

2014 年福建省莆田市中考数学试卷

一、精心选一选：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，每小题给出的四个选项中有且只有一个选项是符合题目要求的。答对的得 4 分，答错、不答或答案超过一个的一律得 0 分。

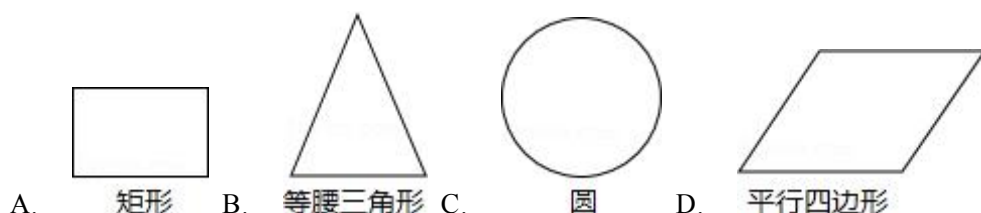
1. (4 分) (2014•莆田) 3 的相反数是 ()

- A. -3 B. 3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

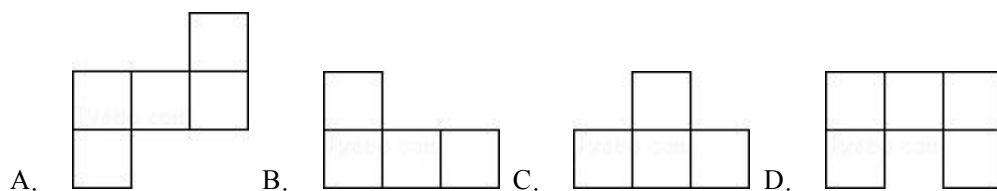
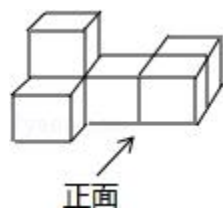
2. (4 分) (2014•莆田) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^3 \cdot a^2 = a^6$ B. $(2a)^3 = 6a^3$ C. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ D. $3a^2 - a^2 = 2a^2$

3. (4 分) (2014•莆田) 如图图形中，是轴对称图形，但不是中心对称图形的是 ()



4. (4 分) (2014•莆田) 如图是由 6 个大小相同的小正方体组成的几何体，它的左视图是 ()



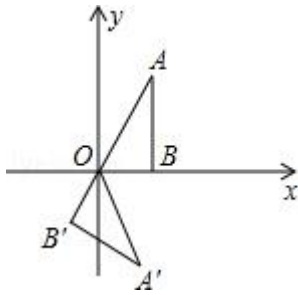
5. (4 分) (2014•莆田) 若 x 、 y 满足方程组 $\begin{cases} x+3y=7 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ ，则 $x-y$ 的值等于 ()

- A. -1 B. 1 C. 2 D. 3

6. (4 分) (2014•莆田) 在半径为 2 的圆中，弦 AB 的长为 2，则 $\widehat{AB}$ 的长等于 ()

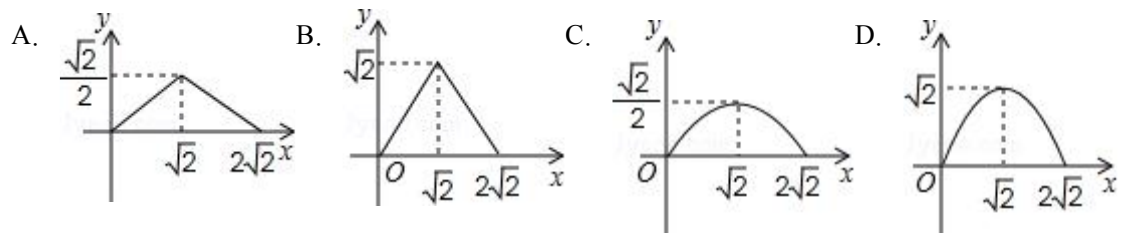
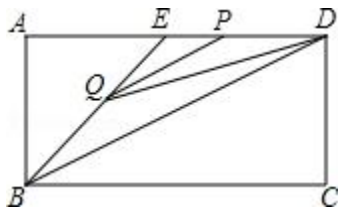
- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{2}$

7. (4 分) (2014•莆田) 如图，点 B 在 x 轴上， $\angle ABO = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $OA = 4$ ，将 $\triangle OAB$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 120° 得到 $\triangle OA'B'$ ，则点 A' 的坐标是 ()



- A. $(2, -2\sqrt{2})$ B. $(2, -2\sqrt{3})$ C. $(2\sqrt{2}, -2)$ D. $(2\sqrt{3}, -2)$

8. (4分) (2014•莆田) 如图, 在矩形 ABCD 中, $AB=2$, 点 E 在边 AD 上, $\angle ABE=45^\circ$, $BE=DE$, 连接 BD, 点 P 在线段 DE 上, 过点 P 作 $PQ \parallel BD$ 交 BE 于点 Q, 连接 QD. 设 $PD=x$, $\triangle PQD$ 的面积为 y , 则能表示 y 与 x 函数关系的图象大致是 ()



二、细心填一填：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。

9. (4分) (2014•莆田) 我国的北斗卫星导航系统与美国的 GPS 和俄罗斯格洛纳斯系统并称世界三大卫星导航系统, 北斗系统的卫星轨道高达 36000 公里, 将 36000 用科学记数法表示为_____.

10. (4分) (2014•莆田) 若正 n 边形的一个外角为 45° , 则 n =_____.

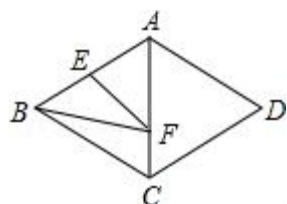
11. (4分) (2014•莆田) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+3x+a=0$ 有一个根是 -1 , 则 a =_____.

12. (4分) (2014•莆田) 在一个不透明的袋子中, 装有大小、形状、质地等都相同的红色、黄色、白色小球各 1 个, 从袋子中随机摸出一个小球, 之后把小球放回袋子中并摇匀, 再随机摸出一个小球, 则两次摸出的小球颜色相同的概率是_____.

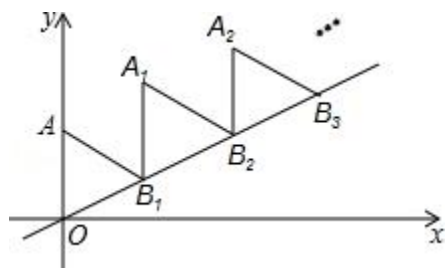
13. (4分) (2014•莆田) 在一次数学测试中, 小明所在小组 6 人的成绩 (单位: 分) 分别为 84、79、83、87、77、81, 则这 6 人本次数学测试成绩的中位数是_____.

14. (4分) (2014•莆田) 计算: $\frac{a^2}{a+2} - \frac{4}{a+2}$ =_____.

15. (4分) (2014•莆田) 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长为 4, $\angle BAD=120^\circ$, 点 E 是 AB 的中点, 点 F 是 AC 上的一动点, 则 $EF+BF$ 的最小值是_____.



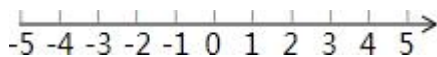
16. (4分) (2014•莆田) 如图放置的 $\triangle OAB_1$, $\triangle B_1A_1B_2$, $\triangle B_2A_2B_3$, ... 都是边长为 2 的等边三角形, 边 AO 在 y 轴上, 点 $B_1, B_2, B_3, \dots$ 都在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上, 则 A_{2014} 的坐标是_____.



三、耐心做一做: 本大题共 9 小题, 共 86 分, 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤

17. (8分) (2014•莆田) 计算: $\sqrt{9} - 2\sin 60^\circ + |\sqrt{3}|$.

18. (8分) (2014•莆田) 解不等式 $\frac{2-x}{4} \geq \frac{1-x}{3}$, 并把它的解集在数轴上表示出来.



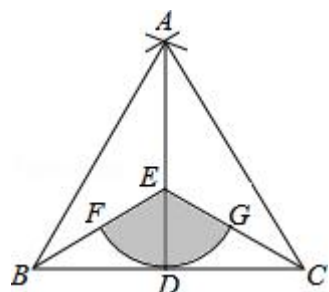
19. (8分) (2014•莆田) 某校为了解该校九年级学生对篮球、乒乓球、羽毛球、足球四种球类运动项目的喜爱情况, 对九年级部分学生进行了随机抽样调查, 每名学生必须且只能选择最喜爱的一项运动项目上, 将调查结果统计后绘制成如图两幅不完整的统计图, 请根据图中的信息, 回答下列问题:

- (1) 这次被抽查的学生有_____人; 请补全条形统计图;
- (2) 在统计图 2 中, “乒乓球”对应扇形的圆心角是_____度;
- (3) 若该校九年级共有 480 名学生, 估计该校九年级最喜欢足球的学生约有_____人.



20. (8分) (2014•莆田) 如图, 点 D 是线段 BC 的中点, 分别以点 B, C 为圆心, BC 长为半径画弧, 两弧相交于点 A, 连接 AB, AC, AD, 点 E 为 AD 上一点, 连接 BE, CE.

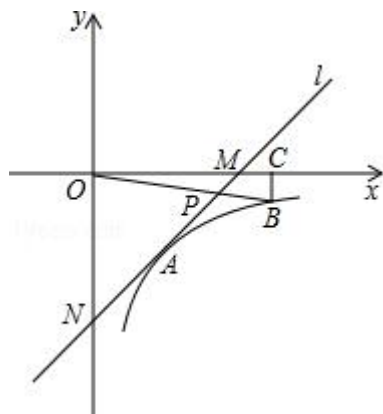
- (1) 求证: $BE=CE$;
- (2) 以点 E 为圆心, ED 长为半径画弧, 分别交 BE, CE 于点 F, G. 若 $BC=4$, $\angle EBD=30^\circ$, 求图中阴影部分 (扇形) 的面积.



21. (8分) (2014•莆田) 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 l 与 x 轴相交于点 M , 与 y 轴相交于点 N , $\text{Rt}\triangle MON$ 的外心为点 A ($\quad, -2$), 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象过点 A .

(1) 求直线 l 的解析式;

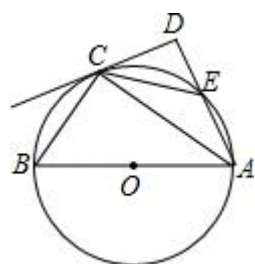
(2) 在函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象上取异于点 A 的一点 B , 作 $BC \perp x$ 轴于点 C , 连接 OB 交直线 l 于点 P . 若 $\triangle ONP$ 的面积是 $\triangle OBC$ 面积的 3 倍, 求点 P 的坐标.



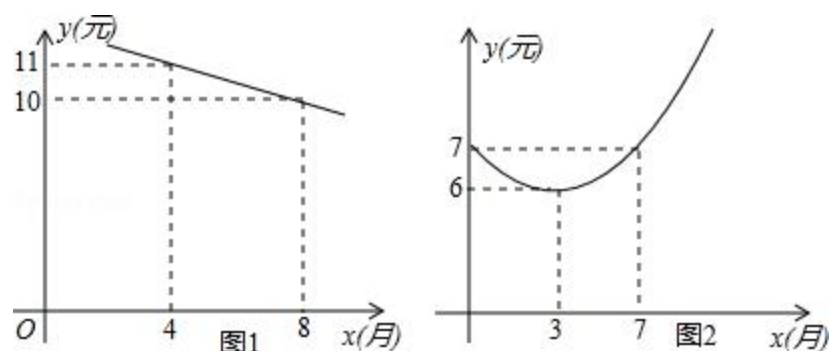
22. (10分) (2014•莆田) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 是 $\odot O$ 上的一点, 过点 A 作 $AD \perp CD$ 于点 D , 交 $\odot O$ 于点 E , 且 $\widehat{BC} = \widehat{CE}$.

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\tan \angle CAB = \frac{1}{2}$, $BC = 3$, 求 DE 的长.

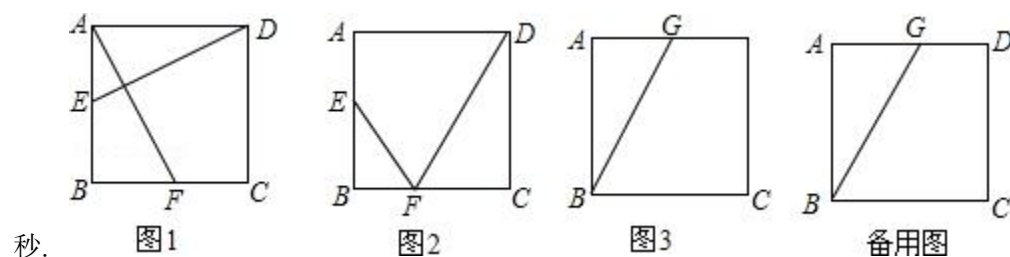


23. (10 分) (2014•莆田) 某水果店销售某中水果, 由历年市场行情可知, 从第 1 月至第 12 月, 这种水果每千克售价 y_1 (元) 与销售时间第 x 月之间存在如图 1 (一条线段) 的变化趋势, 每千克成本 y_2 (元) 与销售时间第 x 月满足函数关系式 $y_2=mx^2-8mx+n$, 其变化趋势如图 2.



- (1) 求 y_2 的解析式;
- (2) 第几月销售这种水果, 每千克所获得利润最大? 最大利润是多少?

24. (12 分) (2014•莆田) 如图, 在边长为 4 的正方形 ABCD 中, 动点 E 以每秒 1 个单位长度的速度从点 A 开始沿边 AB 向点 B 运动, 动点 F 以每秒 2 个单位长度的速度从点 B 开始沿折线 BC-CD 向点 D 运动, 动点 E 比动点 F 先出发 1 秒, 其中一个动点到达终点时, 另一个动点也随之停止运动, 设点 F 的运动时间为 t



秒.

- (1) 点 F 在边 BC 上.
 - ①如图 1, 连接 DE, AF, 若 $DE \perp AF$, 求 t 的值;
 - ②如图 2, 连结 EF, DF, 当 t 为何值时, $\triangle EBF$ 与 $\triangle DCF$ 相似?
- (2) 如图 3, 若点 G 是边 AD 的中点, BG, EF 相交于点 O, 试探究: 是否存在在某一时刻 t , 使得 $\frac{BO}{OG}=?$ 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

25. (14 分) (2014•莆田) 如图, 抛物线 $C_1: y = (x+m)^2$ (m 为常数, $m > 0$), 平移抛物线 $y = -x^2$, 使其顶点 D 在抛物线 C_1 位于 y 轴右侧的图象上, 得到抛物线 C_2 . 抛物线 C_2 交 x 轴于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 交 y 轴于点 C , 设点 D 的横坐标为 a .

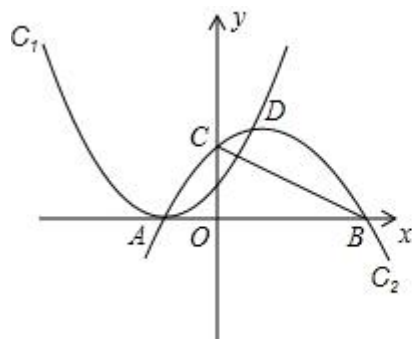


图1

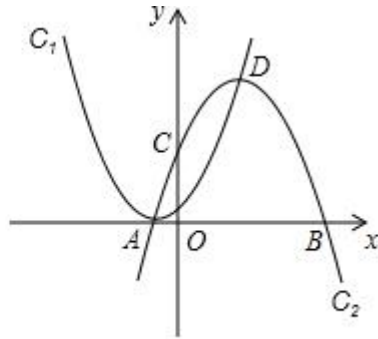


图2

(1) 如图 1, 若 $m =$.

①当 $OC=2$ 时, 求抛物线 C_2 的解析式;

②是否存在 a , 使得线段 BC 上有一点 P , 满足点 B 与点 C 到直线 OP 的距离之和最大且 $AP=BP$? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由;

(2) 如图 2, 当 $OB=2\sqrt{3}-m$ ($0 < m < \sqrt{3}$) 时, 请直接写出到 $\triangle ABD$ 的三边所在直线的距离相等的所有点的坐标 (用含 m 的式子表示).

2014 年福建省莆田市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、精心选一选：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，每小题给出的四个选项中有且只有一个选项是符合题目要求的。答对的得 4 分，答错、不答或答案超过一个的一律得 0 分。

1. (4 分) (2014•莆田) 3 的相反数是 ()

- A. -3 B. 3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

考点：相反数.

分析：根据相反数的性质，互为相反数的两个数和为 0，采用逐一检验法求解即可.

解答：解：根据概念，(3 的相反数) + (3) = 0，则 3 的相反数是 -3 .

故选 A.

点评：本题考查了相反数的意义，一个数的相反数就是在这个数前面添上“ $-$ ”号：一个正数的相反数是负数，一个负数的相反数是正数，0 的相反数是 0.

2. (4 分) (2014•莆田) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^3 \cdot a^2 = a^6$ B. $(2a)^3 = 6a^3$ C. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ D. $3a^2 - a^2 = 2a^2$

考点：完全平方公式；合并同类项；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方.

分析：根据同底数幂相乘，底数不变指数相加；积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘；完全平方公式；合并同类项法则对各选项分析判断利用排除法求解.

解答：解：A、 $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$ ，故本选项错误；

B、 $(2a)^3 = 8a^3$ ，故本选项错误；

C、 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，故本选项错误；

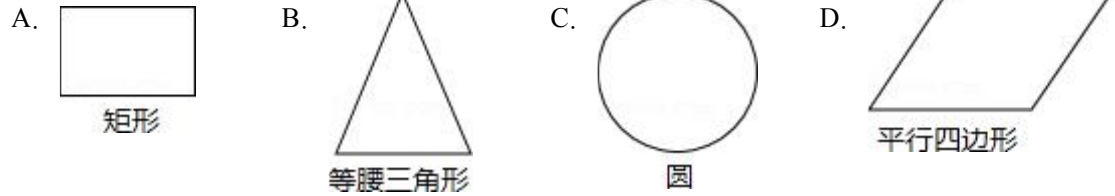
D、 $3a^2 - a^2 = 2a^2$ ，故本选项正确.

故选 D.

点评：本题考查了完全平方公式，合并同类项法则，同底数幂的乘法，积的乘方的性质，熟

记性质与公式并理清指数的变化是解题的关键.

3. (4分) (2014•莆田) 如图图形中, 是轴对称图形, 但不是中心对称图形的是 ()



考点: 中心对称图形; 轴对称图形.

分析: 根据中心对称图形的定义旋转 180° 后能够与原图形完全重合即是中心对称图形, 以及轴对称图形的定义即可判断出.

解答: 解: A、 $\because$ 此图形旋转 180° 后能与原图形重合, $\therefore$ 此图形是中心对称图形, 也是轴对称图形, 故此选项错误;

B、 $\because$ 此图形旋转 180° 后不能与原图形重合, $\therefore$ 此图形不是中心对称图形, 是轴对称图形, 故此选项正确;

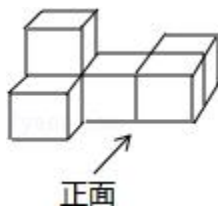
C、此图形旋转 180° 后能与原图形重合, 此图形是中心对称图形, 也是轴对称图形, 故此选项错误;

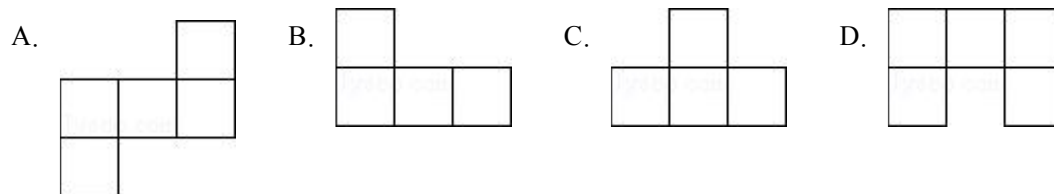
D、 $\because$ 此图形旋转 180° 后能与原图形重合, $\therefore$ 此图形是中心对称图形, 不是轴对称图形, 故此选项错误.

故选: B.

点评: 此题主要考查了中心对称图形与轴对称的定义, 根据定义得出图形形状是解决问题的关键.

4. (4分) (2014•莆田) 如图是由 6 个大小相同的小正方体组成的几何体, 它的左视图是 ()





考点: 简单组合体的三视图.

分析: 细心观察图中几何体中正方体摆放的位置, 根据左视图是从左面看到的图形判定则可.

解答: 解: 从物体左面看, 第一层有 3 个正方形, 第二层的中间有 1 个正方形.
故选 C.

点评: 本题考查了三视图的知识, 左视图是从物体左面看所得到的图形, 解答时学生易将三种视图混淆而错误的选其它选项.

5. (4 分) (2014•莆田) 若 x 、 y 满足方程组 $\begin{cases} x+3y=7 \\ 3x+y=5 \end{cases}$, 则 $x-y$ 的值等于 ()

- A. -1 B. 1 C. 2 D. 3

考点: 解二元一次方程组.

专题: 计算题.

分析: 方程组两方程相减即可求出 $x-y$ 的值.

解答: 解: $\begin{cases} x+3y=7 \text{ ①} \\ 3x+y=5 \text{ ②} \end{cases}$,

② - ① 得: $2x - 2y = -2$,

则 $x - y = -1$,

故选 A

点评: 此题考查了解二元一次方程组, 利用了消元的思想, 消元的方法有: 代入消元法与加减消元法.

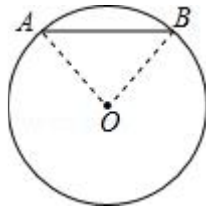
6. (4 分) (2014•莆田) 在半径为 2 的圆中, 弦 AB 的长为 2, 则 $\widehat{AB}$ 的长等于 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{2}$

考点: 弧长的计算.

分析: 连接 OA、OB, 求出圆心角 AOB 的度数, 代入弧长公式求出即可.

解答:



解: 连接 OA、OB,

$$\therefore OA=OB=AB=2,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle AOB=60^\circ,$$

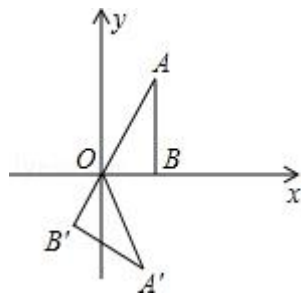
$$\therefore \widehat{AB} \text{ 的长为 } \frac{60\pi \times 2}{180} = \frac{2\pi}{3},$$

故选 C.

点评: 本题考查了弧长公式, 等边三角形的性质和判定的应用, 注意: 已知圆的半径是 R,

$$\text{弧 AB 对的圆心角的度数是 } n^\circ, \text{ 则弧 AB 的长} = \frac{n\pi R}{180}.$$

7. (4 分) (2014•莆田) 如图, 点 B 在 x 轴上, $\angle ABO=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$, $OA=4$, 将 $\triangle OAB$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 120° 得到 $\triangle OA'B'$, 则点 A' 的坐标是 ()



- A. $(2, -2\sqrt{2})$ B. $(2, -2\sqrt{3})$ C. $(2\sqrt{2}, -2)$ D. $(2\sqrt{3}, -2)$

考点: 坐标与图形变化-旋转.

专题: 数形结合.

分析: 根据含 30° 度的直角三角形三边的关系得到 $OB=OA=2$, $AB=\sqrt{3}OB=2\sqrt{3}$, 则 A 点坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$, 再根据旋转的性质得到 $\angle A'OA=120^\circ$, $OA'=OA=4$, 则 $\angle A'OB=60^\circ$, 于是可判断点 A' 和点 A 关于 x 轴对称, 然后根据关于 x 轴对称的点的坐标特征写出点 A' 的坐标.

解答: 解: $\because \angle ABO=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$, $OA=4$,

$$\therefore \angle AOB=60^\circ, OB=OA=2, AB=\sqrt{3}OB=2\sqrt{3},$$

$$\therefore A \text{ 点坐标为 } (2, 2\sqrt{3}),$$

$\therefore \triangle OAB$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 120° 得到 $\triangle OA'B'$,

$$\therefore \angle A'OA=120^\circ, OA'=OA=4,$$

$$\therefore \angle A'OB=60^\circ,$$

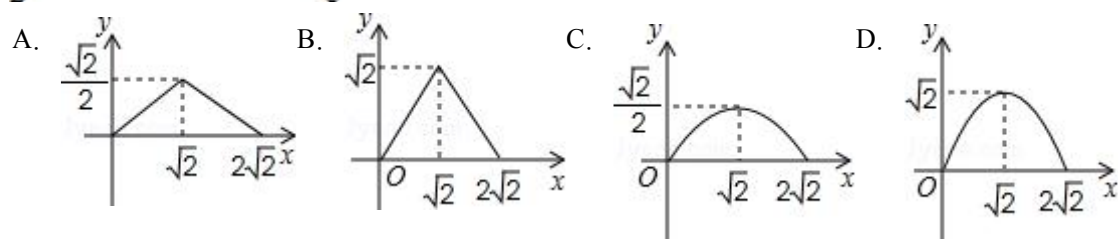
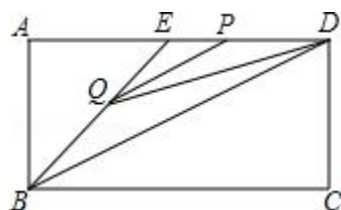
$\therefore$ 点 A' 和点 A 关于 x 轴对称,

$$\therefore \text{点 } A' \text{ 的坐标为 } (2, -2\sqrt{3}).$$

故选 B.

点评: 本题考查了坐标与图形变化 - 旋转: 图形或点旋转之后要结合旋转的角度和图形的特殊性质来求出旋转后的点的坐标. 常见的是旋转特殊角度如: 30° , 45° , 60° , 90° , 180° . 也考查了含 30° 度的直角三角形三边的关系.

8. (4 分) (2014•莆田) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2$, 点 E 在边 AD 上, $\angle ABE=45^\circ$, $BE=DE$, 连接 BD , 点 P 在线段 DE 上, 过点 P 作 $PQ \parallel BD$ 交 BE 于点 Q , 连接 QD . 设 $PD=x$, $\triangle PQD$ 的面积为 y , 则能表示 y 与 x 函数关系的图象大致是 ()



考点: 动点问题的函数图象.

分析: 判断出 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形, 根据等腰直角三角形的性质求出 AE 、 BE , 然后表示出 PE 、 QE , 再求出点 Q 到 AD 的距离, 然后根据三角形的面积公式表示出 y 与 x 的关系式, 再根据二次函数图象解答.

解答: 解: $\because \angle ABE=45^\circ$, $\angle A=90^\circ$,

∴ △ABE 是等腰直角三角形,

∴ AE=AB=2, BE=√2AB=2√2,

∴ BE=DE, PD=x,

∴ PE=DE - PD=2√2 - x,

∴ PQ//BD, BE=DE,

∴ QE=PE=2√2 - x,

又 ∵ △ABE 是等腰直角三角形 (已证),

∴ 点 Q 到 AD 的距离 = $\frac{\sqrt{2}}{2} (2\sqrt{2} - x) = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x$,

∴ △PQD 的面积 $y = x (2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x) = -\frac{\sqrt{2}}{4} (x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) = -\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \sqrt{2})^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$,

即 $y = -\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \sqrt{2})^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$,

纵观各选项, 只有 C 选项符合.

故选 C.

点评: 本题考查了动点问题的函数图象, 等腰直角三角形的判定与性质, 三角形的面积, 二次函数图象, 求出点 Q 到 AD 的距离, 从而列出 y 与 x 的关系式是解题的关键.

二、细心填一填: 本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

9. (4 分) (2014•莆田) 我国的北斗卫星导航系统与美国的 GPS 和俄罗斯格洛纳斯系统并称世界三大卫星导航系统, 北斗系统的卫星轨道高达 36000 公里, 将 36000 用科学记数法表示为 3.6×10^4 .

考点: 科学记数法—表示较大的数.

分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: 将 36000 用科学记数法表示为: 3.6×10^4 .

故答案为: 3.6×10^4 .

点评: 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

10. (4分) (2014•莆田) 若正 n 边形的一个外角为 45° , 则 $n=$ 8.

考点: 多边形内角与外角.

分析: 根据正多边形的外角和的特征即可求出多边形的边数.

解答: 解: $n=360^\circ \div 45^\circ=8$.

答: n 的值为 8.

故答案为: 8.

点评: 本题考查多边形的外角和的特征: 多边形的外角和等于 360° , 是基础题型.

11. (4分) (2014•莆田) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+3x+a=0$ 有一个根是 -1 , 则 $a=$ 2.

考点: 一元二次方程的解.

分析: 把 $x=-1$ 代入原方程, 列出关于 a 的新方程, 通过解新方程可以求得 a 的值.

解答: 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2+3x+a=0$ 有一个根是 -1 ,

$$\therefore (-1)^2+3 \times (-1)+a=0,$$

解得 $a=2$,

故答案是: 2.

点评: 本题考查的是一元二次方程的根即方程的解的定义. 一元二次方程的根就是一元二次方程的解, 就是能够使方程左右两边相等的未知数的值. 即用这个数代替未知数所得式子仍然成立.

12. (4分) (2014•莆田) 在一个不透明的袋子中, 装有大小、形状、质地等都相同的红色、黄色、白色小球各 1 个, 从袋子中随机摸出一个小球, 之后把小球放回袋子中并摇匀, 再随机摸出一个小球, 则两次摸出的小球颜色相同的概率是 $\frac{1}{3}$.

考点: 列表法与树状图法.

分析: 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与两次摸出的小球颜色相同的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

解答: 解: 画树状图得:



∴ 共有 9 种等可能的结果, 两次摸出的小球颜色相同的有 3 种情况,

∴ 两次摸出的小球颜色相同的概率是: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

故答案为: $\frac{1}{3}$

点评: 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 列表法适合于两步完成的事件, 树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

13. (4 分) (2014•莆田) 在一次数学测试中, 小明所在小组 6 人的成绩 (单位: 分) 分别为 84、79、83、87、77、81, 则这 6 人本次数学测试成绩的中位数是 82.

考点: 中位数.

分析: 根据中位数的定义先把这组数据从小到大排列, 再求出最中间两个数的平均数即可.

解答: 解: 把这组数据从小到大排列为: 77、79、81、83、84、87,

最中间两个数的平均数是: $(81+83) \div 2 = 82$;

故答案为: 82.

点评: 此题考查了中位数, 中位数是将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (最中间两个数的平均数), 叫做这组数据的中位数, 熟练掌握中位数的概念是本题的关键.

14. (4 分) (2014•莆田) 计算: $\frac{a^2}{a+2} - \frac{4}{a+2} = \underline{a-2}$.

考点: 分式的加减法.

专题: 计算题.

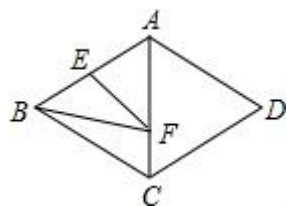
分析: 根据同分母分式加减运算法则, 分母不变只把分子相加减即可求解.

解答:

解: $\frac{a^2}{a+2} - \frac{4}{a+2} = \frac{a^2-4}{a+2} = a-2$. 故答案为 $a-2$.

点评: 本题主要考查同分母分式加减, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

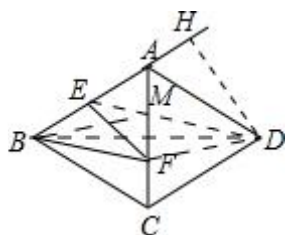
15. (4分) (2014•莆田) 如图, 菱形 ABCD 的边长为 4, $\angle BAD=120^\circ$, 点 E 是 AB 的中点, 点 F 是 AC 上的一动点, 则 EF+BF 的最小值是 $2\sqrt{7}$.



考点: 轴对称-最短路线问题; 菱形的性质.

分析: 首先连接 DB, DE, 设 DE 交 AC 于 M, 连接 MB, DF. 证明只有点 F 运动到点 M 时, EF+BF 取最小值, 再根据菱形的性质、勾股定理求得最小值.

解答: 解: 连接 DB, DE, 设 DE 交 AC 于 M, 连接 MB, DF, 延长 BA, DH $\perp$ BA 于 H,



$\therefore$ 四边形 ABCD 是菱形,

$\therefore$ AC, BD 互相垂直平分,

$\therefore$ 点 B 关于 AC 的对称点为 D,

$\therefore$ FD=FB,

$\therefore$ FE+FB=FE+FD $\geq$ DE.

只有当点 F 运动到点 M 时, 取等号 (两点之间线段最短),

$\triangle ABD$ 中, AD=AB, $\angle DAB=120^\circ$,

$\therefore \angle HAD=60^\circ$,

$\therefore$ DH $\perp$ AB,

$\therefore$ AH=AD, $DH=\frac{\sqrt{3}}{2}AD$,

$\therefore$ 菱形 ABCD 的边长为 4, E 为 AB 的中点,

$$\therefore AE=2, AH=2,$$

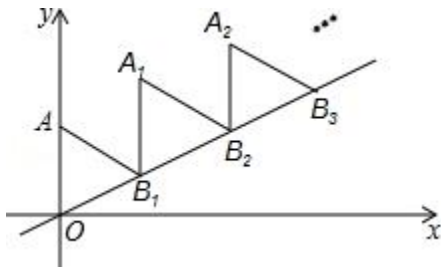
$$\therefore EH=4, DH=2\sqrt{3},$$

$$\text{在 } \text{RT}\triangle EHD \text{ 中, } DE=\sqrt{EH^2+DH^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$$

$$\therefore EF+BF \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{7}.$$

点评: 此题主要考查菱形是轴对称图形的性质, 知道什么时候会使 $EF+BF$ 成为最小值是解本题的关键.

16. (4分) (2014•莆田) 如图放置的 $\triangle OAB_1$, $\triangle B_1A_1B_2$, $\triangle B_2A_2B_3$, ... 都是边长为 2 的等边三角形, 边 AO 在 y 轴上, 点 $B_1, B_2, B_3, \dots$ 都在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上, 则 A_{2014} 的坐标是 $(2014\sqrt{3}, 2016)$.



考点: 一次函数图象上点的坐标特征; 等边三角形的性质.

专题: 规律型.

分析: 根据题意得出直线 AA_1 的解析式为: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$, 进而得出 A, A_1, A_2, A_3 坐标, 进而得出坐标变化规律, 进而得出答案.

解答: 解: 过 B_1 向 x 轴作垂线 B_1C , 垂足为 C ,

由题意可得: $A(0, 2)$, $AO \parallel A_1B_1$, $\angle B_1OC=30^\circ$,

$$\therefore CO=OB_1\cos 30^\circ=\sqrt{3},$$

$$\therefore B_1 \text{ 的横坐标为: } \sqrt{3}, \text{ 则 } A_1 \text{ 的横坐标为: } \sqrt{3},$$

连接 AA_1 , 可知所有三角形顶点都在直线 AA_1 上,

$$\therefore \text{点 } B_1, B_2, B_3, \dots \text{ 都在直线 } y=\frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ 上, } AO=2,$$

$$\therefore \text{直线 } AA_1 \text{ 的解析式为: } y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2,$$

$$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\sqrt{3}+2=3,$$

$$\therefore A_1 (\sqrt{3}, 3),$$

同理可得出： A_2 的横坐标为： $2\sqrt{3}$,

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2\sqrt{3} + 2 = 4,$$

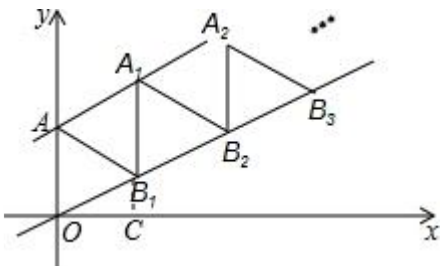
$$\therefore A_2 (2\sqrt{3}, 4),$$

$$\therefore A_3 (3\sqrt{3}, 5),$$

...

$$A_{2014} (2014\sqrt{3}, 2016).$$

故答案为： $(2014\sqrt{3}, 2016)$.



点评：此题主要考查了一次函数图象上点的坐标特征以及数字变化类，得出 A 点横纵坐标变化规律是解题关键.

三、耐心做一做：本大题共 9 小题，共 86 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤

17. (8 分) (2014•莆田) 计算： $\sqrt{9} - 2\sin 60^\circ + |-\sqrt{3}|$.

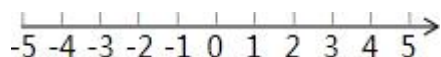
考点：实数的运算；特殊角的三角函数值.

分析：先根据数的开方法则、特殊角的三角函数值、绝对值的性质计算出各数，再根据实数混合运算的法则进行计算即可.

$$\begin{aligned} \text{解答：解：原式} &= 3 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \\ &= 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= 3. \end{aligned}$$

点评：本题考查的是实数的运算，熟知数的开方法则、特殊角的三角函数值、绝对值的性质是解答此题的关键.

18. (8分) (2014•莆田) 解不等式 $\frac{2-x}{4} \geq \frac{1-x}{3}$, 并把它的解集在数轴上表示出来.



考点: 解一元一次不等式; 在数轴上表示不等式的解集.

专题: 计算题.

分析: 先去分母和去括号得到 $6-3x \geq 4-4x$, 然后移项后合并得到 $x \geq -2$, 再利用数轴表示解集.

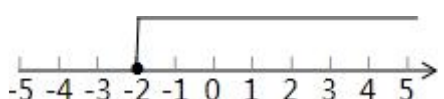
解答: 解: 去分母得 $3(2-x) \geq 4(1-x)$,

去括号得 $6-3x \geq 4-4x$,

移项得 $4x-3x \geq 4-6$,

合并得 $x \geq -2$,

在数轴上表示为:



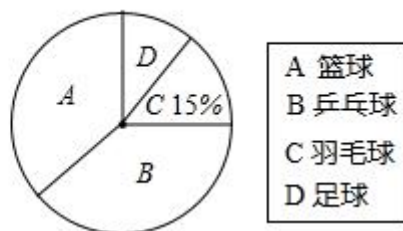
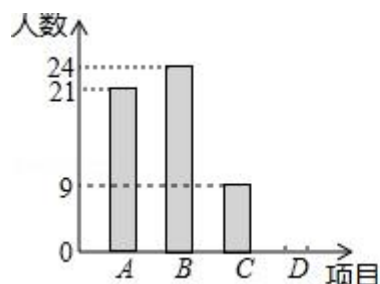
点评: 本题考查了解一元一次不等式: 解一元一次不等式的基本步骤为: ①去分母; ②去括号; ③移项; ④合并同类项; ⑤化系数为1. 也考查了在数轴上表示不等式的解集.

19. (8分) (2014•莆田) 某校为了解该校九年级学生对篮球、乒乓球、羽毛球、足球四种球类运动项目的喜爱情况, 对九年级部分学生进行了随机抽样调查, 每名同学必须且只能选择最喜爱的一项运动项目上, 将调查结果统计后绘制成如图两幅不完整的统计图, 请根据图中的信息, 回答下列问题:

(1) 这次被抽查的学生有 60 人; 请补全条形统计图;

(2) 在统计图2中, “乒乓球”对应扇形的圆心角是 144 度;

(3) 若该校九年级共有480名学生, 估计该校九年级最喜欢足球的学生约有 48 人.



考点: 条形统计图; 用样本估计总体; 扇形统计图.

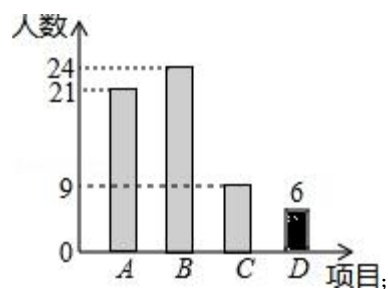
分析: (1) 根据 C 类的人数是 9, 所占的比例是 20%, 据此即可求得总人数;

(2) 利用 360° 乘以对应的比例即可求解;

(3) 利用总人数 480, 乘以对应的比例即可.

解答: 解: (1) 被抽查的学生数是: $9 \div 15\% = 60$ (人),

D 项的人数是: $60 - 21 - 24 - 9 = 6$ (人),



(2) “乒乓球”对应扇形的圆心角是: $360^\circ \times \frac{24}{60} = 144^\circ$;

(3) $480 \times \frac{6}{60} = 48$ (人).

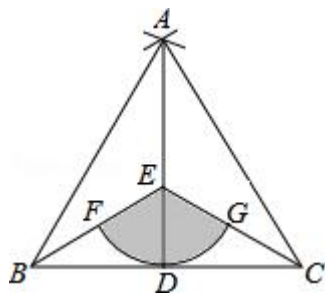
故答案是: 60, 144, 48.

点评: 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用, 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据; 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

20. (8 分) (2014•莆田) 如图, 点 D 是线段 BC 的中点, 分别以点 B, C 为圆心, BC 长为半径画弧, 两弧相交于点 A, 连接 AB, AC, AD, 点 E 为 AD 上一点, 连接 BE, CE.

(1) 求证: $BE = CE$;

(2) 以点 E 为圆心, ED 长为半径画弧, 分别交 BE, CE 于点 F, G. 若 $BC = 4$, $\angle EBD = 30^\circ$, 求图中阴影部分 (扇形) 的面积.



考点: 全等三角形的判定与性质; 等边三角形的性质; 扇形面积的计算.

专题: 证明题.

分析: (1) 由点 D 是线段 BC 的中点得到 $BD=CD$, 再由 $AB=AC=BC$ 可判断 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 于是得到 AD 为 BC 的垂直平分线, 根据线段垂直平分线的性质得 $BE=CE$;

(2) 由 $EB=EC$, 根据等腰三角形的性质得 $\angle EBC=\angle ECB=30^\circ$, 则根据三角形内角和定理计算得 $\angle BEC=120^\circ$, 在 $Rt\triangle BDE$ 中, $BD=BC=2$, $\angle EBD=30^\circ$,

根据含 30° 的直角三角形三边的关系得到 $ED=\frac{\sqrt{3}}{3}BD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 然后根据扇形的面积公式求解.

解答: (1) 证明: $\because$ 点 D 是线段 BC 的中点,

$$\therefore BD=CD,$$

$$\therefore AB=AC=BC,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore AD \text{ 为 } BC \text{ 的垂直平分线},$$

$$\therefore BE=CE;$$

$$(2) \text{ 解: } \because EB=EC,$$

$$\therefore \angle EBC=\angle ECB=30^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC=120^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BDE \text{ 中, } BD=BC=2, \angle EBD=30^\circ,$$

$$\therefore ED=\frac{\sqrt{3}}{3}BD=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

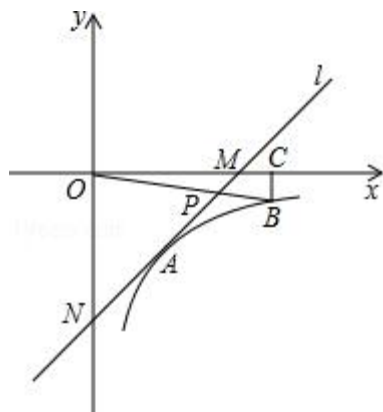
$$\therefore \text{阴影部分 (扇形) 的面积}=\frac{120 \cdot \pi \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{360}=\pi.$$

点评: 本题考查了全等三角形的判定与性质: 全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具. 也考查了等边三角形的判定与性质、相等垂直平分线的性质以及扇形的面积公式.

21. (8 分) (2014•莆田) 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 l 与 x 轴相交于点 M, 与 y 轴相交于点 N, $Rt\triangle MON$ 的外心为点 A (, -2), 反比例函数 $y=$ ($x>0$) 的图象过点 A.

(1) 求直线 l 的解析式;

(2) 在函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象上取异于点 A 的一点 B，作 $BC \perp x$ 轴于点 C，连接 OB 交直线 l 于点 P。若 $\triangle ONP$ 的面积是 $\triangle OBC$ 面积的 3 倍，求点 P 的坐标。



考点: 反比例函数综合题.

专题: 综合题.

分析: (1) 由 A 为直角三角形外心，得到 A 为斜边 MN 中点，根据 A 坐标确定出 M 与 N 坐标，设直线 l 解析式为 $y = mx + n$ ，将 M 与 N 坐标代入求出 m 与 n 的值，即可确定出直线 l 解析式；

(2) 将 A 坐标代入反比例解析式求出 k 的值，确定出反比例解析式，利用反比例函数 k 的意义求出 $\triangle OBC$ 的面积，由 $\triangle ONP$ 的面积是 $\triangle OBC$ 面积的 3 倍求出 $\triangle ONP$ 的面积，确定出 P 的横坐标，即可得出 P 坐标。

解答: 解: (1) $\because \text{Rt}\triangle MON$ 的外心为点 A (-2),
 $\therefore$ A 为 MN 中点，即 M (3), N (0),

设直线 l 解析式为 $y = mx + n$,

将 M 与 N 代入得:
$$\begin{cases} 3m + n = 0 \\ n = -4 \end{cases},$$

解得: $m = \frac{4}{3}$, $n = -4$,

则直线 l 解析式为 $y = \frac{4}{3}x - 4$;

(2) 将 A (-2) 代入反比例解析式得: $k = -3$,

$\therefore$ 反比例解析式为 $y = -\frac{3}{x}$,

$\therefore$ B 为反比例函数图象上的点，且 $BC \perp x$ 轴，

$\therefore S_{\triangle OBC} = \frac{3}{2}$,

$$\therefore S_{\triangle ONP}=3S_{\triangle OBC},$$

$$\therefore S_{\triangle ONP}=,$$

设 P 横坐标为 a ($a > 0$),

$$\therefore ON \cdot a =, \text{ 即 } a =,$$

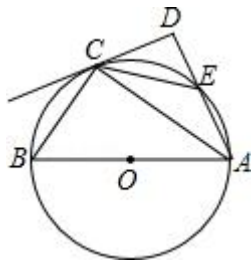
则 P 坐标为 ($, -1$).

点评: 此题属于反比例函数综合题, 涉及的知识有: 待定系数法确定函数解析式, 反比例函数 k 的几何意义, 以及坐标与图形性质, 熟练掌握待定系数法是解本题的关键.

22. (10 分) (2014•莆田) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 是 $\odot O$ 上的一点, 过点 A 作 $AD \perp CD$ 于点 D, 交 $\odot O$ 于点 E, 且 $\widehat{BC} = \widehat{CE}$.

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\tan \angle CAB =$, $BC=3$, 求 DE 的长.



考点: 切线的判定.

专题: 证明题.

分析: (1) 连结 OC, 由 $\widehat{BC} = \widehat{CE}$, 根据圆周角定理得 $\angle 1 = \angle 2$, 而 $\angle 1 = \angle OCA$, 则 $\angle 2 = \angle OCA$, 则可判断 $OC \parallel AD$, 由于 $AD \perp CD$, 所以 $OC \perp CD$, 然后根据切线的判定定理得到 CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 连结 BE 交 OC 于 F, 由 AB 是 $\odot O$ 的直径得 $\angle ACB = 90^\circ$, 在 $Rt\triangle ACB$ 中, 根据正切的定义得 $AC=4$, 再利用勾股定理计算出 $AB=5$, 然后证明 $Rt\triangle ABC \sim Rt\triangle ACD$, 利用相似比先计算出 $AD=\frac{16}{5}$, 再计算出 $CD=\frac{12}{5}$; 根据垂径定理的推论由 $\widehat{BC} = \widehat{CE}$ 得 $OC \perp BE$, $BF=EF$, 于是可判断四边形 DEFC 为矩形, 所以 $EF=CD=\frac{12}{5}$, 则 $BE=2EF=\frac{24}{5}$, 然后在 $Rt\triangle ABE$ 中, 利用勾股定理计算出 $AE=$, 再利用 $DE=AD-AE$

求解.

解答: (1) 证明: 连结 OC, 如图,

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{CE},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore OC = OA,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle OCA,$$

$$\therefore OC \parallel AD,$$

$$\therefore AD \perp CD,$$

$$\therefore OC \perp CD,$$

$$\therefore CD \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线};$$

(2) 解: 连结 BE 交 OC 于 F, 如图,

$$\therefore AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径},$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACB \text{ 中, } \tan \angle CAB = \frac{BC}{AC},$$

$$\text{而 } BC = 3,$$

$$\therefore AC = 4,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \sim \text{Rt}\triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}, \text{ 即 } \frac{4}{AD} = \frac{5}{4}, \text{ 解得 } AD = \frac{16}{5},$$

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AC}, \text{ 即 } \frac{3}{CD} = \frac{5}{4}, \text{ 解得 } CD = \frac{12}{5},$$

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{CE},$$

$$\therefore OC \perp BE, \text{ BF} = \text{EF},$$

$$\therefore \text{四边形 DEFC 为矩形},$$

$$\therefore EF = CD = \frac{12}{5},$$

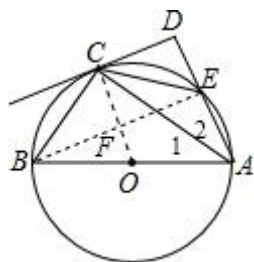
$$\therefore BE=2EF=\frac{24}{5},$$

$\therefore AB$ 为直径,

$\therefore \angle BEA=90^\circ$,

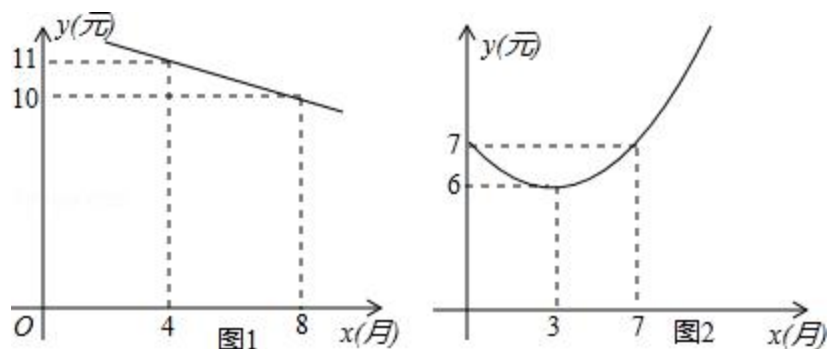
$$\text{在 Rt}\triangle ABE \text{ 中, } AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{5^2-\left(\frac{24}{5}\right)^2}=,$$

$$\therefore DE=AD-AE=\frac{16}{5}-\frac{7}{5}=\frac{9}{5}.$$



点评: 本题考查了切线的判定定理: 经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线. 也考查了圆周角定理和相似三角形的判定与性质.

23. (10 分) (2014•莆田) 某水果店销售某中水果, 由历年市场行情可知, 从第 1 月至第 12 月, 这种水果每千克售价 y_1 (元) 与销售时间第 x 月之间存在如图 1 (一条线段) 的变化趋势, 每千克成本 y_2 (元) 与销售时间第 x 月满足函数关系式 $y_2=mx^2-8mx+n$, 其变化趋势如图 2.



(1) 求 y_2 的解析式;

(2) 第几月销售这种水果, 每千克所获得利润最大? 最大利润是多少?

考点: 二次函数的应用.

分析: (1) 把函数图象经过的点 (3, 6), (7, 7) 代入函数解析式, 解方程组求出 m 、 n 的值, 即可得解;

(2) 根据图 1 求出每千克的售价 y_1 与 x 的函数关系式, 然后根据利润=售价 - 成本得到利润与 x 的函数关系式, 然后整理成顶点式形式, 再根据二次函数的最值问题解答即可.

解答: 解: (1) 由图可知, $y_2=mx^2-8mx+n$ 经过点 $(3, 6)$, $(7, 7)$,

$$\therefore \begin{cases} 9m - 24m + n = 6 \\ 49m - 56m + n = 7 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = \frac{1}{8} \\ n = \frac{63}{8} \end{cases}.$$

$$\therefore y_2 = x^2 - x + \frac{63}{8} \quad (1 \leq x \leq 12);$$

(2) 设 $y_1=kx+b$ ($k \neq 0$),

由图可知, 函数图象经过点 $(4, 11)$, $(8, 10)$,

$$\text{则} \begin{cases} 4k + b = 11 \\ 8k + b = 10 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{4} \\ b = 12 \end{cases},$$

所以, $y_1 = -x + 12$,

所以, 每千克所获得利润 = $(-x + 12) - (x^2 - x + \frac{63}{8})$

$$= -x + 12 - x^2 + x - \frac{63}{8}$$

$$= -x^2 + x + \frac{33}{8}$$

$$= -(x^2 - 6x + 9) + \frac{33}{8}$$

$$= -(x - 3)^2 + \frac{21}{4},$$

$$\therefore - < 0,$$

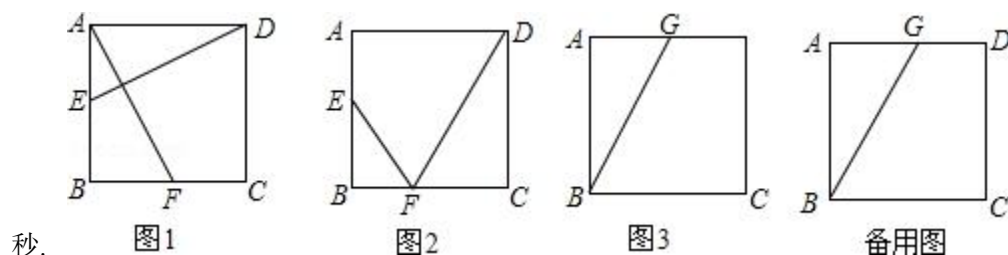
$\therefore$ 当 $x=3$ 时, 所获得利润最大, 为 $\frac{21}{4}$ 元.

答: 第 3 月销售这种水果, 每千克所获得利润最大, 最大利润是 $\frac{21}{4}$ 元/千克.

点评: 本题考查了二次函数的应用, 主要利用了待定系数法求二次函数解析式, 待定系数法求一次函数解析式, 二次函数的最值问题, 难点在于 (2) 整理出利润的表达式并整

理成顶点式形式.

24. (12 分) (2014•莆田) 如图, 在边长为 4 的正方形 ABCD 中, 动点 E 以每秒 1 个单位长度的速度从点 A 开始沿边 AB 向点 B 运动, 动点 F 以每秒 2 个单位长度的速度从点 B 开始沿折线 BC-CD 向点 D 运动, 动点 E 比动点 F 先出发 1 秒, 其中一个动点到达终点时, 另一个动点也随之停止运动, 设点 F 的运动时间为 t



(1) 点 F 在边 BC 上.

①如图 1, 连接 DE, AF, 若 $DE \perp AF$, 求 t 的值;

②如图 2, 连结 EF, DF, 当 t 为何值时, $\triangle EBF$ 与 $\triangle DCF$ 相似?

(2) 如图 3, 若点 G 是边 AD 的中点, BG, EF 相交于点 O, 试探究: 是否存在在某一时刻 t, 使得 $\frac{BO}{OG} = ?$ 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

考点: 四边形综合题.

分析: (1) ①利用正方形的性质及条件, 得出 $\triangle ABF \cong \triangle DAE$, 由 $AE=BF$ 列式计算.

②利用 $\triangle EBF \sim \triangle DCF$, 得出 $\frac{EB}{DC} = \frac{BF}{FC}$, 列出方程求解.

(2) ① $0 < t \leq 2$ 时如图 3, 以点 B 为原点 BC 为 x 轴, BA 为 y 轴建立坐标系, 先求出 EF 所在的直线和 BG 所在的直线函数关系式是, 再利用勾股定理求出 BG, 运用 $\frac{BO}{OG}$, 求出点 O 的坐标把 O 的坐标代入 EF 所在的直线函数关系式求解. ②当 $t > 2$ 时如图 4, 以点 B 为原点 BC 为 x 轴, BA 为 y 轴建立坐标系, 以点 B 为原点 BC 为 x 轴, BA 为 y 轴建立坐标系, 先求出 EF 所在的直线和 BG 所在的直线函数关系式是, 再利用勾股定理求出 BG, 运用 $\frac{BO}{OG}$, 求出点 O 的坐标把 O 的坐标代入 EF 所在的直线函数关系式求解.

解答: 解: (1) ①如图 1

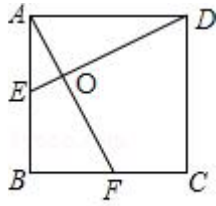


图1

$$\because DE \perp AF,$$

$$\therefore \angle AOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF + \angle AEO = 90^\circ,$$

$$\because \angle ADE + \angle AEO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ADE,$$

又 $\because$ 四边形 ABCD 是正方形,

$$\therefore AE = AD, \angle ABF = \angle DAE = 90^\circ,$$

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle DAE$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle ADE \\ AE = AD \\ \angle ABF = \angle DAE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DAE \text{ (ASA)}$$

$$\therefore AE = BF,$$

$$\therefore 1 + t = 2t,$$

解得 $t = 1$.

②如图 2

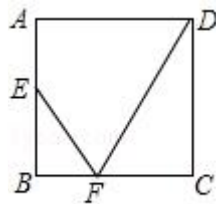


图2

$$\because \triangle EBF \sim \triangle DCF$$

$$\therefore \frac{EB}{DC} = \frac{BF}{FC},$$

$$\because BF = 2t, AE = 1 + t,$$

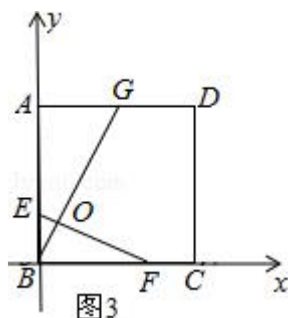
$$\therefore FC = 4 - 2t, BE = 4 - 1 - t = 3 - t,$$

$$\therefore \frac{3 - t}{4} = \frac{2t}{4 - 2t},$$

$$\text{解得, } t = \frac{9 - \sqrt{57}}{2}, t = \frac{9 + \sqrt{57}}{2} \text{ (舍去),}$$

$$\text{故 } t = \frac{9 - \sqrt{57}}{2}.$$

(2) ① $0 < t \leq 2$ 时如图 3, 以点 B 为原点 BC 为 x 轴, BA 为 y 轴建立坐标系,



A 的坐标 $(0, 4)$, G 的坐标 $(2, 4)$, F 点的坐标 $(2t, 0)$, E 的坐标 $(0, 3 - t)$

$$\text{EF 所在的直线函数关系式是: } y = \frac{t-3}{2t}x + 3 - t,$$

$$\text{BG 所在的直线函数关系式是: } y = 2x,$$

$$\therefore BG = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{BO}{OG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BO = \frac{2\sqrt{5}}{3}, OG = \frac{4\sqrt{5}}{3},$$

设 O 的坐标为 (a, b) ,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{20}{9} \\ b = 2a \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$$

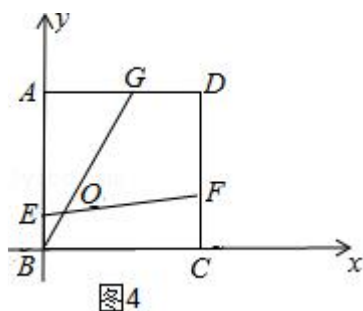
$$\therefore O \text{ 的坐标为 } \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

把 O 的坐标 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ 代入 $y = \frac{t-3}{2t}x + 3 - t$, 得

$$\frac{4}{3} = \frac{t-3}{2t} \cdot \frac{2}{3} + 3 - t,$$

$$\text{解得, } t = \frac{9 + 2\sqrt{15}}{3} \text{ (舍去), } t = \frac{9 - 2\sqrt{15}}{3},$$

② 当 $3 \geq t > 2$ 时如图 4, 以点 B 为原点 BC 为 x 轴, BA 为 y 轴建立坐标系,



A 的坐标 $(0, 4)$, G 的坐标 $(2, 4)$, F 点的坐标 $(4, 2t-4)$, E 的坐标 $(0, 3-t)$

EF 所在的直线函数关系式是: $y = \frac{3t-7}{4}x + 3-t$,

BG 所在的直线函数关系式是: $y = 2x$,

$$\therefore BG = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{BO}{OG} =$$

$$\therefore BO = \frac{2\sqrt{5}}{7}, \quad OG = \frac{12\sqrt{5}}{7},$$

设 O 的坐标为 (a, b) ,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{20}{49} \\ b = 2a \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$\therefore$ O 的坐标为 $(\frac{2}{7}, \frac{4}{7})$

把 O 的坐标为 $(\frac{2}{7}, \frac{4}{7})$ 代入 $y = \frac{3t-7}{4}x + 3-t$, 得

$$= \frac{3t-7}{4}x + 3-t,$$

$$\text{解得: } t = \frac{27}{11}.$$

综上所述, 存在 $t = \frac{9-2\sqrt{15}}{7}$ 或 $t = \frac{27}{11}$, 使得 $\frac{BO}{OG} = \frac{1}{6}$.

点评: 本题主要考查了四边形的综合题, 解题的关键是把四边形与坐标系相结合求解.

25. (14 分) (2014•莆田) 如图, 抛物线 $C_1: y = (x+m)^2$ (m 为常数, $m > 0$), 平移抛物线 $y = -x^2$, 使其顶点 D 在抛物线 C_1 位于 y 轴右侧的图象上, 得到抛物线 C_2 . 抛物线 C_2 交 x 轴于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 交 y 轴于点 C, 设点 D 的横坐标为 a.

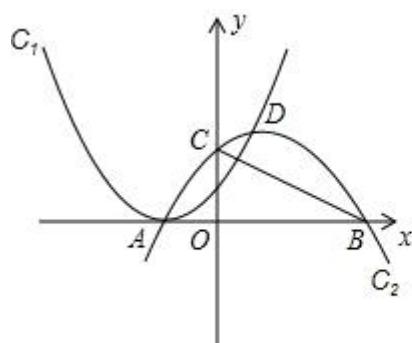


图1

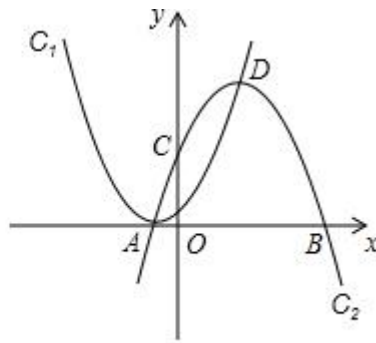


图2

(1) 如图 1, 若 $m=$.

①当 $OC=2$ 时, 求抛物线 C_2 的解析式;

②是否存在 a , 使得线段 BC 上有一点 P , 满足点 B 与点 C 到直线 OP 的距离之和最大且 $AP=BP$? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由;

(2) 如图 2, 当 $OB=2\sqrt{3}-m$ ($0 < m < \sqrt{3}$) 时, 请直接写出到 $\triangle ABD$ 的三边所在直线的距离相等的所有点的坐标 (用含 m 的式子表示).

考点: 二次函数综合题.

分析: (1) ①首先写出平移后抛物线 C_2 的解析式 (含有未知数 a), 然后利用点 $C(0, 2)$ 在 C_2 上, 求出抛物线 C_2 的解析式;

②认真审题, 题中条件“ $AP=BP$ ”意味着点 P 在对称轴上, “点 B 与点 C 到直线 OP 的距离之和最大”意味着 $OP \perp BC$. 画出图形, 如答图 1 所示, 利用三角函数 (或相似), 求出 a 的值;

(2) 解题要点有 3 个:

i) 判定 $\triangle ABD$ 为等边三角形;

ii) 理论依据是角平分线的性质, 即角平分线上的点到角两边的距离相等;

iii) 满足条件的点有 4 个, 即 $\triangle ABD$ 形内 1 个 (内心), 形外 3 个. 不要漏解.

解答: 解: (1) 当 $m=$ 时, 抛物线 $C_1: y = (x+)^2$.

$\therefore$ 抛物线 C_2 的顶点 D 在抛物线 C_1 上, 且横坐标为 a ,

$\therefore D(a, (a+)^2)$.

$\therefore$ 抛物线 $C_2: y = -(x-a)^2 + (a+)^2$ (I).

① $\because OC=2, \therefore C(0, 2)$.

$\therefore$ 点 C 在抛物线 C_2 上,

$$\therefore -(0-a)^2 + (a+)^2 = 2,$$

解得: $a=$, 代入 (I) 式,

得抛物线 C_2 的解析式为: $y = -x^2 + x + 2$.

②在 (I) 式中,

令 $y=0$, 即: $-(x-a)^2 + (a+)^2 = 0$, 解得 $x=2a+$ 或 $x=-$, $\therefore B(2a+, 0)$;

令 $x=0$, 得: $y=a+$, $\therefore C(0, a+)$.

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$, 则有:

$$\begin{cases} k \cdot (2a+\frac{1}{2}) + b = 0 \\ b = a+\frac{1}{4} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = a+\frac{1}{4} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为: $y = -\frac{1}{2}x + (a+\frac{1}{4})$.

假设存在满足条件的 a 值.

$\therefore AP=BP$,

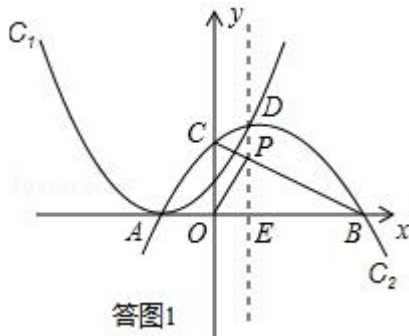
$\therefore$ 点 P 在 AB 的垂直平分线上, 即点 P 在 C_2 的对称轴上;

$\therefore$ 点 B 与点 C 到直线 OP 的距离之和 $\leq BC$, 只有 $OP \perp BC$ 时等号成立,

$\therefore OP \perp BC$.

如答图 1 所示, 设 C_2 对称轴 $x=a$ ($a>0$) 与 BC 交于点 P , 与 x 轴交于点 E ,

则 $OP \perp BC$, $OE=a$.



$\therefore$ 点 P 在直线 BC 上, $\therefore P(a, \frac{1}{2}a+\frac{1}{4})$, $PE=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}$.

$$\therefore \tan \angle EOP = \tan \angle BCO = \frac{OB}{OC} = \frac{2a+\frac{1}{2}}{a+\frac{1}{4}} = 2,$$

$$\therefore \frac{PE}{OE} = \frac{\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}}{a} = 2,$$

$$\text{解得: } a = \frac{1}{6}.$$

$\therefore$ 存在 $a = \frac{1}{6}$, 使得线段 BC 上有一点 P, 满足点 B 与点 C 到直线 OP 的距离之和最大

且 $AP = BP$

(3) $\because$ 抛物线 C_2 的顶点 D 在抛物线 C_1 上, 且横坐标为 a,

$$\therefore D(a, (a+m)^2).$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_2: y = -(x-a)^2 + (a+m)^2.$$

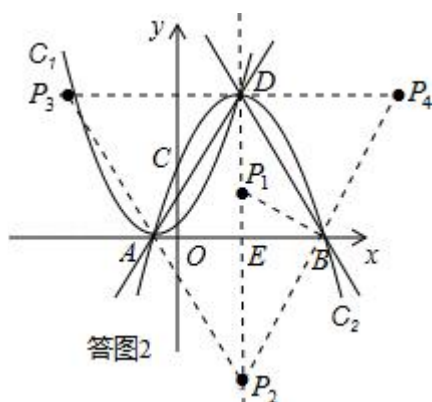
令 $y=0$, 即 $-(x-a)^2 + (a+m)^2 = 0$, 解得: $x_1 = 2a+m$, $x_2 = -m$, $\therefore B(2a+m, 0)$.

$$\therefore OB = 2\sqrt{3} - m, \therefore 2a+m = 2\sqrt{3} - m, \therefore a = \sqrt{3} - m.$$

$$\therefore D(\sqrt{3} - m, 3).$$

$$AB = OB + OA = 2\sqrt{3} - m + m = 2\sqrt{3}.$$

如答图 2 所示, 设对称轴与 x 轴交于点 E, 则 $DE=3$, $BE=AB=\sqrt{3}$, $OE=OB-BE=\sqrt{3}-m$.



$$\therefore \tan \angle ABD = \frac{DE}{BE} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \therefore \angle ABD = 60^\circ.$$

又 $\because AD = BD$, $\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形.

作 $\angle ABD$ 的平分线, 交 DE 于点 P_1 , 则 $P_1E = BE \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$,

$$\therefore P_1(\sqrt{3} - m, 1);$$

在 $\triangle ABD$ 形外, 依次作各个外角的平分线, 它们相交于点 P_2 、 P_3 、 P_4 .

在 $Rt\triangle BEP_2$ 中, $P_2E = BE \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$,

$$\therefore P_2(\sqrt{3} - m, -3);$$

易知 $\triangle ADP_3$ 、 $\triangle BDP_4$ 均为等边三角形， $\therefore DP_3=DP_4=AB=2\sqrt{3}$ ，且 $P_3P_4 \parallel x$ 轴。

$\therefore P_3(-\sqrt{3}-m, 3)$ 、 $P_4(3\sqrt{3}-m, 3)$ 。

综上所述，到 $\triangle ABD$ 的三边所在直线的距离相等的所有点有4个，

其坐标为： $P_1(\sqrt{3}-m, 1)$ ， $P_2(\sqrt{3}-m, -3)$ ， $P_3(-\sqrt{3}-m, 3)$ ， $P_4(3\sqrt{3}-m, 3)$ 。

点评：本题是二次函数压轴题，以平移变换为背景，考查了二次函数、一次函数、三角函数（或相似）、等边三角形、角平分线的性质等知识点，有一定的难度。函数解析式中含有未知数，增大了试题的难度。第（2）问中，解题关键是理解“点B与点C到直线OP的距离之和最大且 $AP=BP$ ”的含义；第（3）问中，满足条件的点P有4个，不要漏解。