

2014 年福建省龙岩市中考数学试卷

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分）

1. (4 分) (2014•龙岩) 计算: $-2+3=$ ()

- A. 1 B. -1 C. 5 D. -5

2. (4 分) (2014•龙岩) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^3+a^3=a^6$ B. $a^6 \div a^2=a^4$ C. $a^3 \cdot a^5=a^{15}$ D. $(a^3)^4=a^7$

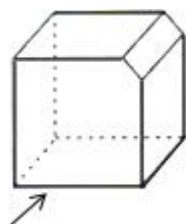
3. (4 分) (2014•龙岩) 下列图形中既是对称轴又是中心对称的是 ()

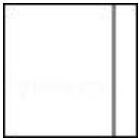
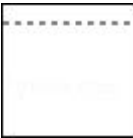
- A.  B.  C.  D. 

4. (4 分) (2014•龙岩) 不等式组 $\begin{cases} 2x-3 \leq 1 \\ 3x+2 > 0 \end{cases}$ 的解集是 ()

- A. $\frac{2}{3} < x \leq 2$ B. $-\frac{2}{3} < x \leq 2$ C. $-\frac{2}{3} < x \leq 2$ D. $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$

5. (4 分) (2014•龙岩) 如图所示几何体的俯视图是 ()

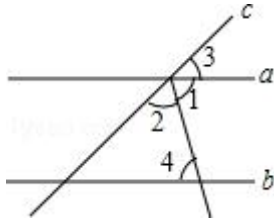


- A.  B.  C.  D. 

6. (4 分) (2014•龙岩) 下列叙述正确的是 ()

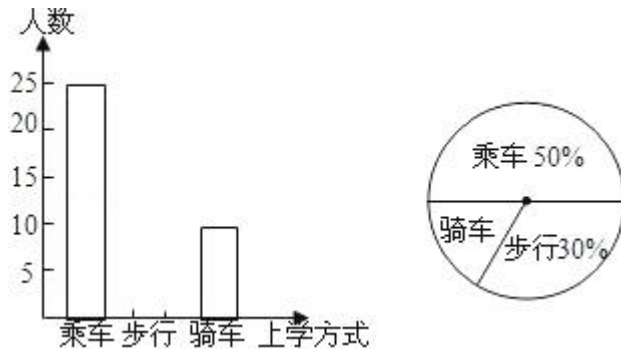
- A. “打开电视机, 中央一套正在直播巴西世界杯足球赛.”是必然事件
B. 若甲乙两人六次跳远成绩的方差为 $S_{甲}^2=0.1$, $S_{乙}^2=0.3$, 则甲的成绩更稳定
C. 从一副扑克牌中随即抽取一张一定是红桃 K
D. 任意一组数据的平均数一定等于它的众数

7. (4 分) (2014•龙岩) 如图, 直线 a , b 被直线 c 所截, $a \parallel b$, $\angle 1 = \angle 2$, 若 $\angle 3 = 40^\circ$, 则 $\angle 4$ 等于 ()



- A. 40° B. 50° C. 70° D. 80°

8. (4分) (2014•龙岩) 如图分别是某班全体学生上学时乘车、步行、骑车人数的分布直方图和扇形统计图 (两图都不完整), 下列结论错误的是 ()



- A. 该班总人数为 50 人 B. 步行人数为 30 人
C. 乘车人数是骑车人数的 2.5 倍 D. 骑车人数占 20%

9. (4分) (2014•龙岩) 某小区为了排污, 需铺设一段全长为 720 米的排污管道, 为减少施工对居民生活的影响, 须缩短施工时间, 实际施工时每天的工作效率比原计划提高 20%, 结果提前 2 天完成任务. 设原计划每天铺设 x 米, 下面所列方程正确的是 ()

- A. $\frac{720}{x} - \frac{720}{(1+20\%)x} = 2$ B. $\frac{720}{(1-20\%)x} - \frac{720}{x} = 2$
C. $\frac{720}{(1+20\%)x} - \frac{720}{x} = 2$ D. $\frac{720}{x+2} - \frac{720}{(1+20\%)x} = 2$

10. (4分) (2014•龙岩) 定义符号 $\min\{a, b\}$ 的含义为: 当 $a \geq b$ 时 $\min\{a, b\} = b$; 当 $a < b$ 时 $\min\{a, b\} = a$. 如: $\min\{1, -3\} = -3$, $\min\{-4, -2\} = -4$. 则 $\min\{-x^2+1, -x\}$ 的最大值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ C. 1 D. 0

二、填空题 (共 7 小题, 每小题 3 分, 满分 21 分)

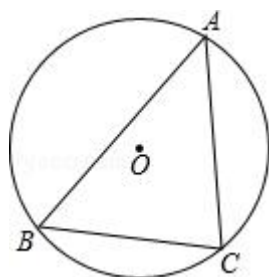
11. (3分) (2014•龙岩) 据统计, 2014 年全国约有 939 万人参加高考, 939 万人用科学记数法表示为_____人.

12. (3分) (2014•龙岩) 因式分解: $x^2 - 4x + 4 =$ _____.

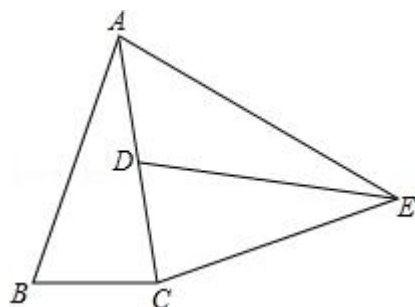
13. (3分) (2014•龙岩) 若圆锥的侧面展开图的弧长为 $24\pi\text{cm}$, 则此圆锥底面的半径为_____ cm .

14. (3分) (2014•龙岩) 若一组数据 3, 4, x , 5, 8 的平均数是 4, 则该组数据的中位数是_____.

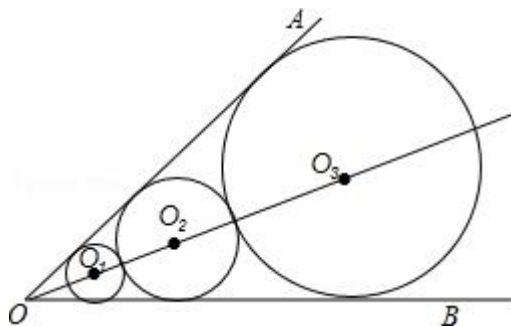
15. (3分) (2014•龙岩) 如图, A、B、C 是半径为 6 的 $\odot O$ 上三个点, 若 $\angle BAC = 45^\circ$, 则弦 $BC =$ _____.



16. (3分) (2014•龙岩) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 70^\circ$, 则 $\angle BAC = 30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得 $\triangle EDC$. 当点 B 的对应点 D 恰好落在 AC 上时, $\angle CAE =$ _____.



17. (3分) (2014•龙岩) 如图, $\angle AOB = 60^\circ$, $O_1, O_2, O_3, \dots$ 是 $\angle AOB$ 平分线上的点, 其中 $OO_1 = 2$, 若 $O_1, O_2, O_3, \dots$ 分别以为圆心作圆, 使得 $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3, \dots$ 均与 $\angle AOB$ 的两边相切, 且相邻两圆相外切, 则 $\odot O_{2014}$ 的面积是_____ (结果保留 π)



三、解答题（共 8 小题，满分 89 分）

18. (10 分) (2014•龙岩) (1) 计算: $(\pi - 2014)^0 - 2\sin 45^\circ + |\sqrt{2} - 2| + \sqrt{8}$

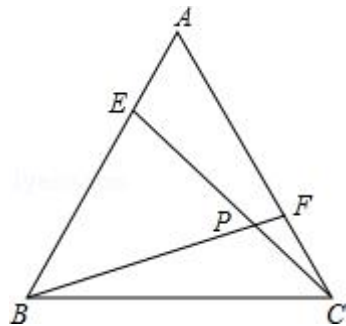
(2) 解方程: $\frac{2x}{x-2} + 1 = \frac{3}{2-x}$.

19. (8 分) (2014•龙岩) 先化简, 再求值: $(\frac{2a}{a^2-4} + \frac{1}{a-2}) \cdot \frac{a-2}{3a+2}$, 其中 $a = \sqrt{2} - 2$.

20. (10 分) (2014•龙岩) 如图, E, F 分别是等边三角形 ABC 的边 AB, AC 上的点, 且 $BE = AF$, CE、BF 交于点 P

(1) 求证: $CE = BF$;

(2) 求 $\angle BPC$ 的度数.



21. (10 分) (2014•龙岩) 某校九年级有 10 个班, 每班 50 名学生, 为调查该校九年级学生一学期课外书籍的阅读情况, 准备抽取 50 名学生作为一个样本惊醒分析, 并规定如下: 设一个学生一学期阅读课外书籍本书为 n , 当 $0 \leq n < 5$ 时为一般读者; 当 $5 \leq n < 10$ 时为良好读者; 当 $n \geq 10$ 时为优秀读者.

(1) 下列四种抽取方法最具有代表性的是_____;

- A. 随机抽取一个班的学生 B. 随机抽取 50 名学生
C. 随机抽取 50 名男生 D. 随机抽取 50 名女生

(2) 由上述最具代表性的抽取方法抽取 50 名学生一学期阅读本数的数据如下:

8	10	6	9	7	16	8	11	0	13	10	5	8
2	6	9	7	5	7	6	4	12	10	11	6	8
14	15	7	12	13	8	9	7	10	12	11	8	13
10	4	6	8	13	6	5	7	11	12	9		

根据以上数据回答下列问题

- ①求样本中优秀读者的频率;
②估计该校九年级优秀读者的人数;
③在样本为一般读者的学生中随机抽取 2 人, 用树形图或列表法求抽得 2 人的课外书籍阅读本数都为 4 的概率.

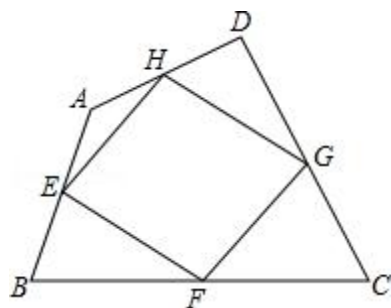
22. (12 分) (2014•龙岩) 如图, 我们把依次连接任意四边形 ABCD 各边中点所得四边形 EFGH 叫中点四边形.

(1) 若四边形 ABCD 是菱形, 则它的中点四边形 EFGH 一定是_____;

- A. 菱形 B. 矩形 C. 正方形 D. 梯形

(2) 若四边形 ABCD 的面积为 S_1 , 中点四边形 EFGH 的面积记为 S_2 , 则 S_1 与 S_2 的数量关系是 $S_1 = \underline{\hspace{2cm}} S_2$

(3) 在四边形 $ABCD$ 中, 沿中点四边形 $EFGH$ 的其中三边剪开, 可得三个小三角形, 将这三个小三角形与原图中未剪开的小三角形拼接成一个平行四边形, 请在答题卡的图形上画出一种拼接示意图, 并写出对应全等的三角形.

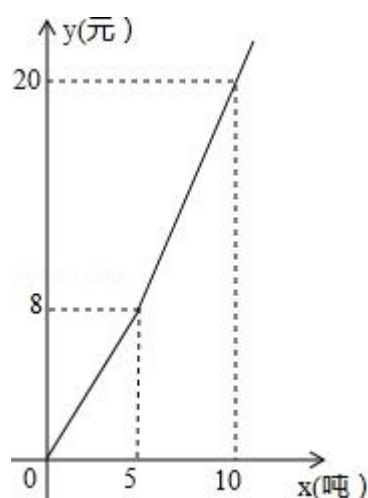


23. (12 分) (2014•龙岩) 随着地球上的水资源日益枯竭, 各级政府越来越重视倡导节约用水. 某市民生活用水按“阶梯水价”方式进行收费, 人均月生活用水收费标准如图所示, 图中 x 表示人均月生活用水的吨数, y 表示收取的人均月生活用水费 (元). 请根据图象信息, 回答下列问题:

(1) 该市人均月生活用水的收费标准是: 不超过 5 吨, 每吨按_____元收取; 超过 5 吨的部分, 每吨按_____元收取;

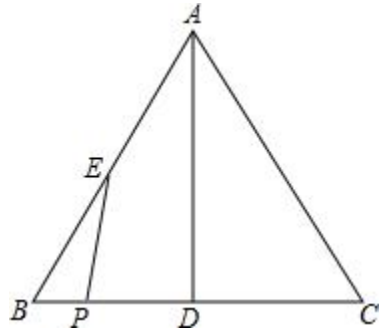
(2) 请写出 y 与 x 的函数关系式;

(3) 若某个家庭有 5 人, 五月份的生活用水费共 76 元, 则该家庭这个月人均用了多少吨生活用水?



24. (13 分) (2014•龙岩) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=10$, $BC=12$, D , E 分别是边 BC , AB 的中点, P 是 BC 边上的动点 (不与 B , C 重合). 设 $BP=x$.

- (1) 当 $x=6$ 时, 求 PE 的长;
- (2) 当 $\triangle BPE$ 是等腰三角形时, 求 x 的值;
- (3) 当 AD 平分 EP 时, 试判断以 EP 为直径的圆与直线 AC 的位置关系, 并说明理由.

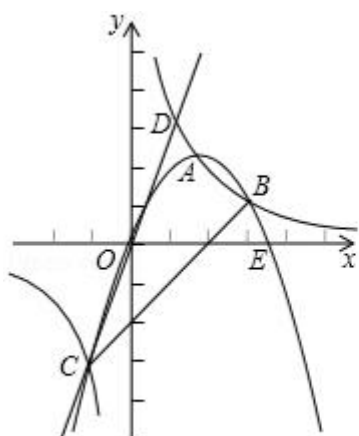


25. (14 分) (2014•龙岩) 如图①, 双曲线 $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq 0$) 和抛物线 $y=ax^2+bx$ ($a\neq 0$) 交于 A、B、C 三点, 其中 B (3, 1), C (-1, -3), 直线 CO 交双曲线于另一点 D, 抛物线与 x 轴交于另一点 E.

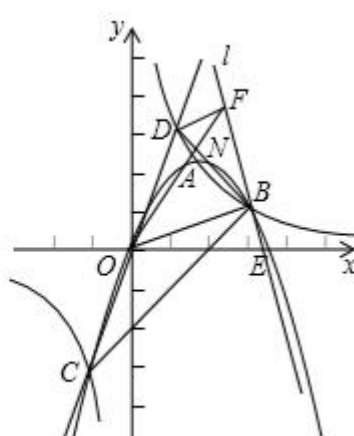
(1) 求双曲线和抛物线的解析式;

(2) 抛物线在第一象限部分是否存在点 P, 使得 $\angle POE + \angle BCD = 90^\circ$? 若存在, 请求出满足条件的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 如图②过 B 作直线 $l \perp OB$, 过点 D 作 $DF \perp l$ 于点 F, BD 与 OF 交于点 N, 求 $\frac{DN}{NB}$ 的值.



图①



图②

2014 年福建省龙岩市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分）

1. (4 分) (2014•龙岩) 计算： $-2+3=$ ()

- A. 1 B. -1 C. 5 D. -5

考点：有理数的加法.

分析：根据异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，再用较大的绝对值减去较小的绝对值，可得答案.

解答：解： $-2+3=+(3-2)=1$.

故选：A.

点评：本题考查了有理数的加法，先确定和的符号，再进行绝对值得运算.

2. (4 分) (2014•龙岩) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^3+a^3=a^6$ B. $a^6\div a^2=a^4$ C. $a^3\cdot a^5=a^{15}$ D. $(a^3)^4=a^7$

考点：同底数幂的除法；合并同类项；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方.

分析：根据合并同类项的法则，同底数幂的乘法与除法以及幂的乘方的知识求解即可求得答案.

解答：解：A、 $a^3+a^3=2a^3$ ，故 A 选项错误；

B、 $a^6\div a^2=a^4$ ，故 B 选项正确；

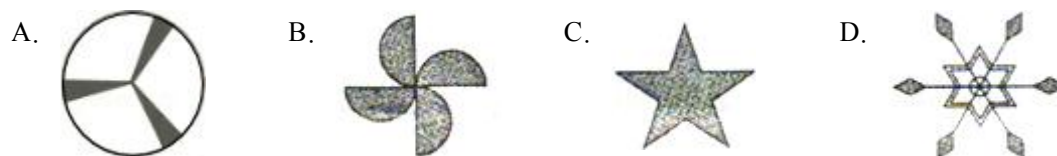
C、 $a^3\cdot a^5=a^8$ ，故 C 选项错误；

D、 $(a^3)^4=a^{12}$ ，故 D 选项错误.

故选：B.

点评：此题考查了合并同类项的法则，同底数幂的乘法与除法以及幂的乘方等知识，解题要注意细心.

3. (4 分) (2014•龙岩) 下列图形中既是对称轴又是中心对称的是 ()



考点：中心对称图形；轴对称图形.

分析：根据轴对称图形与中心对称图形的概念对各选项分析判断利用排除法求解.

解答：解：A、是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项错误；

B、不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项错误；

C、是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项错误；

D、既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项正确.

故选 D.

点评：本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后两部分重合.

4. (4 分) (2014•龙岩) 不等式组 $\begin{cases} 2x-3 \leq 1 \\ 3x+2 > 0 \end{cases}$ 的解集是 ()

A. $\frac{2}{3} < x \leq 2$

B. $-\frac{2}{3} < x \leq 2$

C. $-\frac{2}{3} < x \leq 2$

D. $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$

考点：解一元一次不等式组.

分析：先求出不等式组中每一个不等式的解集，再求出它们的公共部分就是不等式组的解集.

解答：解： $\begin{cases} 2x-3 \leq 1 \cdots \text{①} \\ 3x+2 > 0 \cdots \text{②} \end{cases}$,

解①得： $x \leq 2$,

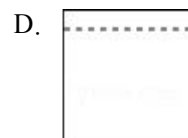
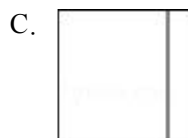
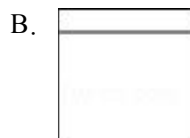
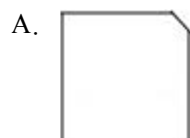
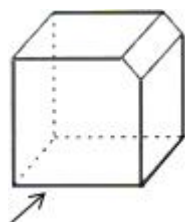
解②得： $x > -\frac{2}{3}$,

则不等式组的解集是： $-\frac{2}{3} < x \leq 2$.

故选 C.

点评：本题考查的是一元一次不等式组的解，解此类题目常常要结合数轴来判断. 还可以观察不等式的解，若 $x >$ 较小的数、 $<$ 较大的数，那么解集为 x 介于两数之间.

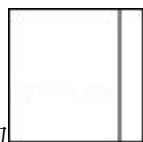
5. (4分) (2014•龙岩) 如图所示几何体的俯视图是 ()



考点: 简单组合体的三视图.

分析: 根据俯视图的定义, 找出从上往下看到的图形.

解答:



解: 从上往下看, 俯视图为

故选 C.

点评: 本题考查了三视图的知识, 俯视图是从物体上面看所得到的图形.

6. (4分) (2014•龙岩) 下列叙述正确的是 ()

- A. “打开电视机, 中央一套正在直播巴西世界杯足球赛.”是必然事件
- B. 若甲乙两人六次跳远成绩的方差为 $S_{甲}^2=0.1$, $S_{乙}^2=0.3$, 则甲的成绩更稳定
- C. 从一副扑克牌中随即抽取一张一定是红桃 K
- D. 任意一组数据的平均数一定等于它的众数

考点: 随机事件; 算术平均数; 众数; 方差.

分析: 根据随机事件以及众数和算术平均数的求法分别分析得出即可.

解答: 解: A、“打开电视机, 中央一套正在直播巴西世界杯足球赛.”是随机事件, 故此选项错误;

B、若甲乙两人六次跳远成绩的方差为 $S_{甲}^2=0.1$, $S_{乙}^2=0.3$, 则甲的成绩更稳定, 利用方差的意义, 故此选项正确;

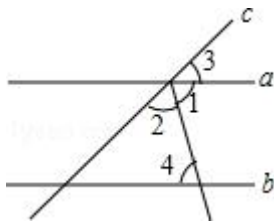
C、从一副扑克牌中随即抽取一张不一定是红桃 K，故此选项错误；

D、任意一组数据的平均数不一定等于它的众数，故此选项错误.

故选：B.

点评：此题主要考查了随机事件以及众数和和算术平均数的求法等知识，正确把握相关概念是解题关键.

7. (4 分) (2014•龙岩) 如图，直线 a , b 被直线 c 所截， $a \parallel b$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，若 $\angle 3 = 40^\circ$ ，则 $\angle 4$ 等于 ()



A. 40°

B. 50°

C. 70°

D. 80°

考点：平行线的性质.

分析：根据平角的定义求出 $\angle 1$ ，再根据两直线平行，内错角相等解答.

解答：解： $\because \angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle 3) = \frac{1}{2} (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ,$$

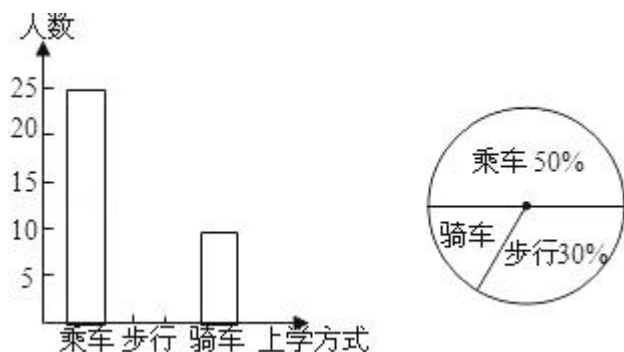
$$\because a \parallel b,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 1 = 70^\circ.$$

故选 C.

点评：本题考查了平行线的性质，平角等于 180° ，熟记性质并求出 $\angle 1$ 是解题的关键.

8. (4 分) (2014•龙岩) 如图分别是某班全体学生上学时乘车、步行、骑车人数的分布直方图和扇形统计图 (两图都不完整)，下列结论错误的是 ()



- A. 该班总人数为 50 人
B. 步行人数为 30 人
C. 乘车人数是骑车人数的 2.5 倍
D. 骑车人数占 20%

考点: 频数（率）分布直方图；扇形统计图.

分析: 根据乘车人数是 25 人，而乘车人数所占的比例是 50%，即可求得总人数，然后根据百分比的含义即可求得步行的人数，以及骑车人数所占的比例.

解答: 解：总人数是： $25 \div 50\% = 50$ （人），故 A 正确；

步行的人数是： $50 \times 30\% = 15$ （人），故 B 错误；

骑车人数所占的比例是： $1 - 50\% - 30\% = 20\%$ ，故 D 正确；

乘车人数是骑车人数倍数是： $50\% \div 20\% = 2.5$ ，故 C 正确.

故选 B.

点评: 本题考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力；利用统计图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能作出正确的判断和解决问题.

9. (4 分) (2014•龙岩) 某小区为了排污，需铺设一段全长为 720 米的排污管道，为减少施工对居民生活的影响，须缩短施工时间，实际施工时每天的工作效率比原计划提高 20%，结果提前 2 天完成任务. 设原计划每天铺设 x 米，下面所列方程正确的是 ()

- A. $\frac{720}{x} - \frac{720}{(1+20\%)x} = 2$
B. $\frac{720}{(1-20\%)x} - \frac{720}{x} = 2$
C. $\frac{720}{(1+20\%)x} - \frac{720}{x} = 2$
D. $\frac{720}{x+2} - \frac{720}{(1+20\%)x} = 2$

考点: 由实际问题抽象出分式方程.

分析: 设原计划每天铺设 x 米，则实际施工时每天铺设 $(1+20\%)x$ 米，根据实际施工比原计划提前 2 天完成，列出方程即可.

解答: 解: 设原计划每天铺设 x 米, 则实际施工时每天铺设 $(1+20\%)x$ 米,

$$\text{由题意得, } \frac{720}{x} - \frac{720}{(1+20\%)x} = 2.$$

故选 A.

点评: 本题考查了由实际问题抽象出分式方程, 关键是读懂题意, 设出未知数, 找出合适的等量关系, 列出方程.

10. (4分) (2014•龙岩) 定义符号 $\min\{a, b\}$ 的含义为: 当 $a \geq b$ 时 $\min\{a, b\} = b$; 当 $a < b$ 时 $\min\{a, b\} = a$. 如: $\min\{1, -3\} = -3$, $\min\{-4, -2\} = -4$. 则 $\min\{-x^2+1, -x\}$ 的最大值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ C. 1 D. 0

考点: 二次函数的最值; 正比例函数的性质.

专题: 新定义.

分析: 由定义先求出其解析式, 再利用单调性即可求出其最大值.

解答: 解: 由 $-x^2+1 \leq -x$,

$$\text{解得 } x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

$$\text{故函数 } \min\{-x^2+1, -x\} = \begin{cases} -x^2+1 & (x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}) \\ -x & (\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\sqrt{5}+1}{2}) \end{cases},$$

由上面解析式可知:

① $x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $x \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 时, 函数 $\min\{-x^2+1, -x\} = -x^2+1$, 其最大值为 1;

② 当 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 时, 函数 $\min\{-x^2+1, -x\} = -x$, 其最大值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

综上所述: 函数 $\min\{-x^2+1, -x\}$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故选 B.

点评: 本题考查了二次函数的最值, 充分理解定义 $\min\{a, b\}$ 和掌握函数的单调性是解题的关键.

二、填空题 (共 7 小题, 每小题 3 分, 满分 21 分)

11. (3 分) (2014•龙岩) 据统计, 2014 年全国约有 939 万人参加高考, 939 万人用科学记数法表示为 9.39×10^6 人.

考点: 科学记数法—表示较大的数.

分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值是易错点, 由于 939 万有 7 位, 所以可以确定 $n = 7 - 1 = 6$.

解答: 解: 939 万 $= 9\,390\,000 = 9.39 \times 10^6$.

故答案为: 9.39×10^6 .

点评: 此题考查科学记数法表示较大的数的方法, 准确确定 a 与 n 值是关键.

12. (3 分) (2014•龙岩) 因式分解: $x^2 - 4x + 4 = \underline{(x - 2)^2}$.

考点: 因式分解-运用公式法.

分析: 直接运用完全平方公式分解因式即可. 完全平方公式: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

解答: 解: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

点评: 本题主要考查利用完全平方公式分解因式, 熟记公式结构是解题的关键.

13. (3 分) (2014•龙岩) 若圆锥的侧面展开图的弧长为 $24\pi\text{cm}$, 则此圆锥底面的半径为 12 cm.

考点: 圆锥的计算.

分析: 利用扇形的弧长等于圆锥的底面周长列出等式求得圆锥的底面半径即可.

解答: 解: 设圆锥的底面半径为 r ,

$\therefore$ 圆锥的侧面展开图的弧长为 $24\pi\text{cm}$,

$\therefore 2\pi r = 24\pi$,

解得: $r = 12$,

故答案为: 12.

点评: 本题考查了圆锥的计算, 解题的关键是牢记扇形的弧长等于圆锥的底面周长.

14. (3 分) (2014•龙岩) 若一组数据 3, 4, x, 5, 8 的平均数是 4, 则该组数据的中位数是 4.

考点: 中位数; 算术平均数.

分析: 首先根据平均数为 4, 求出 x 的值, 然后根据中位数的概念求解.

解答: 解: 根据题意可得, $\frac{3+4+x+5+8}{5}=4$,

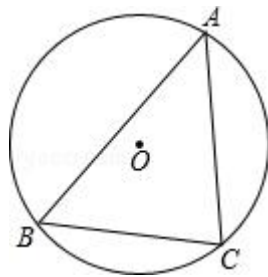
解得: $x=0$,

这组数据按照从小到大的顺序排列为: 0, 3, 4, 5, 8,

则中位数为: 4.

点评: 本题考查了中位数的知识, 将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数; 如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

15. (3 分) (2014•龙岩) 如图, A、B、C 是半径为 6 的 $\odot O$ 上三个点, 若 $\angle BAC=45^\circ$, 则弦 $BC=$ $6\sqrt{2}$.



考点: 圆周角定理; 等腰直角三角形.

分析: 首先连接 OB, OC, 易得 $\triangle BOC$ 是等腰直角三角形, 继而求得答案.

解答: 解: 连接 OB, OC,

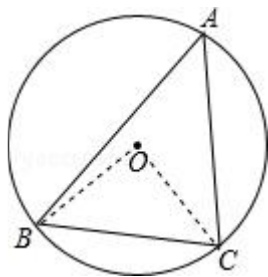
$$\because \angle BAC=45^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC=2\angle BAC=90^\circ,$$

$$\because OB=OC=6,$$

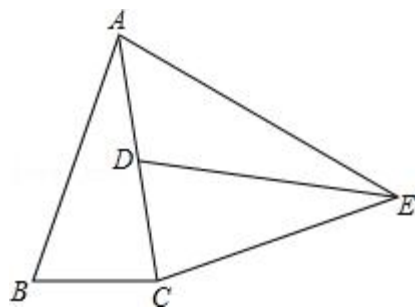
$$\therefore BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=6\sqrt{2}.$$

=故答案为: $6\sqrt{2}$.



点评: 此题考查了圆周角定理以及等腰直角三角形性质. 此题难度不大, 注意掌握辅助线的作法, 注意掌握数形结合思想的应用.

16. (3 分) (2014•龙岩) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle B=70^\circ$, 则 $\angle BAC=30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得 $\triangle EDC$. 当点 B 的对应点 D 恰好落在 AC 上时, $\angle CAE=$ 50° .



考点: 旋转的性质.

分析: 利用旋转的性质得出 $AC=CE$, 以及利用三角形内角和得出 $\angle BCA$ 的度数, 利用等腰三角形的性质得出答案.

解答: 解: $\because \triangle ABC$ 中, $\angle B=70^\circ$, 则 $\angle BAC=30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得 $\triangle EDC$, 点 B 的对应点 D 恰好落在 AC 上,

$$\therefore \angle BCA = 180^\circ - 70^\circ - 30^\circ = 80^\circ, \quad AC = CE,$$

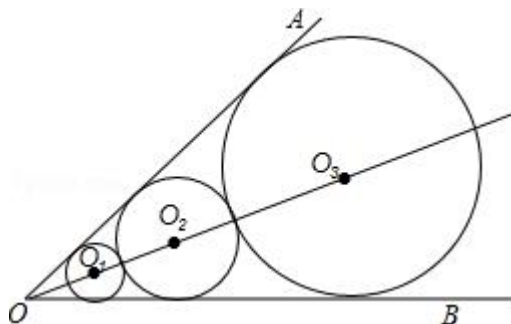
$$\therefore \angle BCA = \angle DCE = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle AEC = 100^\circ \times \frac{1}{2} = 50^\circ.$$

故答案为: 50° .

点评: 此题主要考查了旋转的性质以及等腰三角形的性质, 得出 $\angle CAE = \angle AEC$ 是解题关键.

17. (3 分) (2014•龙岩) 如图, $\angle AOB=60^\circ$, $O_1, O_2, O_3\ldots$ 是 $\angle AOB$ 平分线上的点, 其中 $OO_1=2$, 若 $O_1, O_2, O_3\ldots$ 分别以为圆心作圆, 使得 $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3\ldots$ 均与 $\angle AOB$ 的两边相切, 且相邻两圆相外切, 则 $\odot O_{2014}$ 的面积是 $3^{4026}\pi$ (结果保留 π)



考点: 相切两圆的性质.

专题: 规律型.

分析: 根据相切两圆的性质得出, $\angle O_1OC=30^\circ$, 得出 $CO_1=1$, 进而求出 $\odot O_{2014}$ 的半径, 即可得出答案.

解答: 解: 设 $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3\ldots$ 与 OB 的切点分别为 C, D, E ,

连接 CO_1, DO_2, EO_3 ,

$\therefore CO_1 \perp BO, DO_2 \perp BO, EO_3 \perp BO$,

$\because \angle AOB=60^\circ, O_1, O_2, O_3\ldots$ 是 $\angle AOB$ 平分线上的点, 其中 $OO_1=2$,

$\therefore \angle O_1OC=30^\circ$,

$\therefore CO_1=1$,

$\therefore DO_2 = \frac{1}{2} (2+1+DO_2)$,

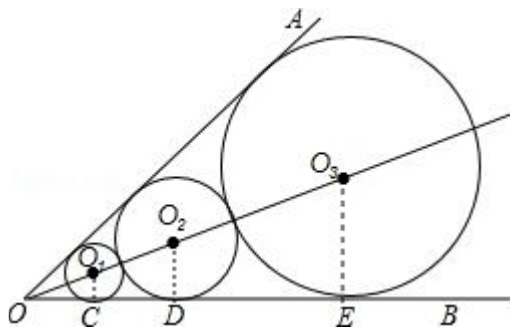
$\therefore DO_2=3$,

同理可得出: $EO_3=9$,

$\therefore \odot O_{2014}$ 的半径为: 3^{2013} ,

$\therefore \odot O_{2014}$ 的面积是 $\pi \times (3^{2013})^2 = 3^{4026}\pi$.

故答案为: $3^{4026}\pi$.



点评: 此题主要考查了相切两圆的性质以及数字变化规律, 得出 $\odot O_{2014}$ 的半径长是解题关键.

三、解答题 (共 8 小题, 满分 89 分)

18. (10 分) (2014•龙岩) (1) 计算: $(\pi - 2014)^0 - 2\sin 45^\circ + |\sqrt{2} - 2| + \sqrt{8}$

(2) 解方程: $\frac{2x}{x-2} + 1 = \frac{3}{2-x}$.

考点: 实数的运算; 零指数幂; 解分式方程; 特殊角的三角函数值.

分析: (1) 本题涉及零指数幂、特殊角的三角函数值、二次根式化简四个考点. 针对每个考点分别进行计算, 然后根据实数的运算法则求得计算结果;

(2) 根据解分式方程的一般步骤, 可得答案.

解答: 解: (1) 原式 $= 1 - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2}$
 $= 3$;

(2) 方程两边都乘以 $(x-2)$ 得

$$2x + (x-2) = -3,$$

$$\text{解得 } x = -\frac{1}{3},$$

经检验 $x = -\frac{1}{3}$ 是原分式方程的解.

点评: 本题考查实数的综合运算能力, 是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟记特殊角的三角函数值, 熟练掌握负整数指数幂、零指数幂、二次根式、绝对值等考点的运算; 解分式方程要检验.

19. (8 分) (2014•龙岩) 先化简, 再求值: $(\frac{2a}{a^2-4} + \frac{1}{a-2}) \cdot \frac{a-2}{3a+2}$, 其中 $a = \sqrt{2} - 2$.

考点: 分式的化简求值.

专题: 计算题.

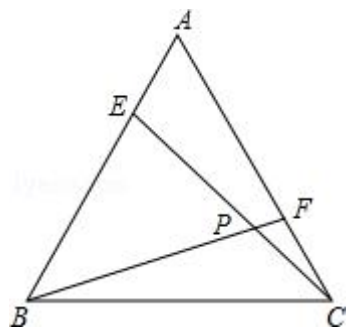
分析: 原式括号中两项通分并利用同分母分式的加法法则计算, 约分得到最简结果, 将 a 的值代入计算即可求出值.

解答: 解: 原式 $= \frac{2a+a+2}{(a+2)(a-2)} \cdot \frac{a-2}{3a+2}$
 $= \frac{3a+2}{(a+2)(a-2)} \cdot \frac{a-2}{3a+2}$
 $= \frac{1}{a+2},$
当 $a = \sqrt{2} - 2$ 时, 原式 $= \frac{\sqrt{2}}{2}.$

点评: 此题考查了分式的化简求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (10 分) (2014•龙岩) 如图, E, F 分别是等边三角形 ABC 的边 AB, AC 上的点, 且 $BE=AF$, CE, BF 交于点 P

- (1) 求证: $CE=BF$;
- (2) 求 $\angle BPC$ 的度数.



考点: 全等三角形的判定与性质; 等边三角形的性质.

分析: (1) 欲证明 $CE=BF$, 只需证得 $\triangle BCE \cong \triangle ABF$;

(2) 利用 (1) 中的全等三角形的性质得到 $\angle BCE = \angle ABF$, 则由图示知 $\angle PBC + \angle PCB = \angle PBC + \angle ABF = \angle ABC = 60^\circ$, 即 $\angle PBC + \angle PCB = 60^\circ$, 所以根据三角形内角和定理求得 $\angle BPC = 120^\circ$.

解答: (1) 证明: 如图, $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,
 $\therefore BC=AB, \angle A = \angle EBC = 60^\circ,$

∴ 在 $\triangle BCE$ 与 $\triangle ABF$ 中,

$$\begin{cases} BC=AB \\ \angle A=\angle EBC, \\ BE=AF \end{cases}$$

∴ $\triangle BCE \cong \triangle ABF$ (SAS),

∴ $CE=BF$;

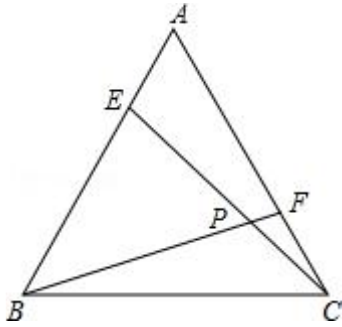
(2) ∵ 由 (1) 知 $\triangle BCE \cong \triangle ABF$,

∴ $\angle BCE = \angle ABF$,

∴ $\angle PBC + \angle PCB = \angle PBC + \angle ABF = \angle ABC = 60^\circ$, 即 $\angle PBC + \angle PCB = 60^\circ$,

∴ $\angle BPC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

即: $\angle BPC = 120^\circ$.



点评: 本题考查了全等三角形的判定与性质、等边三角形的性质. 全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具. 在判定三角形全等时, 关键是选择恰当的判定条件.

21. (10 分) (2014•龙岩) 某校九年级有 10 个班, 每班 50 名学生, 为调查该校九年级学生一学期课外书籍的阅读情况, 准备抽取 50 名学生作为一个样本惊醒分析, 并规定如下: 设一个学生一学期阅读课外书籍本书为 n , 当 $0 \leq n < 5$ 时为一般读者; 当 $5 \leq n < 10$ 时为良好读者; 当 $n \geq 10$ 时为优秀读者.

(1) 下列四种抽取方法最具有代表性的是 B;

- A. 随机抽取一个班的学生 B. 随机抽取 50 名学生
C. 随机抽取 50 名男生 D. 随机抽取 50 名女生

(2) 由上述最具代表性的抽取方法抽取 50 名学生一学期阅读本数的数据如下:

8 10 6 9 7 16 8 11 0 13 10 5 8

2 6 9 7 5 7 6 4 12 10 11 6 8
 14 15 7 12 13 8 9 7 10 12 11 8 13
 10 4 6 8 13 6 5 7 11 12 9

根据以上数据回答下列问题

- ①求样本中优秀读者的频率；
- ②估计该校九年级优秀读者的人数；
- ③在样本为一般读者的学生中随机抽取 2 人，用树形图或列表法求抽得 2 人的课外书籍阅读本数都为 4 的概率.

考点：列表法与树状图法；抽样调查的可靠性；用样本估计总体；频数与频率.

分析：（1）根据抽取方法的代表性可求得答案；

（2）①由样本中优秀读者 20 人，即可求得样本中优秀读者的频率；

②由①可求得该校九年级优秀读者的人数；

③首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与抽得 2 人的课外书籍阅读本数都为 4 的情况，再利用概率公式即可求得答案.

解答：解：（1） $\because$ A、C、D 不具有全面性，

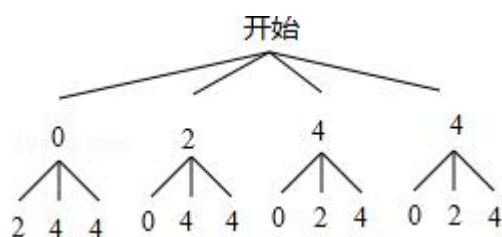
$\therefore$ 选 B；

（2）① $\because$ 样本中优秀读者 20 人，

$\therefore$ 样本中优秀读者的频率为： $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$ ；

②该校九年级优秀读者的人数为： $10 \times 50 \times \frac{2}{5} = 200$ （个）；

③画树状图得：



$\therefore$ 共有 12 种等可能的结果，抽得 2 人的课外书籍阅读本数都为 4 的有 2 种情况，

∴抽得 2 人的课外书籍阅读本数都为 4 的概率为： $\frac{2-1}{12 \times 6}$.

点评： 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

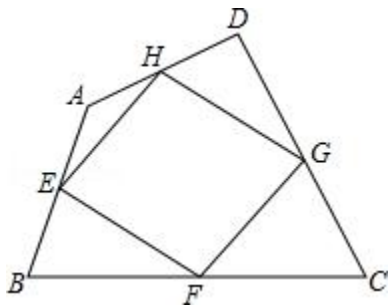
22. (12 分) (2014•龙岩) 如图，我们把依次连接任意四边形 ABCD 各边中点所得四边形 EFGH 叫中点四边形.

(1) 若四边形 ABCD 是菱形，则它的中点四边形 EFGH 一定是 B；

A. 菱形 B. 矩形 C. 正方形 D. 梯形

(2) 若四边形 ABCD 的面积为 S_1 ，中点四边形 EFGH 的面积记为 S_2 ，则 S_1 与 S_2 的数量关系是 $S_1 = \underline{2} S_2$

(3) 在四边形 ABCD 中，沿中点四边形 EFGH 的其中三边剪开，可得三个小三角形，将这三个小三角形与原图中未剪开的小三角形拼接成一个平行四边形，请在答题卡的图形上画出一种拼接示意图，并写出对应全等的三角形.



考点： 中点四边形；作图—应用与设计作图.

分析： (1) 连接 AC、BD. 先根据三角形中位线的性质得出 $EH \parallel BD \parallel FG$, $EF \parallel AC \parallel HG$, $EH = FG = \frac{1}{2}BD$, $EF = HG = \frac{1}{2}AC$, 则四边形 EFGH 为平行四边形，再由菱形的对角线互相垂直，得出 $EF \perp FG$ ，从而证明 $\square EFGH$ 是矩形；

(2) 由 E 为 AB 中点，且 EF 平行于 AC，EH 平行于 BD，得到 $\triangle BEK$ 与 $\triangle ABM$ 相似， $\triangle AEN$ 与 $\triangle ABM$ 相似，利用面积之比等于相似比的平方，得到 $\triangle EBK$ 面积与 $\triangle ABM$ 面积之比为 1: 4，且 $\triangle AEN$ 与 $\triangle EBK$ 面积相等，进而确定出四边形 EKMN 面积为 $\triangle ABM$ 的一半，同理得到四边形 MKFP 面积为 $\triangle MBC$ 面积的一半，四边形 QMPG

面积为 $\triangle DMC$ 面积的一半，四边形 $MNHQ$ 面积为 $\triangle ADM$ 面积的一半，四个四边形面积之和即为四个三角形面积之和的一半，即为四边形 $ABCD$ 面积的一半；

(3) 利用中点四边形的性质得出拼接方法，进而得出全等三角形.

解答: 解: (1) 如图 1, 连接 AC 、 BD .

$\because E$ 、 F 、 G 、 H 分别是菱形 $ABCD$ 各边的中点,

$$\therefore EH \parallel BD \parallel FG, EF \parallel AC \parallel HG, EH = FG = \frac{1}{2}BD, EF = HG = \frac{1}{2}AC,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\therefore EF \perp FG,$$

$\therefore \square EFGH$ 是矩形;

故选: B.

(2) 如图 2, 设 AC 与 EH 、 FG 分别交于点 N 、 P , BD 与 EF 、 HG 分别交于点 K 、 Q ,

$\because E$ 是 AB 的中点, $EF \parallel AC$, $EH \parallel BD$,

$$\therefore \triangle EBK \sim \triangle ABM, \triangle AEN \sim \triangle EBK,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EBK}}{S_{\triangle ABM}} = \frac{1}{4}, S_{\triangle AEN} = S_{\triangle EBK},$$

$$\therefore \frac{S_{\text{四边形}EKME}}{S_{\triangle ABM}} = \frac{1}{2}, \text{同理可得} \frac{S_{\text{四边形}KFPN}}{S_{\triangle BCM}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\text{四边形}QGPN}}{S_{\triangle DCM}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\text{四边形}HQME}}{S_{\triangle DAM}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\text{四边形}EFGH}}{S_{\text{四边形}ABCD}} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 S_1 , 中点四边形 $EFGH$ 的面积记为 S_2 , 则 S_1 与 S_2 的数量关系是 $S_1 = 2S_2$;

(3) 如图 3, 四边形 $NEHM$ 是平行四边形;

$$\triangle MAH \cong \triangle GDH, \triangle NAE \cong \triangle FBE, \triangle CFG \cong \triangle ANM.$$

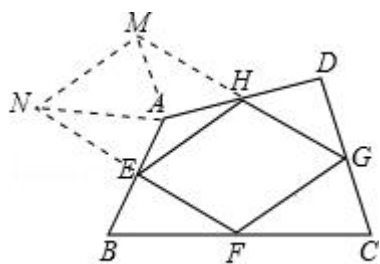


图3

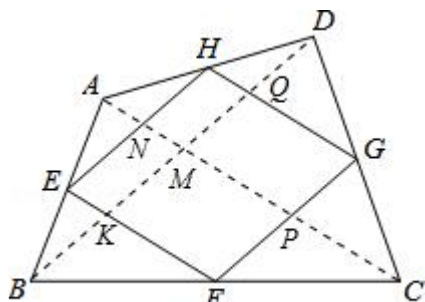


图2

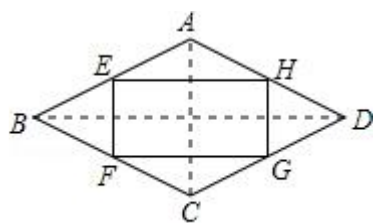


图1

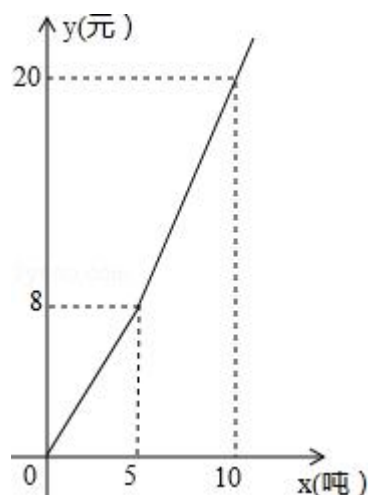
点评: 此题主要考查了中点四边形以及相似三角形的判定与性质和矩形的判定以及菱形的性质等知识，利用三角形中位线的性质得出是解题关键.

23. (12 分) (2014•龙岩) 随着地球上的水资源日益枯竭，各级政府越来越重视倡导节约用水. 某市民生活用水按“阶梯水价”方式进行收费，人均月生活用水收费标准如图所示，图中 x 表示人均月生活用水的吨数， y 表示收取的人均月生活用水费 (元). 请根据图象信息，回答下列问题:

(1) 该市人均月生活用水的收费标准是：不超过 5 吨，每吨按 1.6 元收取；超过 5 吨的部分，每吨按 2.4 元收取；

(2) 请写出 y 与 x 的函数关系式；

(3) 若某个家庭有 5 人，五月份的生活用水费共 76 元，则该家庭这个月人均用了多少吨生活用水？



考点：一次函数的应用.

分析： (1) 由图可知，用水 5 吨是 8 元，每吨按 $8 \div 5 = 1.6$ 元收取；超过 5 吨的部分，每吨按 $(20 - 8) \div (10 - 5) = 2.4$ 元收取；

(2) 根据图象分 $x \leq 5$ 和 $x > 5$ ，分别设出 y 与 x 的函数关系式，代入对应点，得出答案即可；

(3) 把 $y=76$ 代入 $x > 5$ 的 y 与 x 的函数关系式，求出 x 的数值即可.

解答： 解： 1) 该市人均月生活用水的收费标准是：不超过 5 吨，每吨按 1.6 元收取；超过 5 吨的部分，每吨按 2.4 元收取；

(2) 当 $x \leq 5$ 时，设 $y=kx$ ，代入 (5, 8) 得

$$8=5k,$$

$$\text{解得 } k=1.6$$

$$\therefore y=1.6x;$$

当 $x > 5$ 时，设 $y=kx+b$ ，代入 (5, 8)、(10, 20) 得

$$\begin{cases} 5k+b=8 \\ 10k+b=20 \end{cases}$$

$$\text{解得 } k=2.4, \quad b=-4$$

$$\therefore y=2.4x-4;$$

(3) 把 $y=76$ 代入 $y=2.4x-4$ 得

$$2.4x-4=76$$

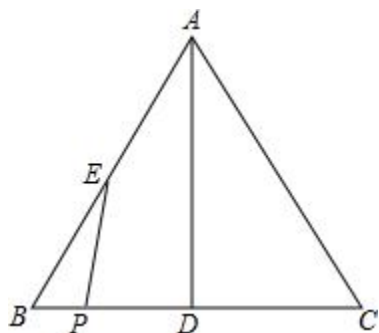
$$\text{解得 } x=\frac{100}{3}$$

答：该家庭这个月用了 $\frac{100}{3}$ 吨生活用水.

点评：此题考查一次函数的实际运用，结合图形，利用基本数量关系，得出函数解析式，进一步利用解析式解决问题.

24. (13 分) (2014•龙岩) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=10$ ， $BC=12$ ， D ， E 分别是边 BC ， AB 的中点， P 是 BC 边上的动点 (不与 B ， C 重合). 设 $BP=x$.

- (1) 当 $x=6$ 时，求 PE 的长；
- (2) 当 $\triangle BPE$ 是等腰三角形时，求 x 的值；
- (3) 当 AD 平分 EP 时，试判断以 EP 为直径的圆与直线 AC 的位置关系，并说明理由.



考点：圆的综合题.

专题：综合题.

分析： (1) 根据等腰三角形的性质得 $BD=CD=6$ ， $AD \perp BC$ ，所以 $x=6$ 时，点 P 在 D 点处，根据直角三角形斜边上的中线性质的 $PE=\frac{1}{2}AB=5$ ；

(2) 先得到 $BE=5$ ，再分类讨论：当 $BP=BE=5$ ，易得 $x=5$ ；当 $EP=EB$ ，作 $EM \perp BD$ 于 M ，如图 1，根据等腰三角形的性质得 $BM=PM$ ，由点 E 为 AB 的中点， $EM \parallel AD$ 得到 M 点为 BD 的中点，则 $PB=BD=6$ ，即 $x=6$ ；当 $PB=PE$ ，如图 2，作 $PN \perp BE$ 于 N ，根据等腰三角形的性质得 $BN=EN=\frac{1}{2}BE=\frac{5}{2}$ ，再证明 $Rt\triangle BPN \sim Rt\triangle BAP$ ，理由相似可计算出 $PB=\frac{25}{6}$ ，即 $x=\frac{25}{6}$ ；

(3) EP 交 AD 于 O ，作 $OH \perp AC$ 于 H ， $EF \perp AD$ 于 F ，如图 3，在 $Rt\triangle ABC$ 中，利用勾股定理计算出 $AD=8$ ，由点 E 为 AB 的中点， $EF \parallel BD$ 得到 EF 为 $\triangle ABD$ 的中位线，则 $EF=\frac{1}{2}BD=3$ ， $AF=DF=\frac{1}{2}AD=4$ ，再利用“ AAS ”证明 $\triangle OEF \cong \triangle OPD$ ，则

$OF=OD=\frac{1}{2}DF=2$, 所以 $AO=AF+OF=6$, 然后在 $Rt\triangle OEF$ 中, 根据勾股定理计算出

$OE=\sqrt{13}$, 证明 $Rt\triangle AOH\sim Rt\triangle ACD$, 利用相似比计算出 $OH=\frac{18}{5}$, 再比较 OE 与 OH

的大小, 然后根据直线与圆的位置关系进行判断.

解答: 解: (1) $\because AB=AC=10$, $BC=12$, D 为边 BC 的中点,

$\therefore BD=CD=6$, $AD\perp BC$,

$\therefore$ 当 $x=6$ 时, 点 P 在 D 点处,

$\therefore PE$ 为 $Rt\triangle ABD$ 斜边上的中线,

$\therefore PE=\frac{1}{2}AB=5$;

(2) $\because$ 点 E 为 AB 的中点,

$\therefore BE=5$,

当 $BP=BE=5$, 则 $x=5$;

当 $EP=EB$, 作 $EM\perp BD$ 于 M , 如图 1, 则 $BM=PM$,

$\because$ 点 E 为 AB 的中点,

而 $EM\parallel AD$,

$\therefore M$ 点为 BD 的中点,

$\therefore PB=BD=6$,

$\therefore x=6$;

当 $PB=PE$, 如图 2, 作 $PN\perp BE$ 于 N , 则 $BN=EN=\frac{1}{2}BE=\frac{5}{2}$,

$\because \angle PBN=\angle DBA$,

$\therefore Rt\triangle BPN\sim Rt\triangle BAP$,

$\therefore PB:AB=BN:BD$, 即 $x:10=\frac{5}{2}:6$,

$\therefore x=\frac{25}{6}$,

综上所述, 当 $\triangle BPE$ 是等腰三角形时, x 的值为 5 或 6 或 $\frac{25}{6}$;

(3) 以 EP 为直径的圆与直线 AC 相交. 理由如下:

EP 交 AD 于 O , 作 $OH\perp AC$ 于 H , $EF\perp AD$ 于 F , 如图 3,

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB=10$, $BD=6$,

$\therefore AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=8$,

∵ 点 E 为 AB 的中点,

而 EF//BD,

∴ EF 为 △ABD 的中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BD = 3, \quad AF = DF = \frac{1}{2}AD = 4,$$

∵ AD 平分 EP,

$$\therefore OE = OF,$$

在 △OEF 和 △OPD 中

$$\begin{cases} \angle EFO = \angle PDO \\ \angle EOF = \angle POD, \\ OE = OF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OEF \cong \triangle OPD,$$

$$\therefore OF = OD,$$

$$\therefore OF = \frac{1}{2}DF = 2,$$

$$\therefore AO = AF + OF = 6,$$

在 Rt△OEF 中, EF=3, OF=2,

$$\therefore OE = \sqrt{EF^2 + OF^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore \angle OAH = \angle CAD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AOH \sim \text{Rt}\triangle ACD,$$

$$\therefore OH : CD = AO : AC, \text{ 即 } OH : 6 = 6 : 10, \text{ 解得 } OH = \frac{18}{5},$$

$$\therefore OE = \sqrt{13} = \frac{5\sqrt{13}}{5} = \frac{\sqrt{325}}{5}, \quad OH = \frac{18}{5} = \frac{\sqrt{18^2}}{5} = \frac{\sqrt{324}}{5},$$

$$\therefore OE > OH,$$

∴ 以 EP 为直径的圆与直线 AC 相交.

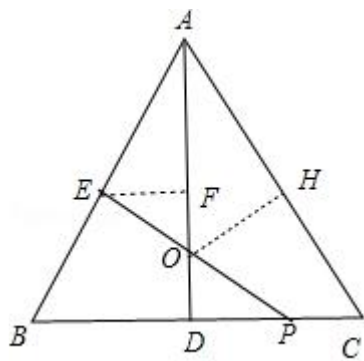


图3

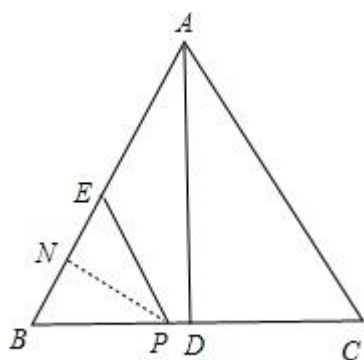


图2

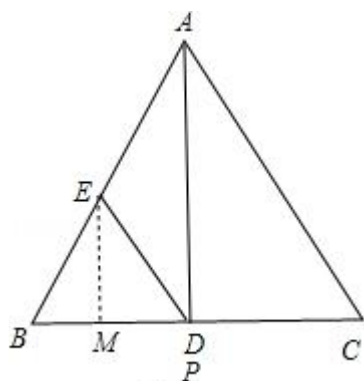


图1

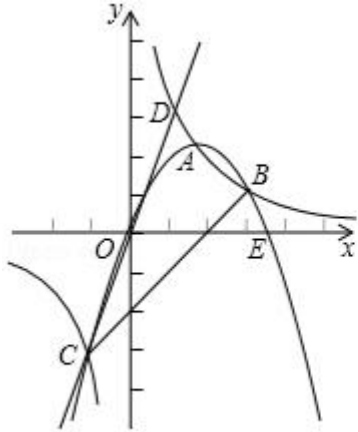
点评: 本题考查了圆的综合题: 熟练掌握直线与圆的位置关系的判定方法和等腰三角形的性质; 利用三角形全等解决线段相等的问题; 利用三角形相似求线段的长; 会运用分类讨论的思想解决数学问题.

25. (14 分) (2014•龙岩) 如图①, 双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 和抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 交于 A、B、C 三点, 其中 B (3, 1), C (-1, -3), 直线 CO 交双曲线于另一点 D, 抛物线与 x 轴交于另一点 E.

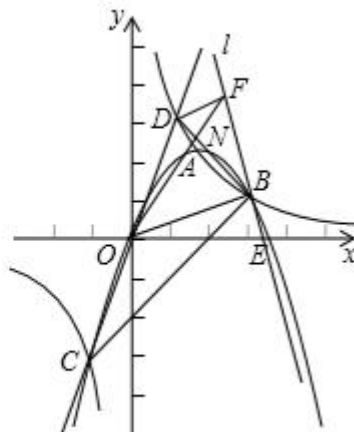
(1) 求双曲线和抛物线的解析式;

(2) 抛物线在第一象限部分是否存在点 P, 使得 $\angle POE + \angle BCD = 90^\circ$? 若存在, 请求出满足条件的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 如图②过 B 作直线 $l \perp OB$, 过点 D 作 $DF \perp l$ 于点 F, BD 与 OF 交于点 N, 求 $\frac{DN}{NB}$ 的值.



图①



图②

考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 用待定系数法即可求得.

(2) 过 O 作 $OM \perp BC$, 则 $OM = \sqrt{2}$, 因为 $OB = \sqrt{10}$, 根据勾股定理求得 $MB = 2\sqrt{2}$, 进而求得 $\tan \angle COM = \frac{BM}{OM} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$, 所以 $\tan \angle POE = 2$, 从而求得 P 点的坐标.

(3) 根据勾股定理求得 DF、OB 的长, 根据 $DF \parallel OB$ 得出 $\frac{DN}{NB} = \frac{DF}{OB}$ 即可求得.

解答: 解: (1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 过 B (3, 1), C (-1, -3),

$$\therefore \begin{cases} 1 = 9a + 3b \\ -3 = a - b \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x,$$

$$\text{把 B (3, 1) 代入 } y = \frac{k}{x} \text{ (} k \neq 0 \text{) 得: } 1 = \frac{k}{3},$$

$$\text{解得: } k = 3,$$

$$\therefore \text{双曲线的解析式为: } y = \frac{3}{x}.$$

(2) $\because B(3, 1), C(-1, -3)$, 设直线 BC 为 $y=kx+b$,

$$\therefore \begin{cases} 1=3k+b \\ -3=-k+b \end{cases},$$

解得 $k=1, b=-2$,

$\therefore$ 直线 BC 为: $y=x-2$,

$\therefore$ 与坐标轴的交点 $(2, 0), (0, -2)$,

过 O 作 $OM \perp BC$, 则 $OM=\sqrt{2}$,

$\because B(3, 1), C(-1, -3)$,

$$\therefore OB=OC=\sqrt{10},$$

$$\therefore BM=2\sqrt{2},$$

$$\therefore \tan \angle COM = \frac{BM}{OM} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2,$$

$\therefore \angle COM + \angle BCD = 90^\circ, \angle POE + \angle BCD = 90^\circ,$

$\therefore \angle POE = \angle COM,$

$\therefore \tan \angle POE = 2,$

$\because P$ 点是抛物线上的点, 设 $P(m, -\frac{2}{3}m^2 + \frac{7}{3}m)$,

$$\therefore \frac{-\frac{2}{3}m^2 + \frac{7}{3}m}{m} = 2,$$

解得: $m = \frac{1}{2}$,

$\therefore P(\frac{1}{2}, 1),$

(3) $\because$ 直线 CO 过 $C(-1, -3)$,

$\therefore$ 直线 CO 的解析式为 $y=3x$,

$$\text{解} \begin{cases} y=3x \\ y=\frac{3}{x} \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases},$$

$\therefore D(1, 3),$

$\because B(3, 1),$

$\therefore$ 直线 OB 的斜率 $= \frac{1}{3},$

∴ 直线 $l \perp OB$ ，过点 D 作 $DF \perp l$ 于点 F ，

∴ $DF \parallel OB$ ，

∴ 直线 l 的斜率 $= -3$ ，直线 DF 的斜率 $= \frac{1}{3}$ ，

∴ 直线 l 过 $B(3, 1)$ ，直线 DF 过 $D(1, 3)$ ，

∴ 直线 l 的解析式为 $y = -3x + 10$ ，直线 DF 解析式为 $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ ，

$$\text{解} \begin{cases} y = -3x + 10 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = \frac{17}{5} \end{cases},$$

∴ $F(\frac{11}{5}, \frac{17}{5})$ ，

$$\therefore DF = \sqrt{(\frac{11}{5} - 1)^2 + (\frac{17}{5} - 3)^2} = \frac{2}{5}\sqrt{10},$$

∴ $DF \parallel OB$ ， $OB = \sqrt{10}$ ，

$$\therefore \frac{DN}{NB} = \frac{DF}{OB} = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}.$$

点评： 本题考查了待定系数法求解析式，勾股定理的运用，平行线的斜率的特点，以及图象的交点等.