1)^2-1$ ，
 化为一般式，得
 $y=-2x^2-4x-3$ ，
 故答案为： $y=-2x^2-4x-3$.

16. (3 分) (2015•龙岩) 我们把平面内与四边形各边端点构成的三角形都是等腰三角形的点叫做这个四边形的腰点（如矩形的对角线交点是矩形的一个腰点），
 则正方形的腰点共有 9 个.



【解答】解：如图，
 正方形一共有 9 个腰点，除了正方形的中心外，两条与边平行的对称轴上各有四个腰点.
 故答案为： 9.

三、解答题（本大题共 9 小题，共 92 分）

17. (6分) (2015•龙岩) 计算: $|- \sqrt{2}| + 2015^0 - 2\sqrt{2}\sin 30^\circ + \sqrt[3]{8} - 9 \times \frac{1}{3}$.

【解答】解: 原式 $= \sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} + 2 - 3 = 0$.

18. (6分) (2015•龙岩) 先化简, 再求值: $(x+1)(x-1) + x(2-x) + (x-1)^2$, 其中 $x=2\sqrt{3}$.

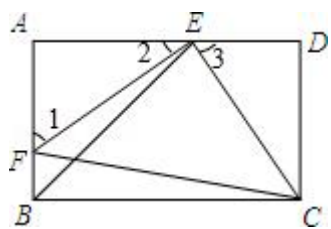
【解答】解: $(x+1)(x-1) + x(2-x) + (x-1)^2$
 $= x^2 - 1 + 2x - x^2 + x^2 - 2x + 1,$
 $= x^2,$
把 $x=2\sqrt{3}$ 代入原式 $= (2\sqrt{3})^2 = 12$.

19. (8分) (2015•龙岩) 解方程: $1 + \frac{3x}{x-2} = \frac{6}{x-2}$.

【解答】解: 方程两边同乘以 $(x-2)$ 得,
 $(x-2) + 3x = 6,$
解得: $x=2$,
检验: 当 $x=2$ 时, $x-2=0$,
 $\therefore x=2$ 不是原分式方程的解,
 $\therefore$ 原分式方程无解.

20. (10分) (2015•龙岩) 如图, E, F 分别是矩形 ABCD 的边 AD, AB 上的点, 若 $EF=EC$, 且 $EF \perp EC$.

- (1) 求证: $AE=DC$;
(2) 已知 $DC=\sqrt{2}$, 求 BE 的长.



【解答】(1) 证明: 在矩形 ABCD 中, $\angle A = \angle D = 90^\circ$,

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\because EF \perp EC,$$

$$\therefore \angle FEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle D \\ \angle 1 = \angle 3, \\ EF = EC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DCE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = DC;$$

(2) 解: 由 (1) 得 $AE = DC$,

$$\therefore AE = DC = \sqrt{2},$$

在矩形 $ABCD$ 中, $AB = CD = \sqrt{2}$,

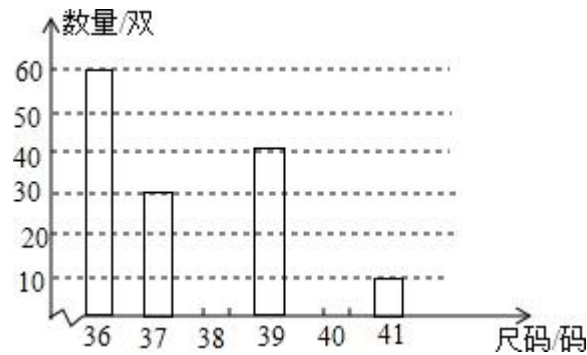
在 $R\triangle ABE$ 中, $AB^2 + AE^2 = BE^2$, 即 $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = BE^2$,

$$\therefore BE = 2.$$

21. (11 分) (2015•龙岩) 某商场经理对某一品牌旅游鞋近一个月的销售情况进行统计后, 绘制了如下统计表与条形图:

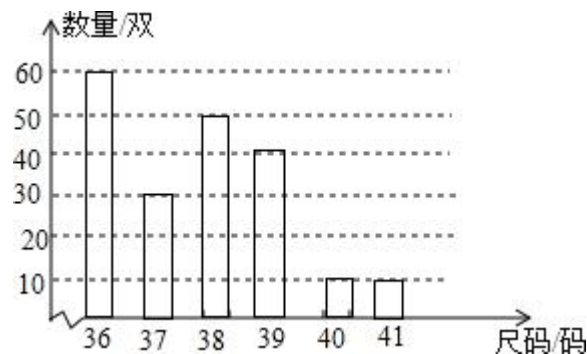
尺码 (码)	数量 (双)	百分比 (%)
36	60	30
37	30	15
38	a	b
39	40	20
40	c	5
41	10	5

- (1) 写出表中 a, b, c 的值;
- (2) 补全条形图;
- (3) 商场经理准备购进同一品牌的旅游鞋 1500 双, 请根据市场实际情况估计他应该购进 38 码的鞋多少双?



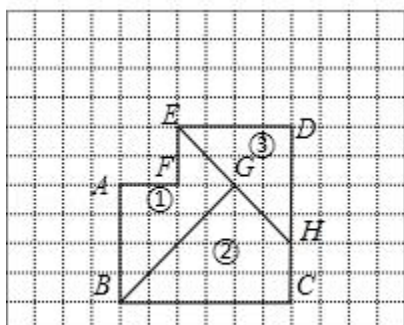
【解答】解: (1) 根据题意得: $60 \div 30\% = 200$, $c = 200 \times 5\% = 10$, $a = 200 - 60 - 30 - 40 - 10 - 10 = 50$; $\frac{50}{200} \times 100\% = 25\%$, 即 $b = 25$;

(2) 补全条形统计图, 如图所示:

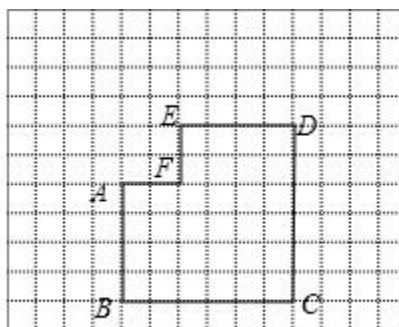


(3) 由 (1) 可得 38 码的旅游鞋大约占 25%, 故购进 1500 双旅游鞋中应购进 38 码鞋 375 双.

22. (12 分) (2015•龙岩) 下列网格中的六边形 ABCDEF 是由边长为 6 的正方形左上角剪去边长为 2 的正方形所得, 该六边形按一定的方法可剪拼成一个正方形.



图甲



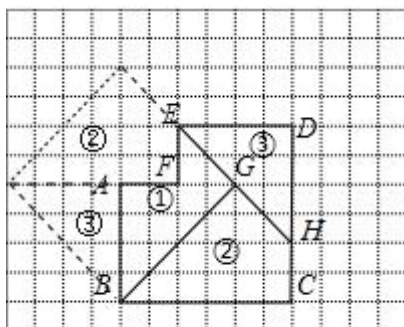
图乙

- (1) 根据剪拼前后图形的面积关系求出拼成的正方形的边长；
- (2) 如图甲，把六边形 ABCDEF 沿 EH, BG 剪成①②③三部分，请在图甲中画出将②③与①拼成的正方形，然后标出②③变动后的位置，并指出②③属于旋转、平移和轴对称中的哪一种变换；
- (3) 在图乙中画出一条与图甲不同位置的两条裁剪线，并在图乙中画出将此六边形剪拼成的正方形。

【解答】解：(1) 根据剪拼前后图形的面积相等，得出拼成的正方形的边长

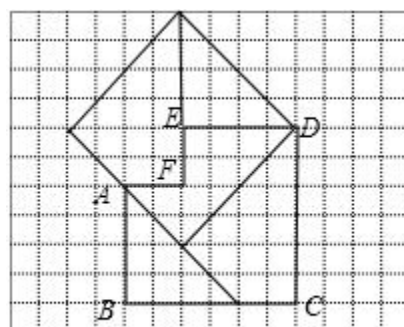
$$= \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2},$$

- (2) 如图，②③都属于平移，



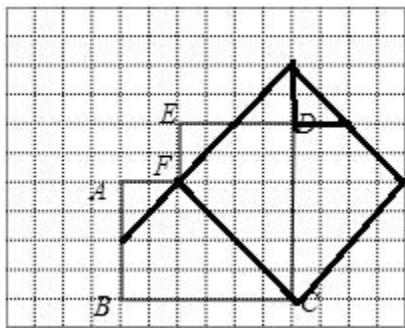
图甲

- (3) 如图乙：



图乙

或者



23. (12 分) (2015•龙岩) 某公交公司有 A, B 型两种客车, 它们的载客量和租金如下表:

	A	B
载客量 (人/辆)	45	30
租金 (元/辆)	400	280

红星中学根据实际情况, 计划租用 A, B 型客车共 5 辆, 同时送七年级师生到基地校参加社会实践活动, 设租用 A 型客车 x 辆, 根据要求回答下列问题:

(1) 用含 x 的式子填写下表:

	车辆数 (辆)	载客量	租金 (元)
A	x	$45x$	$400x$
B	$5 - x$	$30 (5 - x)$	$280 (5 - x)$

(2) 若要保证租车费用不超过 1900 元, 求 x 的最大值;

(3) 在 (2) 的条件下, 若七年级师生共有 195 人, 写出所有可能的租车方案, 并确定最省钱的租车方案.

【解答】 解: (1) $\because$ 载客量=车辆数 $\times$ 单车载客量, 租金=车辆数 $\times$ 单车租金,
 $\therefore$ B 型客车载客量= $30 (5 - x)$; B 型客车租金= $280 (5 - x)$;
故填: $30 (5 - x)$; $280 (5 - x)$.

(2) 根据题意, $400x + 280 (5 - x) \leq 1900$, 解得: $x \leq 4\frac{1}{6}$,

$\therefore x$ 的最大值为 4;

(3) 由 (2) 可知, $x \leq 4\frac{1}{6}$, 故 x 可能取值为 0、1、2、3、4,

①A 型 0 辆，B 型 5 辆，租车费用为 $400 \times 0 + 280 \times 5 = 1400$ 元，但载客量为 $45 \times 0 + 30 \times 5 = 150 < 195$ ，故不合题意舍去；

②A 型 1 辆，B 型 4 辆，租车费用为 $400 \times 1 + 280 \times 4 = 1520$ 元，但载客量为 $45 \times 1 + 30 \times 4 = 165 < 195$ ，故不合题意舍去；

③A 型 2 辆，B 型 3 辆，租车费用为 $400 \times 2 + 280 \times 3 = 1640$ 元，但载客量为 $45 \times 2 + 30 \times 3 = 180 < 195$ ，故不合题意舍去；

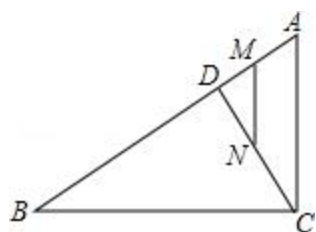
④A 型 3 辆，B 型 2 辆，租车费用为 $400 \times 3 + 280 \times 2 = 1760$ 元，但载客量为 $45 \times 3 + 30 \times 2 = 195 = 195$ ，符合题意；

⑤A 型 4 辆，B 型 1 辆，租车费用为 $400 \times 4 + 280 \times 1 = 1880$ 元，但载客量为 $45 \times 4 + 30 \times 1 = 210$ ，符合题意；

故符合题意的方案有④⑤两种，最省钱的方案是 A 型 3 辆，B 型 2 辆。

24. (13 分) (2015•龙岩) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=6$ ， $BC=8$ ，点 D 以每秒 1 个单位长度的速度由点 A 向点 B 匀速运动，到达 B 点即停止运动，M，N 分别是 AD，CD 的中点，连接 MN，设点 D 运动的时间为 t.

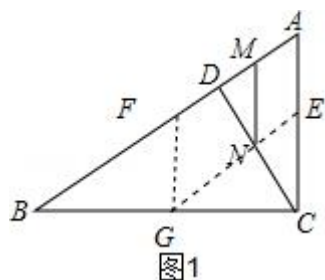
- (1) 判断 MN 与 AC 的位置关系；
- (2) 求点 D 由点 A 向点 B 匀速运动的过程中，线段 MN 所扫过区域的面积；
- (3) 若 $\triangle DMN$ 是等腰三角形，求 t 的值.



【解答】 解：(1) $\because$ 在 $\triangle ADC$ 中，M 是 AD 的中点，N 是 DC 的中点，

$\therefore MN \parallel AC$ ；

(2) 如图 1, 分别取 $\triangle ABC$ 三边 AC , AB , BC 的中点 E , F , G , 并连接 EG , FG ,



根据题意可得线段 MN 扫过区域的面积就是 $\square AFGE$ 的面积,

$$\because AC=6, BC=8,$$

$$\therefore AE=3, GC=4,$$

$$\because \angle ACB=90^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{四边形 } AFGE} = AE \cdot GC = 3 \times 4 = 12,$$

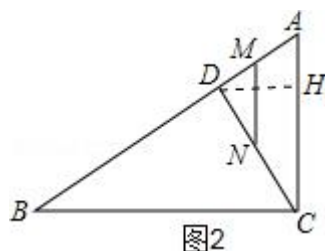
$\therefore$ 线段 MN 所扫过区域的面积为 12.

$$(3) \text{ 据题意可知: } MD = \frac{1}{2}AD, DN = \frac{1}{2}DC, MN = \frac{1}{2}AC = 3,$$

①当 $MD=MN=3$ 时, $\triangle DMN$ 为等腰三角形, 此时 $AD=AC=6$,

$$\therefore t=6,$$

②当 $MD=DN$ 时, $AD=DC$, 如图 2, 过点 D 作 $DH \perp AC$ 交 AC 于 H , 则 $AH = \frac{1}{2}AC = 3$,



$$\because \cos A = \frac{AH}{AD} = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore \frac{3}{AD} = \frac{6}{10}, \text{ 解得 } AD=5,$$

$$\therefore AD=t=5.$$

③如图 3, 当 $DN=MN=3$ 时, $AC=DC$, 连接 MC , 则 $CM \perp AD$,

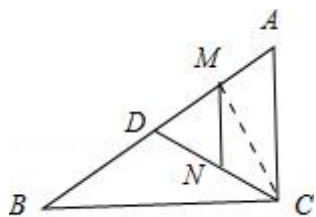


图3

$$\because \cos A = \frac{AM}{AC} = \frac{AC}{AB}, \text{ 即 } \frac{AM}{6} = \frac{6}{10},$$

$$\therefore AM = \frac{18}{5},$$

$$\therefore AD = t = 2AM = \frac{36}{5},$$

综上所述，当 $t=5$ 或 6 或 $\frac{36}{5}$ 时， $\triangle DMN$ 为等腰三角形.

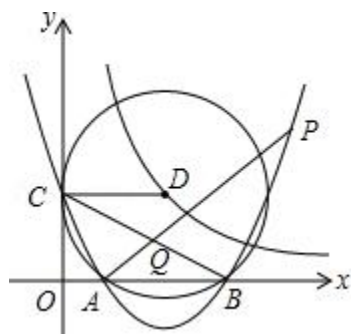
25. (14分) (2015•龙岩) 如图，已知点 D 在双曲线 $y = \frac{20}{x}$ ($x > 0$) 的图象上，

以 D 为圆心的 $\odot D$ 与 y 轴相切于点 $C(0, 4)$ ，与 x 轴交于 A, B 两点，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 A, B, C 三点，点 P 是抛物线上的动点，且线段 AP 与 BC 所在直线有交点 Q .

(1) 写出点 D 的坐标并求出抛物线的解析式；

(2) 证明 $\angle ACO = \angle OBC$ ；

(3) 探究是否存在点 P ，使点 Q 为线段 AP 的四等分点？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



【解答】 解：(1) $\because$ 以 D 为圆心的 $\odot D$ 与 y 轴相切于点 $C(0, 4)$,

$\therefore$ 点 D 的纵坐标是 4 ,

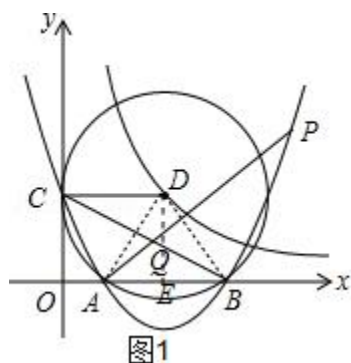
又 $\because$ 点 D 在双曲线 $y = \frac{20}{x}$ ($x > 0$) 的图象上,

$$\therefore 4 = \frac{20}{x},$$

解得 $x=5$,

故点 D 的坐标是 $(5, 4)$.

如图 1, 过点 D 作 $DE \perp x$ 轴, 垂足为 E, 连接 AD, BD,



在 $\text{RT}\triangle DAE$ 中, $DA=5$, $DE=4$,

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = 3,$$

$$\therefore OA = OE - AE = 2, \quad OB = OA + 2AE = 8,$$

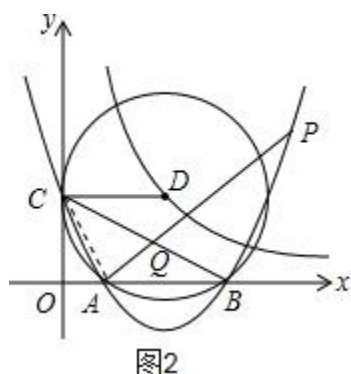
$$\therefore A(2, 0), \quad B(8, 0),$$

设抛物线的解析式为 $y = a(x-2)(x-8)$, 由于它过点 $C(0, 4)$,

$$\therefore a(0-2)(0-8) = 4, \quad \text{解得 } a = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 4.$$

(2) 如图 2, 连接 AC,



在 $\text{RT}\triangle AOC$ 中, $OA=2$, $CO=4$,

$$\therefore \tan \angle ACO = \frac{OA}{CO} = \frac{1}{2},$$

在 $\text{RT}\triangle\text{BOC}$ 中, $\text{OB}=8$, $\text{CO}=4$,

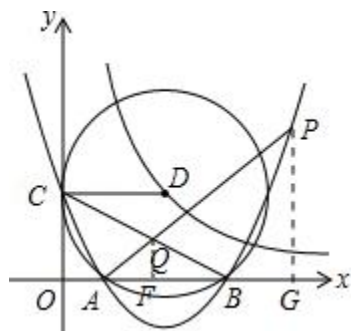
$$\therefore \tan \angle \text{CBO} = \frac{\text{CO}}{\text{OB}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle \text{ACO} = \angle \text{CBO}.$$

$$(3) \because \text{B} (8, 0), \text{C} (0, 4),$$

$$\therefore \text{直线 BC 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + 4,$$

如图 3, 分别过点 Q, P 作 $\text{QF} \perp x$ 轴, $\text{PG} \perp x$ 轴, 垂足分别为 F, G,



$$\text{设 } P \left(t, \frac{1}{4}t^2 - \frac{5}{2}t + 4 \right),$$

$$\textcircled{1} \text{AQ: } \text{AP}=1: 4, \text{ 则易得 } Q \left(\frac{t+6}{4}, \frac{t^2 - 10t + 16}{16} \right),$$

$$\because \text{点 Q 在直线 } y = -\frac{1}{2}x + 4 \text{ 上,}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \cdot \frac{t+6}{4} + 4 = \frac{t^2 - 10t + 16}{16}, \text{ 整理得 } t^2 - 8t - 36 = 0,$$

$$\text{解得 } t_1 = 4 + 2\sqrt{13}, \quad t_2 = 4 - 2\sqrt{13},$$

$$\therefore P_1 (4 + 2\sqrt{13}, 11 - \sqrt{13}), \quad P_2 (4 - 2\sqrt{13}, 11 + \sqrt{13}),$$

$$\textcircled{2} \text{AQ: } \text{AP}=2: 4, \text{ 则易得 } Q \left(\frac{t+2}{2}, \frac{t^2 - 10t + 16}{8} \right),$$

$$\because \text{点 Q 在直线 } y = -\frac{1}{2}x + 4 \text{ 上,}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \cdot \frac{t+2}{2} + 4 = \frac{t^2 - 10t + 16}{8},$$

$$\text{整理得 } t^2 - 8t - 12 = 0, \text{ 解得 } P_3 = 4 + 2\sqrt{7}, \quad P_4 = 4 - 2\sqrt{7},$$

$$\therefore P_3 (4 + 2\sqrt{7}, 5 - \sqrt{7}), \quad P_4 (4 - 2\sqrt{7}, 5 + \sqrt{7});$$

③AQ: AP=3: 4, 则易得 Q $(\frac{3t+2}{4}, \frac{3t^2-30t+48}{16})$,

∵点 Q 在直线 $y=-\frac{1}{2}x+4$ 上,

∴ $-\frac{1}{2} \cdot \frac{3t+2}{4} + 4 = \frac{3t^2-30t+48}{16}$, 整理得 $t^2-8t-4=0$, 解得 $t_5=4+2\sqrt{5}$, $t_6=4-2\sqrt{5}$,

∴ $P_5 (4+2\sqrt{5}, 3-\sqrt{5})$, $P_6 (4-2\sqrt{5}, 3+\sqrt{5})$,

综上所述, 抛物线上存在六个点 P, 使 Q 为线段 AP 的四等分点, 其坐标分别为 $P_1 (4+2\sqrt{13}, 11-\sqrt{13})$, $P_2 (4-2\sqrt{13}, 11+\sqrt{13})$, $P_3 (4+2\sqrt{7}, 5-\sqrt{7})$, $P_4 (4-2\sqrt{7}, 5+\sqrt{7})$; $P_5 (4+2\sqrt{5}, 3-\sqrt{5})$, $P_6 (4-2\sqrt{5}, 3+\sqrt{5})$.

参与本试卷答题和审题的老师有: 2300680618; 1987483819; gbl210; 73zzx; sks;
放飞梦想; sjzx; sdwdmahongye; caicl; HLing; 蓝月梦; 王学峰; wkd; 522286788;
1339885408@qq.com (排名不分先后)

菁优网

2016 年 4 月 14 日