

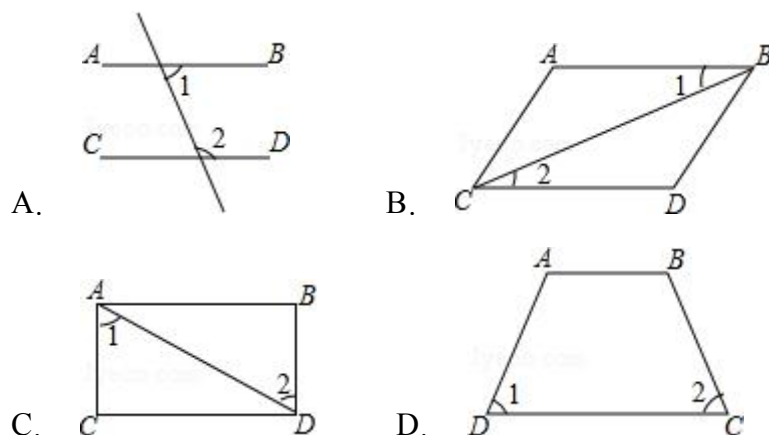
2015 年福建省福州市中考数学试卷

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分）

1. (3 分) (2015•福州) a 的相反数是 ()

- A. $|a|$ B. $\frac{1}{a}$ C. $-a$ D. $\sqrt{a}$

2. (3 分) (2015•福州) 下列图形中，由 $\angle 1 = \angle 2$ 能得到 $AB \parallel CD$ 的是 ()



3. (3 分) (2015•福州) 不等式组 $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



4. (3 分) (2015•福州) 计算 $3.8 \times 10^7 - 3.7 \times 10^7$, 结果用科学记数法表示为 ()

- A. 0.1×10^7 B. 0.1×10^6 C. 1×10^7 D. 1×10^6

5. (3 分) (2015•福州) 下列选项中，显示部分在总体中所占百分比的统计图是 ()

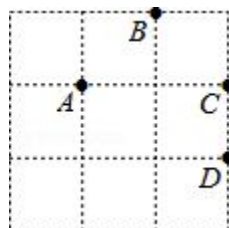
- A. 扇形图 B. 条形图 C. 折线图 D. 直方图

6. (3 分) (2015•福州) 计算 $a \cdot a^{-1}$ 的结果为 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. $-a$

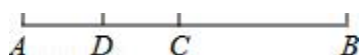
7. (3 分) (2015•福州) 如图，在 3×3 的正方形网格中由四个格点 A, B, C, D, 以其中一点为原点，网格线所在直线为坐标轴，网格线所在直线为坐标轴，建立

平面直角坐标系，使其余三个点中存在两个点关于一条坐标轴对称，则原点是（ ）



- A. A 点 B. B 点 C. C 点 D. D 点

8. (3 分) (2015•福州) 如图，C，D 分别是线段 AB，AC 的中点，分别以点 C，D 为圆心，BC 长为半径画弧，两弧交于点 M，测量 $\angle AMB$ 的度数，结果为（ ）



- A. 80° B. 90° C. 100° D. 105°

9. (3 分) (2015•福州) 若一组数据 1, 2, 3, 4, x 的平均数与中位数相同，则实数 x 的值不可能是（ ）

- A. 0 B. 2.5 C. 3 D. 5

10. (3 分) (2015•福州) 已知一个函数图象经过 (1, -4), (2, -2) 两点，在自变量 x 的某个取值范围内，都有函数值 y 随 x 的增大而减小，则符合上述条件的函数可能是（ ）

- A. 正比例函数 B. 一次函数 C. 反比例函数 D. 二次函数

二、填空题 (共 6 小题, 满分 24 分)

11. (4 分) (2015•福州) 分解因式 $a^2 - 9$ 的结果是_____.

12. (4 分) (2015•福州) 计算 $(x - 1)(x + 2)$ 的结果是_____.

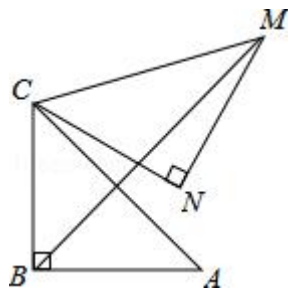
13. (4 分) (2015•福州) 一个反比例函数图象过点 A (-2, -3), 则这个反比例函数的解析式是_____.

14. (4 分) (2015•福州) 一组数据: 2015, 2015, 2015, 2015, 2015, 2015 的方差是_____.

15. (4 分) (2015•福州) 一个工件, 外部是圆柱体, 内部凹槽是正方体, 如图所示, 其中, 正方体一个面的四个顶点都在圆柱底面的圆周上, 若圆柱底面周长为 $2\pi\text{cm}$, 则正方体的体积为_____ cm^3 .



16. (4 分) (2015•福州) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=BC=\sqrt{2}$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle MNC$, 连接 BM , 则 BM 的长是_____.

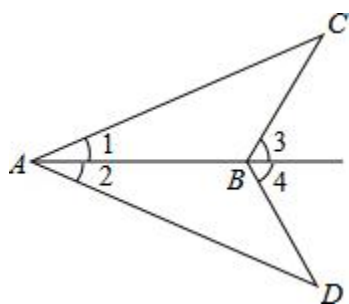


三、解答题 (共 10 小题, 满分 96 分)

17. (7 分) (2015•福州) 计算: $(-1)^{2015} + \sin 30^\circ + (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$.

18. (7 分) (2015•福州) 化简: $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

19. (8 分) (2015•福州) 如图, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, 求证: $AC = AD$.



20. (8 分) (2015•福州) 已知关于 x 的方程 $x^2 + (2m - 1)x + 4 = 0$ 有两个相等的实数根, 求 m 的值.

21. (9 分) (2015•福州) 有 48 支队 520 名运动员参加篮球、排球比赛, 其中每支篮球队 10 人, 每支排球队 12 人, 每名运动员只能参加一项比赛. 问: 篮球、排球队各有多少支?

22. (9 分) (2015•福州) 一个不透明袋子中有 1 个红球, 1 个绿球和 n 个白球, 这些球除颜色外无其他差别.

(1) 当 $n=1$ 时, 从袋中随机摸出 1 个球, 摸到红球和摸到白球的可能性是否相同? (在答题卡相应位置填“相同”或“不相同”);

(2) 从袋中随机摸出一个球, 记录其颜色, 然后放回, 大量重复该实验, 发现摸到绿球的频率稳定于 0.25, 则 n 的值是_____;

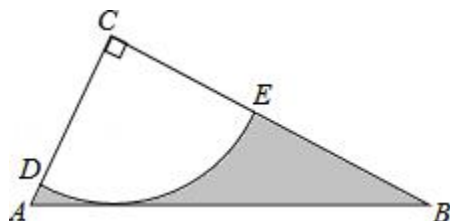
(3) 在一个摸球游戏中, 所有可能出现的结果如下:



根据树状图呈现的结果, 求两次摸出的球颜色不同的概率.

23. (10 分) (2015•福州) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=\sqrt{5}$, $\tan B=\frac{1}{2}$, 半径为 2 的 $\odot C$, 分别交 AC , BC 于点 D , E , 得到 $\widehat{DE}$.

- (1) 求证: AB 为 $\odot C$ 的切线;
- (2) 求图中阴影部分的面积.



24. (12 分) (2015•福州) 定义: 长宽比为 $\sqrt{n}:1$ (n 为正整数) 的矩形称为 $\sqrt{n}$ 矩形.

下面, 我们通过折叠的方式折出一个 $\sqrt{2}$ 矩形, 如图①所示.

操作 1: 将正方形 $ABCD$ 沿过点 B 的直线折叠, 使折叠后的点 C 落在对角线 BD 上的点 G 处, 折痕为 BH .

操作 2: 将 AD 沿过点 G 的直线折叠, 使点 A , 点 D 分别落在边 AB , CD 上, 折痕为 EF .

则四边形 $BCEF$ 为 $\sqrt{2}$ 矩形.

证明: 设正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 则 $BD=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

由折叠性质可知 $BG=BC=1$, $\angle AFE=\angle BFE=90^\circ$, 则四边形 $BCEF$ 为矩形.

$$\therefore \angle A = \angle BFE.$$

$$\therefore EF \parallel AD.$$

$$\therefore \frac{BG}{BD} = \frac{BF}{AB}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BF}{1}.$$

$$\therefore BF = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore BC:BF = 1: \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}:1.$$

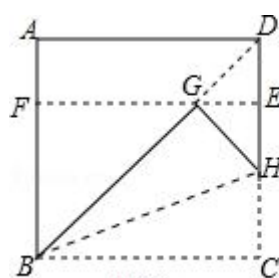
$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 为 $\sqrt{2}$ 矩形.

阅读以上内容，回答下列问题：

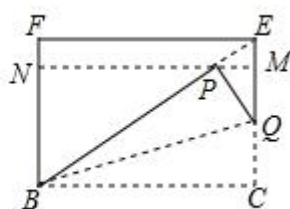
(1) 在图①中，所有与 CH 相等的线段是_____， $\tan \angle HBC$ 的值是_____；

(2) 已知四边形 $BCEF$ 为 $\sqrt{2}$ 矩形，模仿上述操作，得到四边形 $BCMN$ ，如图②，求证：四边形 $BCMN$ 是 $\sqrt{3}$ 矩形；

(3) 将图②中的 $\sqrt{3}$ 矩形 $BCMN$ 沿用 (2) 中的方式操作 3 次后，得到一个“ $\sqrt{n}$ 矩形”，则 n 的值是_____.



图①



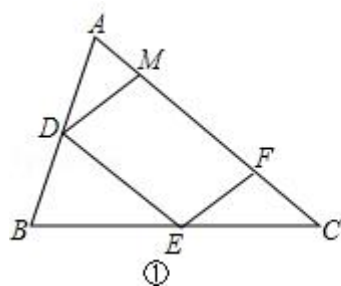
图②

25. (13 分) (2015•福州) 如图①，在锐角 $\triangle ABC$ 中， D ， E 分别为 AB ， BC 中点， F 为 AC 上一点，且 $\angle AFE = \angle A$ ， $DM \parallel EF$ 交 AC 于点 M .

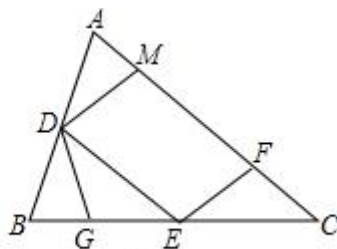
(1) 求证： $DM = DA$ ；

(2) 点 G 在 BE 上，且 $\angle BDG = \angle C$ ，如图②，求证： $\triangle DEG \sim \triangle ECF$ ；

(3) 在图②中，取 CE 上一点 H ，使 $\angle CFH = \angle B$ ，若 $BG = 1$ ，求 EH 的长.



①



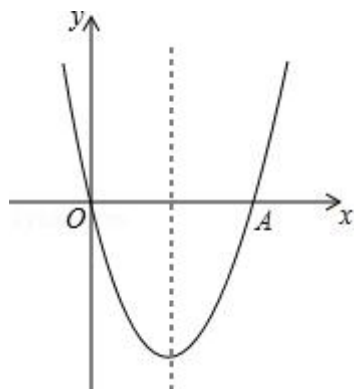
②

26. (13 分) (2015•福州) 如图，抛物线 $y = x^2 - 4x$ 与 x 轴交于 O ， A 两点， P 为抛物线上一点，过点 P 的直线 $y = x + m$ 与对称轴交于点 Q .

(1) 这条抛物线的对称轴是_____，直线 PQ 与 x 轴所夹锐角的度数是_____；

(2) 若两个三角形面积满足 $S_{\triangle POQ} = \frac{1}{3}S_{\triangle PAQ}$ ，求 m 的值；

(3) 当点 P 在 x 轴下方的抛物线上时，过点 C (2, 2) 的直线 AC 与直线 PQ 交于点 D，求：①PD+DQ 的最大值；②PD•DQ 的最大值.



2015 年福建省福州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分）

1. (3 分) (2015•福州) a 的相反数是 ()

- A. $|a|$ B. $\frac{1}{a}$ C. $-a$ D. $\sqrt{a}$

考点： 实数的性质.

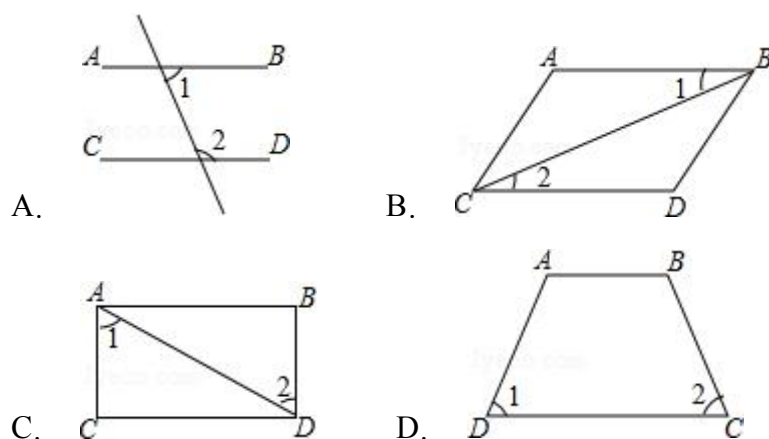
分析： 根据相反数的概念解答即可.

解答： 解： a 的相反数是 $-a$.

故选： C.

点评： 本题考查了相反数的意义，只有符号不同的两个数互为相反数，0 的相反数是 0. 一个数的相反数就是在这个数前面添上一个“ $-$ ”号.

2. (3 分) (2015•福州) 下列图形中，由 $\angle 1 = \angle 2$ 能得到 $AB \parallel CD$ 的是 ()

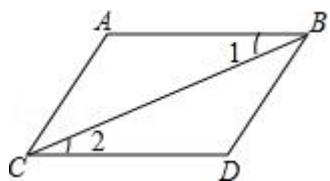


考点： 平行线的判定.

专题： 计算题.

分析： 利用平行线的判定方法判断即可.

解答： 解： 如图所示：



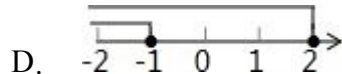
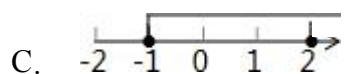
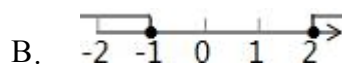
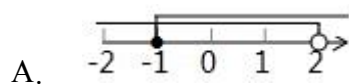
$\because \angle 1 = \angle 2$ (已知),

$\therefore AB \parallel CD$ (内错角相等, 两直线平行),

故选 B

点评: 此题考查了平行线的判定, 熟练掌握平行线的判定方法是解本题的关键.

3. (3 分) (2015•福州) 不等式组 $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



考点: 解一元一次不等式组; 在数轴上表示不等式的解集.

分析: 首先根据解一元一次不等式组的方法, 可得不等式组 $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \end{cases}$ 的解集是

$-1 \leq x < 2$; 然后在数轴上表示出不等式组 $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \end{cases}$ 的解集即可.

解答: 解: 不等式组 $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \end{cases}$ 的解集是:

$-1 \leq x < 2$,

$\therefore$ 不等式组 $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示为:



故选: A.

点评：（1）此题主要考查了解一元一次不等式组的方法，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：解一元一次不等式组时，一般先求出其中各不等式的解集，再求出这些解集的公共部分，利用数轴可以直观地表示不等式组的解集.

（2）此题还考查了用数轴表示不等式的解集的方法，要注意“两定”：一是定界点，一般在数轴上只标出原点和界点即可. 定边界点时要注意，点是实心还是空心，若边界点含于解集为实心点，不含于解集即为空心点；二是定方向，定方向的原则是：“小于向左，大于向右”.

4. (3 分) (2015•福州) 计算 $3.8 \times 10^7 - 3.7 \times 10^7$ ，结果用科学记数法表示为 ()

A. 0.1×10^7 B. 0.1×10^6 C. 1×10^7 D. 1×10^6

考点：科学记数法—表示较大的数.

分析：直接根据乘法分配律即可求解.

解答：解： $3.8 \times 10^7 - 3.7 \times 10^7$

$$= (3.8 - 3.7) \times 10^7$$

$$= 0.1 \times 10^7$$

$$= 1 \times 10^6.$$

故选：D.

点评：此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值. 注意灵活运用运算定律简便计算.

5. (3 分) (2015•福州) 下列选项中，显示部分在总体中所占百分比的统计图是 ()

A. 扇形图 B. 条形图 C. 折线图 D. 直方图

考点：统计图的选择.

分析： 根据统计图的特点进行分析可得：扇形统计图表示的是部分在总体中所占的百分比，但一般不能直接从图中得到具体的数据；折线统计图表示的是事物的变化情况；条形统计图能清楚地表示出每个项目的具体数目．

解答： 解：在进行数据描述时，要显示部分在总体中所占的百分比，应采用扇形统计图；

故选：A．

点评： 本题考查统计图的选择，解决本题的关键是明确：扇形统计图表示的是部分在总体中所占的百分比，但一般不能直接从图中得到具体的数据；折线统计图表示的是事物的变化情况；条形统计图能清楚地表示出每个项目的具体数目；频率分布直方图，清楚显示在各个不同区间内取值，各组频率分布情况，易于显示各组之间频率的差别．

6. (3 分) (2015•福州) 计算 $a \cdot a^{-1}$ 的结果为 ()

A. -1 B. 0 C. 1 D. $-a$

考点： 分式的乘除法；负整数指数幂．

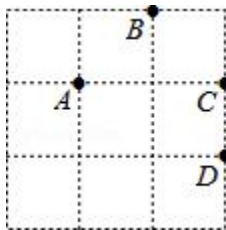
分析： 利用同底数幂的乘法，零指数幂的计算法则计算即可得到结果．

解答： 解： $a \cdot a^{-1} = a^0 = 1$ ．

故选：C．

点评： 此题考查了同底数幂的乘法，零指数幂运算，熟练掌握运算是解本题的关键．

7. (3 分) (2015•福州) 如图，在 3×3 的正方形网格中由四个格点 A, B, C, D, 以其中一点为原点，网格线所在直线为坐标轴，网格线所在直线为坐标轴，建立平面直角坐标系，使其余三个点中存在两个点关于一条坐标轴对称，则原点是 ()



- A. A 点 B. B 点 C. C 点 D. D 点

考点： 关于 x 轴、 y 轴对称的点的坐标；坐标确定位置.

分析： 以每个点为原点，确定其余三个点的坐标，找出满足条件的点，得到答案.

解答： 解：当以点 B 为原点时，

$A(-1, -1)$ ， $C(1, -1)$ ，

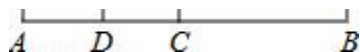
则点 A 和点 C 关于 y 轴对称，

符合条件，

故选：B.

点评： 本题考查的是关于 x 轴、 y 轴对称的点的坐标和坐标确定位置，掌握平面直角坐标系内点的坐标的确定方法和对称的性质是解题的关键.

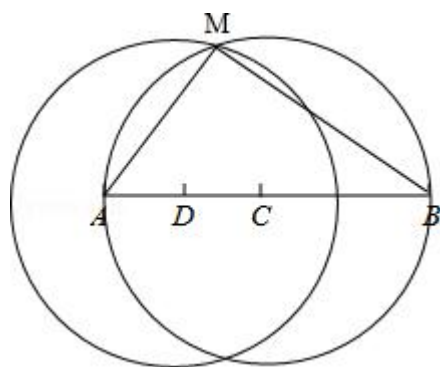
8. (3 分) (2015•福州) 如图， C ， D 分别是线段 AB ， AC 的中点，分别以点 C ， D 为圆心， BC 长为半径画弧，两弧交于点 M ，测量 $\angle AMB$ 的度数，结果为 ()



- A. 80° B. 90° C. 100° D. 105°

考点： 等腰三角形的性质；作图—基本作图.

分析： 根据题意，可得 AB 是以点 C 为圆心， BC 长为半径的圆的直径，然后根据直径对的圆周角是 90° ，可得 $\angle AMB$ 的度数是 90° ，据此解答即可.



解答： 解：如图，
 AB 是以点 C 为圆心，BC 长为半径的圆的直径，
 因为直径对的圆周角是 90° ，
 所以 $\angle AMB = 90^\circ$ ，

所以测量 $\angle AMB$ 的度数，结果为 90° 。

故选：B.

点评：（1）此题主要考查了作图 – 基本作图的方法，要熟练掌握，注意结合基本的几何图形的性质.

（2）此题还考查了圆周角的知识，解答此题的关键是要明确：直径对的圆周角是 90° 。

9. (3 分) (2015•福州) 若一组数据 1, 2, 3, 4, x 的平均数与中位数相同，则实数 x 的值不可能是 ()

- A. 0 B. 2.5 C. 3 D. 5

考点： 中位数；算术平均数.

分析： 因为中位数的值与大小排列顺序有关，而此题中 x 的大小位置未定，故应该分类讨论 x 所处的所有位置情况：从小到大（或从大到小）排列在中间；结尾；开始的位置.

解答： 解：（1）将这组数据从小到大的顺序排列为 1, 2, 3, 4, x，
 处于中间位置的数是 3，
 $\therefore$ 中位数是 3，

平均数为 $(1+2+3+4+x) \div 5$ ，

$$\therefore 3 = (1+2+3+4+x) \div 5,$$

解得 $x=5$ ，符合排列顺序；

(2) 将这组数据从小到大的顺序排列后 1, 2, 3, x , 4,
中位数是 3,

此时平均数是 $(1+2+3+4+x) \div 5=3$,

解得 $x=5$ ，不符合排列顺序；

(3) 将这组数据从小到大的顺序排列后 1, x , 2, 3, 4,
中位数是 2,

平均数 $(1+2+3+4+x) \div 5=2$,

解得 $x=0$ ，不符合排列顺序；

(4) 将这组数据从小到大的顺序排列后 x , 1, 2, 3, 4,
中位数是 2,

平均数 $(1+2+3+4+x) \div 5=2$,

解得 $x=0$ ，符合排列顺序；

(5) 将这组数据从小到大的顺序排列后 1, 2, x , 3, 4,
中位数, x ,

平均数 $(1+2+3+4+x) \div 5=x$,

解得 $x=2.5$ ，符合排列顺序；

$\therefore x$ 的值为 0、2.5 或 5.

故选 C.

点评： 本题考查了确定一组数据的中位数，涉及到分类讨论思想，较难，要明确中位数的值与大小排列顺序有关，一些学生往往对这个概念掌握不清楚，计算方法不明确而解答不完整. 注意找中位数的时候一定要先排好顺序，然后再根据奇数和偶数个来确定中位数. 如果数据有奇数个，则正中间的数字即为所求；如果是偶数个，则找中间两位数的平均数

10. (3 分) (2015•福州) 已知一个函数图象经过 $(1, -4)$, $(2, -2)$ 两点, 在自变量 x 的某个取值范围内, 都有函数值 y 随 x 的增大而减小, 则符合上述条件的函数可能是 ()

A. 正比例函数 B. 一次函数 C. 反比例函数 D. 二次函数

考点: 二次函数的性质; 一次函数的性质; 正比例函数的性质; 反比例函数的性质.

分析: 求出一次函数和反比例函数的解析式, 根据其性质进行判断.

解答: 解: 设一次函数解析式为: $y=kx+b$,

$$\text{由题意得, } \begin{cases} k+b=-4 \\ 2k+b=-2 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k=2 \\ b=-6 \end{cases},$$

$$\therefore k > 0,$$

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ A、B 错误,

$$\text{设反比例函数解析式为: } y=\frac{k}{x},$$

$$\text{由题意得, } k=-4,$$

$$k < 0,$$

$\therefore$ 在每个象限, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ C 错误,

当抛物线开口向上, $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而减小.

故选: D.

点评: 本题考查的是正比例函数、一次函数、反比例函数和二次函数的性质, 掌握各个函数的增减性是解题的关键.

二、填空题 (共 6 小题, 满分 24 分)

11. (4 分) (2015•福州) 分解因式 $a^2 - 9$ 的结果是 $(a+3)(a-3)$.

考点： 因式分解-运用公式法.

分析： 直接运用平方差公式分解即可.

解答： 解： $a^2 - 9 = (a+3)(a-3)$.

故答案为： $(a+3)(a-3)$.

点评： 本题考查了公式法分解因式，熟练掌握平方差公式的结构特点是解题的关键.

12. (4 分) (2015•福州) 计算 $(x-1)(x+2)$ 的结果是 x^2+x-2 .

考点： 多项式乘多项式.

分析： 根据多项式乘以多项式的法则，可表示为 $(a+b)(m+n) = am+an+bm+bn$ ，计算即可.

解答： 解： $(x-1)(x+2)$

$$= x^2 + 2x - x - 2$$

$$= x^2 + x - 2.$$

故答案为： x^2+x-2 .

点评： 本题主要考查多项式乘以多项式的法则. 注意不要漏项，漏字母，有同类项的合并同类项.

13. (4 分) (2015•福州) 一个反比例函数图象过点 A $(-2, -3)$ ，则这个反比例函数的解析式是 $y = -\frac{6}{x}$.

考点： 待定系数法求反比例函数解析式.

分析： 设出反比例函数解析式，然后把点的坐标代入求出 k 值，即可得到解析式.

解答： 解： 设这个反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$,

$$\therefore \frac{k}{-2} = -3,$$

解得 $k=6$,

$\therefore$ 这个反比例函数的解析式是 $y = \frac{6}{x}$.

故答案为: $y = \frac{6}{x}$.

点评: 本题考查了待定系数法求反比例函数解析式, 灵活运用待定系数法是解题的关键, 本题把点的坐标代入函数表达式进行计算即可求解.

14. (4 分) (2015•福州) 一组数据: 2015, 2015, 2015, 2015, 2015, 2015 的方差是 0.

考点: 方差.

分析: 方差是用来衡量一组数据波动大小的量. 数据 2015, 2015, 2015, 2015, 2015, 2015 全部相等, 没有波动, 故其方差为 0.

解答: 解: 由于方差是反映一组数据的波动大小的, 而这一组数据没有波动, 故它的方差为 0.

故答案为: 0.

点评: 本题考查方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量, 方差越大, 表明这组数据偏离平均数越大, 即波动越大, 数据越不稳定; 反之, 方差越小, 表明这组数据分布比较集中, 各数据偏离平均数越小, 即波动越小, 数据越稳定.

15. (4 分) (2015•福州) 一个工件, 外部是圆柱体, 内部凹槽是正方体, 如图所示, 其中, 正方体一个面的四个顶点都在圆柱底面的圆周上, 若圆柱底面周长为 $2\pi\text{cm}$, 则正方体的体积为 $2\sqrt{2}$ cm^3 .



考点: 圆柱的计算.

分析: 作出该几何体的俯视图, 然后确定底面圆的半径, 从而求得正方体的棱长, 最后求得体积.

解答: 解: 该几何体的俯视图如图:

$\because$ 圆柱底面周长为 $2\pi\text{cm}$,

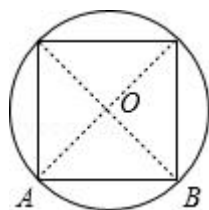
$$\therefore OA=OB=1\text{cm},$$

$$\because \angle AOB=90^\circ,$$

$$\therefore AB=\sqrt{2}OA=\sqrt{2},$$

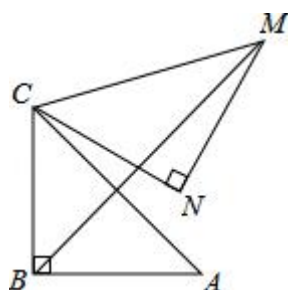
$$\therefore \text{该正方体的体积为 } (\sqrt{2})^3=2\sqrt{2},$$

故答案为: $2\sqrt{2}$.



点评: 本题考查了圆柱的计算, 解题的关键是确定底面圆的半径, 这是确定正方体的棱长的关键, 难度不大.

16. (4分) (2015•福州) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=BC=\sqrt{2}$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle MNC$, 连接 BM, 则 BM 的长是 $\sqrt{3}+1$.



考点: 旋转的性质; 全等三角形的判定与性质; 角平分线的性质; 等边三角形的判定与性质; 等腰直角三角形.

分析: 如图, 连接 AM, 由题意得: $CA=CM$, $\angle ACM=60^\circ$, 得到 $\triangle ACM$ 为等边三角形根据 $AB=BC$, $CM=AM$, 得出 BM 垂直平分 AC, 于是求出 $BO=\frac{1}{2}AC=1$,

$$OM=CM \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}, \text{ 最终得到答案 } BM=BO+OM=1+\sqrt{3}.$$

解答: 解: 如图, 连接 AM,

由题意得: $CA=CM$, $\angle ACM=60^\circ$,

∴ $\triangle ACM$ 为等边三角形,

∴ $AM=CM$, $\angle MAC=\angle MCA=\angle AMC=60^\circ$;

∵ $\angle ABC=90^\circ$, $AB=BC=\sqrt{2}$,

∴ $AC=2=CM=2$,

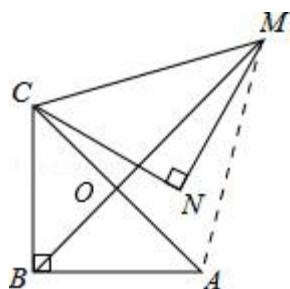
∵ $AB=BC$, $CM=AM$,

∴ BM 垂直平分 AC ,

∴ $BO=\frac{1}{2}AC=1$, $OM=CM\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}$,

∴ $BM=BO+OM=1+\sqrt{3}$,

故答案为: $1+\sqrt{3}$.



点评: 本题考查了图形的变换—旋转, 等腰直角三角形的性质, 等边三角形的判定和性质, 线段的垂直平分线的性质, 准确把握旋转的性质是解题的关键.

三、解答题 (共 10 小题, 满分 96 分)

17. (7 分) (2015•福州) 计算: $(-1)^{2015}+\sin 30^\circ+(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$.

考点: 二次根式的混合运算; 特殊角的三角函数值.

分析: 运用 -1 的奇次方等于 -1 , 30° 角的正弦等于 $\frac{1}{2}$, 结合平方差公式进行计算, 即可解决问题.

解答: 解: 原式 $= -1 + \frac{1}{2} + 4 - 3$

$$= \frac{1}{2}.$$

点评： 该题主要考查了二次根式的混合运算、特殊角的三角函数值等知识点及其应用问题；牢固掌握特殊角的三角函数值、灵活运用二次根式的混合运算法则是正确进行代数运算的基础和关键.

18. (7分) (2015•福州) 化简: $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

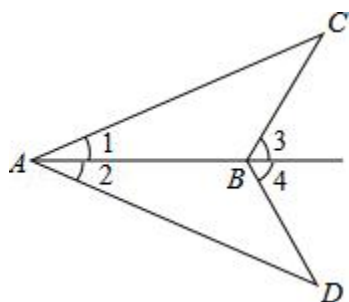
考点： 分式的加减法.

分析： 根据同分母分式的减法法则计算，再根据完全平方公式展开，合并同类项后约分计算即可求解.

解答： 解: $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}$
$$= \frac{a^2+2ab+b^2-2ab}{a^2+b^2}$$
$$= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$$
$$= 1.$$

点评： 考查了同分母分式加减法法则：同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减；完全平方公式，合并同类项.

19. (8分) (2015•福州) 如图， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，求证：AC=AD.



考点： 全等三角形的判定与性质.

专题： 证明题.

分析： 先证出 $\angle ABC = \angle ABD$ ，再由ASA证明 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ ，得出对应边相等即可.

解答： 证明： $\because \angle 3 = \angle 4$,

$\therefore \angle ABC = \angle ABD$,

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中,
$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ AB = AB \\ \angle ABC = \angle ABD \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ABD$ (ASA),

$\therefore AC = AD$.

点评： 本题考查了全等三角形的判定与性质；熟练掌握全等三角形的判定方法，证明三角形全等是解决问题的关键.

20. (8 分) (2015•福州) 已知关于 x 的方程 $x^2 + (2m - 1)x + 4 = 0$ 有两个相等的实数根，求 m 的值.

考点： 根的判别式.

分析： 先根据一元二次方程有两个相等的实数根得出 $\Delta = 0$ 即可得到关于 m 的方程，解方程求出 m 的值即可.

解答： 解： $\because x^2 + (2m - 1)x + 4 = 0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta = (2m - 1)^2 - 4 \times 4 = 0$,

解得 $m = -\frac{3}{2}$ 或 $m = \frac{5}{2}$.

点评： 本题考查的是一元二次方程根的判别式，根据题意得出关于 m 的方程是解答此题的关键.

21. (9 分) (2015•福州) 有 48 支队 520 名运动员参加篮球、排球比赛，其中每支篮球队 10 人，每支排球队 12 人，每名运动员只能参加一项比赛. 问：篮球、排球队各有多少支？

考点： 二元一次方程组的应用.

分析： 设篮球队有 x 支，排球队有 y 支，根据共有 48 支队，520 名运动员建立方程组求出其解即可.

解答： 解：设篮球队有 x 支，排球队有 y 支，由题意，得

$$\begin{cases} x+y=48 \\ 10x+12y=520 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} x=28 \\ y=20 \end{cases}.$

答：篮球队有 28 支，排球队有 20 支.

点评： 本题考查了列二元一次方程组解实际问题的运用，二元一次方程组的解法的运用，解答时根据条件建立二元一次方程组是关键.

22. (9 分) (2015•福州) 一个不透明袋子中有 1 个红球，1 个绿球和 n 个白球，这些球除颜色外无其他差别.

(1) 当 $n=1$ 时，从袋中随机摸出 1 个球，摸到红球和摸到白球的可能性是否相同？(在答题卡相应位置填“相同”或“不相同”);

(2) 从袋中随机摸出一个球，记录其颜色，然后放回，大量重复该实验，发现摸到绿球的频率稳定于 0.25，则 n 的值是 2;

(3) 在一个摸球游戏中，所有可能出现的结果如下：



根据树状图呈现的结果，求两次摸出的球颜色不同的概率.

考点： 列表法与树状图法；概率公式；利用频率估计概率.

分析： (1) 因为红球和白球的个数一样，所以被摸到的可能性相同；

(2) 根据摸到绿球的频率稳定于 0.25，即可求出 n 的值；

(3) 根据树状图即可求出两次摸出的球颜色不同的概率.

解答： 解：(1) 当 $n=1$ 时，红球和白球的个数一样，所以被摸到的可能性相同，故答案为：相同；

(2) $\because$ 摸到绿球的频率稳定于 0.25,

$$\therefore \frac{1}{1+1+n} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore n=2,$$

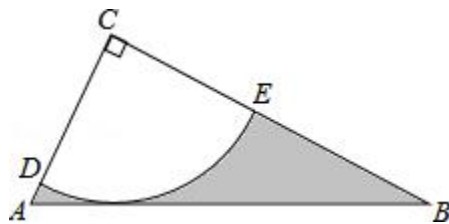
故答案为：2;

(3) 由树状图可知，共有 12 种结果，其中两次摸出的球颜色不同的 10 种，
所以其概率 $= \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

点评： 此题考查的是用列表法或树状图法求概率．列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

23. (10 分) (2015•福州) 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=\sqrt{5}$ ， $\tan B=\frac{1}{2}$ ，半径为 2 的 $\odot C$ ，分别交 AC ， BC 于点 D ， E ，得到 $\widehat{DE}$.

- (1) 求证： AB 为 $\odot C$ 的切线；
- (2) 求图中阴影部分的面积.



考点： 切线的判定；勾股定理；扇形面积的计算.

专题： 计算题.

分析： (1) 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于 H ，如图，先在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，利用正切的定义计算出 $BC=2AC=2\sqrt{5}$ ，再利用勾股定理计算出 $AB=5$ ，接着利用面积法计算出 $CH=2$ ，则可判断 CH 为 $\odot C$ 的半径，然后根据切线的判定定理即可得到 AB 为 $\odot C$ 的切线；

(2) 根据三角形面积公式和扇形的面积公式，利用 $S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle ACB} - S_{\text{扇形 CDE}}$ 进行计算即可.

解答： (1) 证明：过点 C 作 $CH \perp AB$ 于 H ，如图，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\because \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$,

$\therefore BC = 2AC = 2\sqrt{5}$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 5,$$

$$\therefore \frac{1}{2}CH \cdot AB = \frac{1}{2}AC \cdot BC,$$

$$\therefore CH = \frac{\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{5} = 2,$$

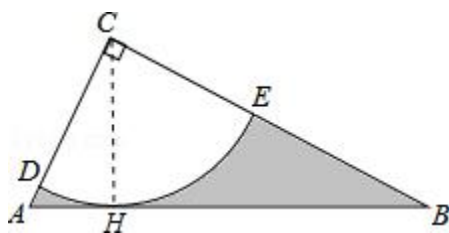
$\therefore \odot C$ 的半径为 2,

$\therefore CH$ 为 $\odot C$ 的半径,

而 $CH \perp AB$,

$\therefore AB$ 为 $\odot C$ 的切线;

$$\begin{aligned} (2) \text{ 解: } S_{\text{阴影部分}} &= S_{\triangle ACB} - S_{\text{扇形 CDE}} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 5 - \frac{90 \cdot \pi \cdot 2^2}{360} \\ &= 5 - \pi. \end{aligned}$$



点评: 本题考查了切线的判定: 经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线. 在判定一条直线为圆的切线时, 当已知条件中未明确指出直线和圆是否有公共点时, 常过圆心作该直线的垂线段, 证明该线段的长等于半径. 也考查了勾股定理和扇形面积的计算.

24. (12 分) (2015•福州) 定义: 长宽比为 $\sqrt{n}:1$ (n 为正整数) 的矩形称为 $\sqrt{n}$ 矩形.

下面, 我们通过折叠的方式折出一个 $\sqrt{2}$ 矩形, 如图①所示.

操作 1: 将正方形 $ABCD$ 沿过点 B 的直线折叠, 使折叠后的点 C 落在对角线 BD 上的点 G 处, 折痕为 BH .

第 25 页 (共 34 页)

专题： 阅读型；新定义.

分析： (1) 由折叠即可得到 $DG=GH=CH$, 设 $HC=x$, 则有 $DG=GH=x$, $DH=\sqrt{2}x$, 根据 $DC=DH+CH=1$, 就可求出 HC , 然后运用三角函数的定义即可求出 $\tan \angle HBC$ 的值;

(2) 只需借鉴阅读中证明“四边形 $BCEF$ 为 $\sqrt{2}$ 矩形”的方法就可解决问题;

(3) 同 (2) 中的证明可得: 将 $\sqrt{3}$ 矩形沿用 (2) 中的方式操作 1 次后, 得到一个“ $\sqrt{4}$ 矩形”, 将 $\sqrt{4}$ 矩形沿用 (2) 中的方式操作 1 次后, 得到一个“ $\sqrt{5}$ 矩形”, 将 $\sqrt{5}$ 矩形沿用 (2) 中的方式操作 1 次后, 得到一个“ $\sqrt{6}$ 矩形”, 由此就可得到 n 的值.

解答： 解： (1) 由折叠可得:

$$DG=HG, GH=CH,$$

$$\therefore DG=GH=CH.$$

设 $HC=x$, 则 $DG=GH=x$.

$$\because \angle DGH=90^\circ, \therefore DH=\sqrt{2}x,$$

$$\therefore DC=DH+CH=\sqrt{2}x+x=1,$$

解得 $x=\sqrt{2}-1$.

$$\therefore \tan \angle HBC = \frac{HC}{BC} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1.$$

故答案为: GH 、 DG , $\sqrt{2}-1$;

$$(2) \because BC=1, EC=BF=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore BE=\sqrt{EC^2+BC^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

由折叠可得 $BP=BC=1$, $\angle FNM=\angle BNM=90^\circ$, $\angle EMN=\angle CMN=90^\circ$.

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是矩形,

$$\therefore \angle F=\angle FEC=\angle C=\angle FBC=90^\circ,$$

∴ 四边形 BCMN 是矩形, $\angle BNM = \angle F = 90^\circ$,

∴ $MN \parallel EF$,

∴ $\frac{BP}{BE} = \frac{BN}{BF}$, 即 $BP \cdot BF = BE \cdot BN$,

∴ $1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2BN$

∴ $BN = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

∴ $BC : BN = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : 1$,

∴ 四边形 BCMN 是 $\sqrt{3}$ 的矩形;

(3) 同理可得:

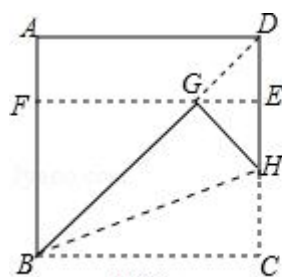
将 $\sqrt{3}$ 矩形沿用 (2) 中的方式操作 1 次后, 得到一个“ $\sqrt{4}$ 矩形”,

将 $\sqrt{4}$ 矩形沿用 (2) 中的方式操作 1 次后, 得到一个“ $\sqrt{5}$ 矩形”,

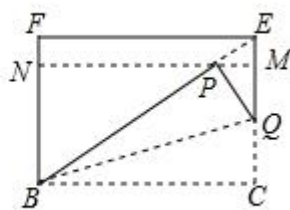
将 $\sqrt{5}$ 矩形沿用 (2) 中的方式操作 1 次后, 得到一个“ $\sqrt{6}$ 矩形”,

所以将图②中的 $\sqrt{3}$ 矩形 BCMN 沿用 (2) 中的方式操作 3 次后, 得到一个“ $\sqrt{6}$ 矩形”,

故答案为 6.



图①



图②

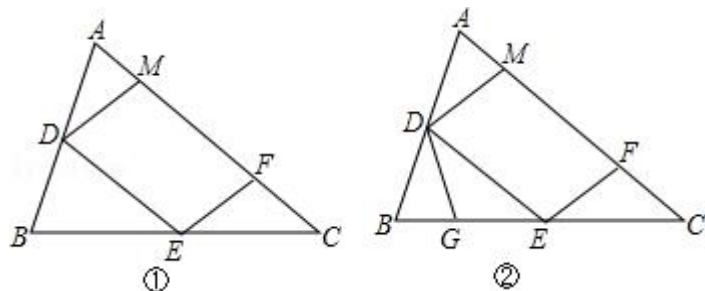
点评: 本题主要考查了轴对称的性质、正方形的性质、矩形的判定与性质、平行线分线段成比例、勾股定理等知识, 考查了阅读理解能力、操作能力、归纳探究能力、推理能力, 运用已有经验解决问题的能力, 是一道好题.

25. (13 分) (2015•福州) 如图①, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, D , E 分别为 AB , BC 中点, F 为 AC 上一点, 且 $\angle AFE = \angle A$, $DM \parallel EF$ 交 AC 于点 M .

(1) 求证: $DM = DA$;

(2) 点 G 在 BE 上, 且 $\angle BDG = \angle C$, 如图②, 求证: $\triangle DEG \sim \triangle ECF$;

(3) 在图②中, 取 CE 上一点 H , 使 $\angle CFH = \angle B$, 若 $BG = 1$, 求 EH 的长.



考点: 相似形综合题.

分析: (1) 证明 $\angle A = \angle DMA$, 用等角对等边即可证明结论;

(2) 由 D 、 E 分别是 AB 、 BC 的中点, 可知 $DE \parallel AC$, 于是 $\angle BDE = \angle A$, $\angle DEG = \angle C$, 又 $\angle A = \angle AFE$, $\angle AFE = \angle C + \angle FEC$, 根据等式性质得 $\angle FEC = \angle GDE$, 根据有两对对应角相等的两三角形相似可证;

(3) 通过证明 $\triangle BDG \sim \triangle BED$ 和 $\triangle EFH \sim \triangle ECF$, 可得 $BG \cdot BE = EH \cdot EC$, 又 $BE = EC$, 所以 $EH = BG = 1$.

解答: (1) 证明: 如图 1 所示,

$\because DM \parallel EF$,

$\therefore \angle AMD = \angle AFE$,

$\because \angle AFE = \angle A$,

$\therefore \angle AMD = \angle A$,

$\therefore DM = DA$;

(2) 证明: 如图 2 所示,

$\because D$ 、 E 分别是 AB 、 BC 的中点,

$$\therefore DE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle A, \quad \angle DEG = \angle C,$$

$$\because \angle AFE = \angle A,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle AFE,$$

$$\therefore \angle BDG + \angle GDE = \angle C + \angle FEC,$$

$$\because \angle BDG = \angle C,$$

$$\therefore \angle DGE = \angle FEC,$$

$$\therefore \triangle DEG \sim \triangle ECF;$$

(3) 解: 如图 3 所示,

$$\because \angle BDG = \angle C = \angle DEB, \quad \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BDG \sim \triangle BED,$$

$$\therefore \frac{BD}{BE} = \frac{BG}{BD},$$

$$\therefore BD^2 = BG \cdot BE,$$

$$\because \angle AFE = \angle A, \quad \angle CFH = \angle B,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - \angle AFE - \angle CFH = \angle EFH,$$

$$\text{又} \because \angle FEH = \angle CEF,$$

$$\therefore \triangle EFH \sim \triangle ECF,$$

$$\therefore \frac{EH}{EF} = \frac{EF}{EC},$$

$$\therefore EF^2 = EH \cdot EC,$$

$$\because DE \parallel AC, \quad DM \parallel EF,$$

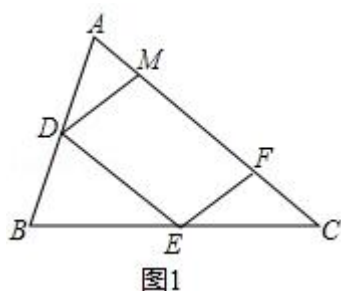
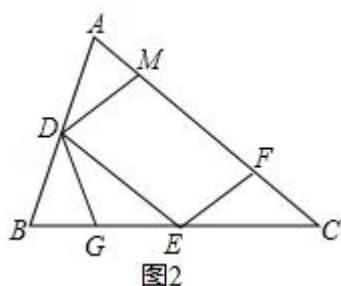
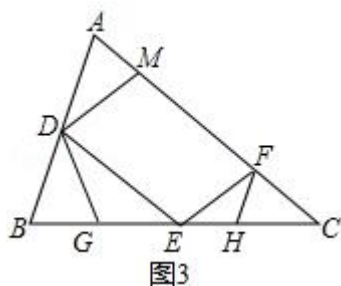
$\therefore$ 四边形 DEFM 是平行四边形,

$$\therefore EF = DM = DA = BD,$$

$$\therefore BG \cdot BE = EH \cdot EC,$$

$$\because BE = EC,$$

$$\therefore EH = BG = 1.$$



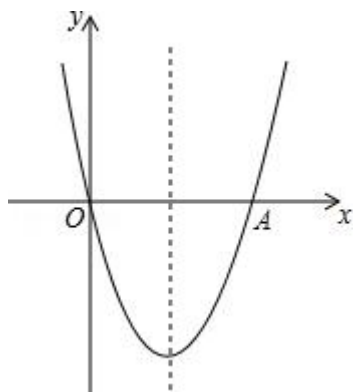
点评： 本题主要考查了等腰三角形的性质与判定，三角形中位线的性质，平行线的性质，平行四边形的判定与性质以及三角形相似的判定与性质，第三小题是难点，运用两对三角形相似得到比例中项问题，发现等线段是解决问题的关键.

26. (13 分) (2015•福州) 如图，抛物线 $y = x^2 - 4x$ 与 x 轴交于 O ， A 两点， P 为抛物线上一点，过点 P 的直线 $y = x + m$ 与对称轴交于点 Q .

(1) 这条抛物线的对称轴是 2，直线 PQ 与 x 轴所夹锐角的度数是 45° ；

(2) 若两个三角形面积满足 $S_{\triangle POQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle PAQ}$ ，求 m 的值；

(3) 当点 P 在 x 轴下方的抛物线上时，过点 $C(2, 2)$ 的直线 AC 与直线 PQ 交于点 D ，求：① $PD + DQ$ 的最大值；② $PD \cdot DQ$ 的最大值.



考点： 二次函数综合题.

分析： (1) 把抛物线的解析式化成顶点式即可求得对称轴；求得直线与坐标轴的交点坐标，即可证得直线和坐标轴围成的图形是等腰直角三角形，从而求得直线 PQ 与 x 轴所夹锐角的度数；

(2) 分三种情况分别讨论根据已知条件，通过 $\triangle OBE \sim \triangle ABF$ 对应边成比例即可求得；

(3) ①过点 C 作 $CH \parallel x$ 轴交直线 PQ 于点 H，可得 $\triangle CHQ$ 是等腰三角形，进而得出 $AD \perp PH$ ，得出 $DQ=DH$ ，从而得出 $PD+DQ=PH$ ，过 P 点作 $PM \perp CH$ 于点 M，则 $\triangle PMH$ 是等腰直角三角形，得出 $PH=\sqrt{2}PM$ ，因为当 PM 最大时，PH 最大，通过求得 PM 的最大值，从而求得 PH 的最大值；由①可知： $PD+PH \leq 6\sqrt{2}$ ，设 $PD=a$ ，则 $DQ \leq 6\sqrt{2}-a$ ，得出 $PD \cdot DQ \leq a(6\sqrt{2}-a) = -a^2+6\sqrt{2}a = -(a-3\sqrt{2})^2+18$ ，当点 P 在抛物线的顶点时， $a=3\sqrt{2}$ ，得出 $PD \cdot DQ \leq 18$.

解答： 解： (1) $\because y=x^2-4x=(x-2)^2-4$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴是 $x=2$,

$\because$ 直线 $y=x+m$,

$\therefore$ 直线与坐标轴的交点坐标为 $(-m, 0)$, $(0, m)$,

$\therefore$ 交点到原点的距离相等,

$\therefore$ 直线与坐标轴围成的三角形是等腰直角三角形,

∴直线 PQ 与 x 轴所夹锐角的度数是 45° ,

故答案为 $x=2$ 、 45° .

(2) 设直线 PQ 交 x 轴于点 B, 分别过 O 点, A 点作 PQ 的垂线, 垂足分别是 E、F, 显然当点 B 在 OA 的延长线时, $S_{\triangle POQ} = \frac{1}{3}S_{\triangle PAQ}$ 不成立;

①当点 B 落在线段 OA 上时, 如图①,

$$\frac{S_{\triangle POQ}}{S_{\triangle PAQ}} = \frac{OE}{AF} = \frac{1}{3},$$

由 $\triangle OBE \sim \triangle ABF$ 得, $\frac{OB}{AB} = \frac{OE}{AF} = \frac{1}{3},$

$$\therefore AB = 3OB,$$

$$\therefore OB = \frac{1}{4}OA,$$

由 $y = x^2 - 4x$ 得点 A (4, 0),

$$\therefore OB = 1,$$

$$\therefore B (1, 0),$$

$$\therefore 1 + m = 0,$$

$$\therefore m = -1;$$

②当点 B 落在线段 AO 的延长线上时, 如图②, 同理可得 $OB = \frac{1}{2}OA = 2,$

$$\therefore B (-2, 0),$$

$$\therefore -2 + m = 0,$$

$$\therefore m = 2,$$

综上, 当 $m = -1$ 或 2 时, $S_{\triangle POQ} = \frac{1}{3}S_{\triangle PAQ};$

(3) ①过点 C 作 $CH \parallel x$ 轴交直线 PQ 于点 H, 如图③, 可得 $\triangle CHQ$ 是等腰三角形,

$$\therefore \angle CDQ = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \perp PH,$$

$$\therefore DQ=DH,$$

$$\therefore PD+DQ=PH,$$

过 P 点作 $PM \perp CH$ 于点 M, 则 $\triangle PMH$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore PH=\sqrt{2}PM,$$

$\therefore$ 当 PM 最大时, PH 最大,

$\therefore$ 当点 P 在抛物线顶点出时, PM 最大, 此时 $PM=6$,

$$\therefore PH \text{ 的最大值为 } 6\sqrt{2},$$

即 $PD+DQ$ 的最大值为 $6\sqrt{2}$.

②由①可知: $PD+PH \leq 6\sqrt{2}$,

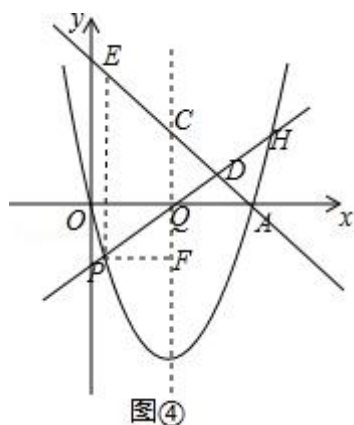
设 $PD=a$, 则 $DQ \leq 6\sqrt{2} - a$,

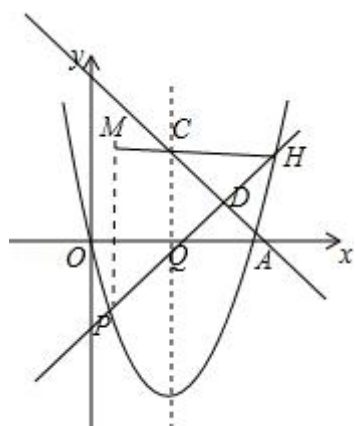
$$\therefore PD \cdot DQ \leq a(6\sqrt{2} - a) = -a^2 + 6\sqrt{2}a = -(a - 3\sqrt{2})^2 + 18,$$

$\therefore$ 当点 P 在抛物线的顶点时, $a=3\sqrt{2}$,

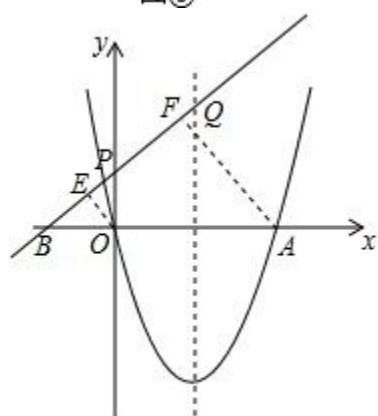
$$\therefore PD \cdot DQ \leq 18.$$

$\therefore PD \cdot DQ$ 的最大值为 18.

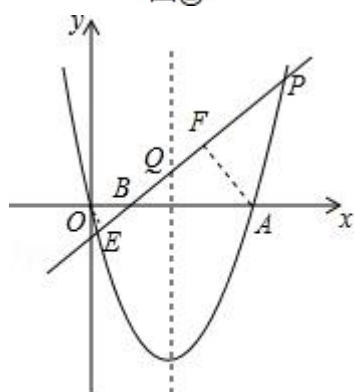




图③



图②



图①

点评： 本题是二次函数的综合题，考查了抛物线的性质，直线的性质，三角形相似的判定和性质，难度较大.