

2019 年兰州市中考试题数学

注意事项:

- 1.全卷共 150 分, 考试时间 120 分钟;
- 2.考生必须将姓名、准考证号、座位号等个人信息填(涂)与在答题卡上;
- 3.考生务必将答案直接填(涂)与在答题卡的相应位置。

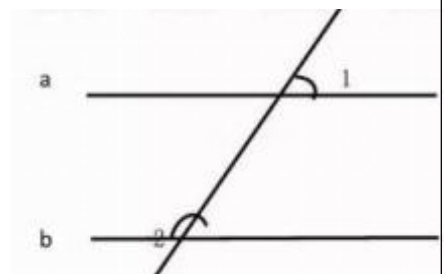
一、选择题 (本大题 12 个小题, 每小题 4 分, 共 48 分, 每小题只有一个正确选项)

1. -2019 的相反数是 ()

- A. $\frac{1}{2019}$ B. 2019 C. -2019 D. $-\frac{1}{2019}$

2.如图, 直线 a, b 被直线 c 所截, $a \parallel b$, $\angle 1 = \angle 80^\circ$, 则 $\angle 2 =$ ()

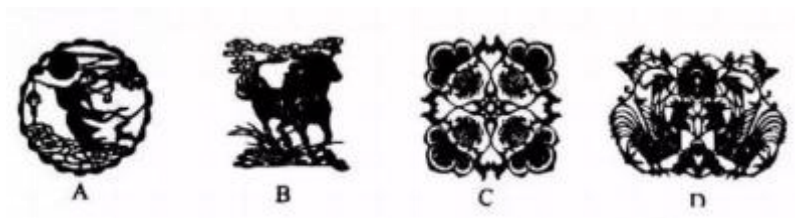
- A. 130° . B. 120° . C. 110° . D. 100° .



3. 计算: $\sqrt{12} - \sqrt{3} =$ ()

- A. $\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 3 . D. $4\sqrt{3}$.

4. 剪纸是中国特有的民间艺术, 在如图所示的四个剪纸图案中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

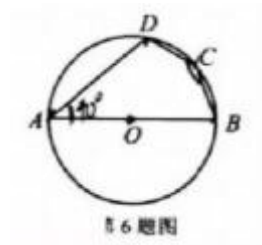


5. $x=1$ 是关于的一元二次方程 $x^2+ax+2b=0$ 的解, 则 $2a+4b=$ ()

- A. -2 . B. -3 . C. 4 . D. -6 .

6. 如图，四边形 ABCD 内接于 $\odot O$ ，若 $\angle A = 40^\circ$ ，则 $\angle C =$ ()

- A. 110° . B. 120° . C. 135° . D. 140° .



7. 化简: $\frac{a^2+1}{a+1} - \frac{2}{a+1} =$ ()

- A. $a-1$. B. $a+1$. C. $\frac{a-1}{a+1}$. D. $\frac{1}{a+1}$.

8. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $AB=8$, $A'B'=6$, 则 $\frac{BC}{B'C'} =$ ()

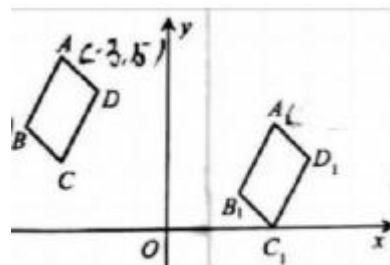
- A. 2. B. $\frac{4}{3}$. C. 3. D. $\frac{16}{9}$.

9. 《九章算术》是中国古代数学著作之一,书中有这样一个问题:五只雀、六只燕共重一斤;雀重燕轻,互换其中一只,恰好一样重.问:每只雀、燕的重量各为多少? 设一只雀的重量为 x 斤,一只燕的重量为 y 斤,则可列方程为 ()

- A. $\begin{cases} 5x+6y=1 \\ 5x-y=6y-x \end{cases}$ B. $\begin{cases} 6x+5y=1 \\ 5x+y=6y+x \end{cases}$ C. $\begin{cases} 5x+6y=1 \\ 4x+y=5y+x \end{cases}$ D. $\begin{cases} 6x+5y=1 \\ 4x-y=5y-x \end{cases}$

10. 如图,平面直角坐标系 xOy 中,将四边形 ABCD 先向下平移,再向右平移得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$, 已知 $A(-3, 5)$, $B(-4, 3)$, $A_1(3, 3)$. 则点 B_1 坐标为 ()

- A. $(1, 2)$ B. $(2, 1)$ C. $(1, 4)$ D. $(4, 1)$



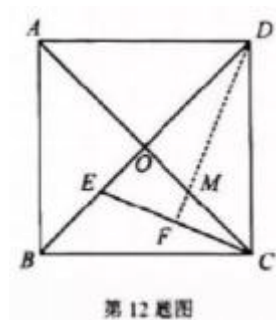
第10题图

11. 已知,点 A (1, y_1), B (2, y_2) 在抛物线 $y = - (x+1)^2 + 2$ 上, 则下列结论正确的是 ()

- A. $2 > y_1 > y_2$ B. $2 > y_2 > y_1$ C. $y_1 > y_2 > 2$ D. $y_2 > y_1 > 2$

12. 如图, 边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 ABCD 的对角线 AC 与 BD 交于点 O, 将正方形 ABCD 沿直线 DF 折叠, 点 C 落在对角线 BD 上的点 E 处, 折痕 DF 交 AC 于点 M, 则 DM = ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{3} - 1$ D. $\sqrt{2} - 1$



第 12 题图

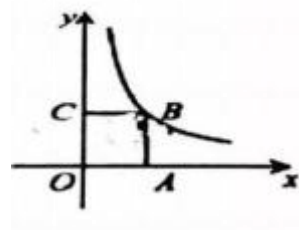
二、填空题 (本大题共 4 个小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

13. 因式分解: $a^3 + 2a^2 + a =$ _____.

【

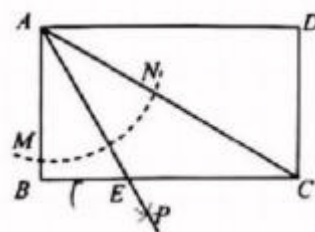
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 40^\circ$, 则 $\angle B =$ _____.

15. 如图, 矩形 OABC 的顶点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象上, $S_{\text{矩形 OABC}} = 6$, 则 $k =$ _____.



第 15 题图

16. 如图, 矩形 ABCD, $\angle BAC = 60^\circ$. 以点 A 为圆心, 以任意长为半径作弧分别交 AB、AC 于点 M、N 两点, 再分别以点 M、N 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧交于点 P, 作射线 AP 交 BC 于点 E, 若 $BE = 1$, 则矩形 ABCD 的面积等于 _____



三、解答题 (本大题共 12 小题, 满分 86 分, 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

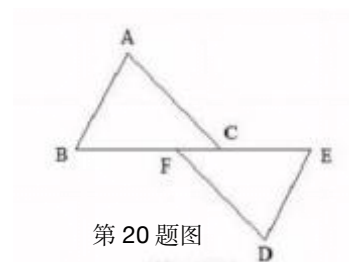
17. (本题 5 分)

计算: $|-2| - (\sqrt{3} + 1)^0 + (-2)^2 - \tan 45^\circ$.

18.(本题 5 分) 化简: $a(1-2a)+2(a+1)(a-1)$

19. (本题 5 分) 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x-1 < x+5 \\ \frac{x+1}{3} < x-1 \end{cases}$$

20. (本题 6 分) 如图, $AB = DE$, $BF = EC$. $\angle B = \angle E$.
求证: $AC \parallel DF$.



21. (本题 6 分) 2019 年 5 月, 以“寻根国学, 传承文明”为主题的兰州市第三届“国学少年强----国学知识挑战赛”总决赛拉开帷幕. 小明晋级了总决赛, 比赛过程分两个环节, 参赛选手须在每个环节中各选择一道题目.

第一环节: 写字注音、成语故事、国学常识、成语接龙 (分别用 A_1, A_2, A_3, A_4 表示);

第二环节: 成语听写、诗词对句、经典通读 (分别用 B_1, B_2, B_3 表示).

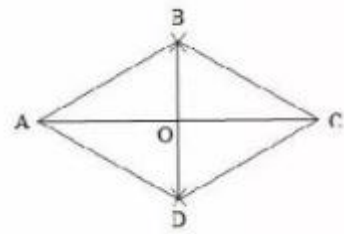
- (1) 请用树状图或列表的方法表示小明参加总决赛抽取题目的所有可能的结果;
- (2) 求小明参加总决赛抽取题目都是成语题目 (成语故事、成语接龙、成语听写) 的概率.

22. (本题 7 分)

如图, $AC=8$, 分别以 A 、 C 为圆心, 以长度 5 为半径作弧, 两弧分别相交于点 B 和 D , 依次连接 A 、 B 、 C 、 D , 连接 BD 交 AC 于点 O .

- (1) 判断四边形 $ABCD$ 的形状并说明理由;

(2) 求 BD 的长.



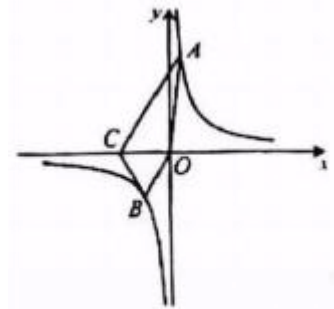
第 22 题图

23. (本题 7 分)

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象，过等边 $\triangle BOC$ 的顶点 B， $OC = 2$ ，点 A 在反比例函数图象上，连接 AC、AO.

(1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的表达式；

(2) 若四边形 ACBO 的面积是 $3\sqrt{3}$ ，求点 A 的坐标.



第 23 题图

24. (本题 7 分)

为了解某校八年级学生一门课程的学习情况，小佳和小丽分别对八年级 1 班和 2 班本门课程的期末成绩进行了调查分析.小佳对八年级 1 班全班学生 (25 名) 的成绩进行分析，过程如下：

表一

分数段 班级	$60 \leq x < 70$	$70 \leq x < 80$	$80 \leq x < 90$	$90 \leq x < 100$
八年级 1 班	7	5	10	3

表二

分数段 班级	平均数	中位数	众数	极差	方差
八年级 1 班	78		85	36	105.28

小丽用同样的方式对八年级 2 班全班学生（25 名）的成绩进行分析，数据如下：

分数段 班级	平均数	中位数	众数	极差	方差
八年级 2 班	75	76	73	44	146.80

根据以上信息，解决下列问题：

（1）已知八年级 1 班学生的成绩处在 $80\leq x < 90$ 这一组的数据如下：

85, 87, 88, 80, 82, 85, 83, 85, 87, 85.

根据上述数据，将表二补充完整；

（2）你认为哪个班级的成绩更为优异？请说明理由.

25 （本题 7 分）某数学课题研究小组针对兰州市住房“如何设计遮阳篷”这一课题进行了探究.过程如下：
问题提出：

如图 1 是某住户上方安装的遮阳篷，要求设计的遮阳篷既能最大限度地遮挡夏天炎热的阳光，又能最大限度地使冬天温暖的阳光射入室内.

方案设计：

如图 2，该数学课题研究小组通过调查研究设计了垂直了墙面 AC 的遮阳篷 CD.

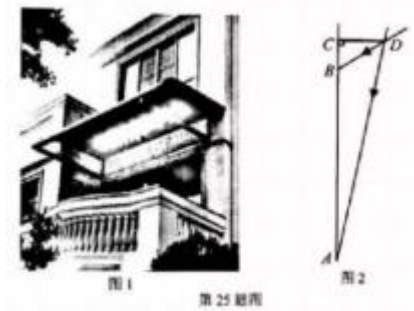
数据收集：

通过查阅相关资料和实际测量：兰州市一年中，夏至这一天的正午时刻，太阳光线 DA 与遮阳篷 CD 的夹角 $\angle ADC$ 最大 ($\angle ADC = 77.44^{\circ}$)；冬至这一天的正午时刻，太阳光线 DB 与遮阳篷 CD 的夹角 $\angle BDC$ 最小 ($\angle BDC = 30.56^{\circ}$)；窗户的高度 $AB = 2\text{m}$.

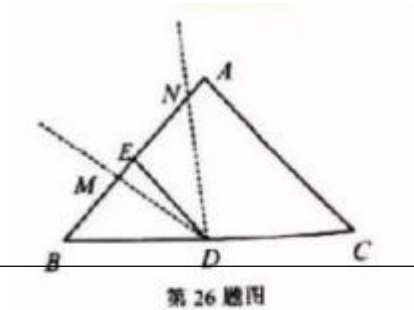
问题解决：

根据上述方案及数据，求遮阳篷 CD 的长.

（结果精确到 0.1m，参考数据： $\sin 30.56^{\circ} \approx 0.51$, $\cos 30.56^{\circ} \approx 0.86$, $\tan 30.56^{\circ} \approx 0.59$, $\sin 77.44^{\circ} \approx 0.98$, $\cos 77.44^{\circ} \approx 0.22$, $\tan 77.44^{\circ} \approx 4.49$ ）.



26. （本题 9 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 6\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, 点 D 为 BC 的



中点, $BE = DE$. 将 $\angle BDE$ 绕点 D 顺时针旋转 a 度 ($0^\circ \leq a \leq 83^\circ$). 角的两边分别交直线 AB 于 M 、 N 两点. 设 B 、 M 两点间的距离为 x cm, M 、 N 两点间的距离为 y cm.

小涛根据学习函数的经验, 对函数 y 随自变量 x 的变化而变化的规律进行了探究, 下面是小涛的探究过程. 请补充完整.

(1) 列表: 下表的已知数据是根据 B 、 M 两点间的距离 x 进行取点、画图、测量, 分别得到了 y 与 x 的几组对应值:

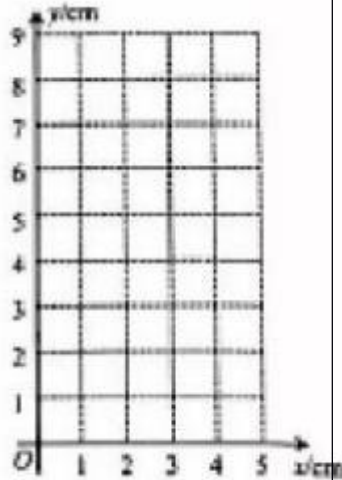
x/cm	0	0.30	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	$\frac{8}{3}$	3.00	3.50	3.68	3.81	3.90	3.93	4.10
y/cm		2.88	2.81	2.69	2.67	2.80	3.15		3.85	5.24	6.01	6.71	7.27	7.41	8.87

请你通过计算, 补全表格.

(2) 描点、连线: 在平面直角坐标系 xoy 中, 描出表中各组数值所对应的点 (x, y) . 并画出函数 y 关于 x 的图象:

(3) 探究性质: 随着自变量 x 的不断增大, 函数 y 的变化趋势_____.

(4) 解决问题: 当 $MN = 2BM$ 时, BM 的长度大约是_____cm (保留两位小数).



主要学习

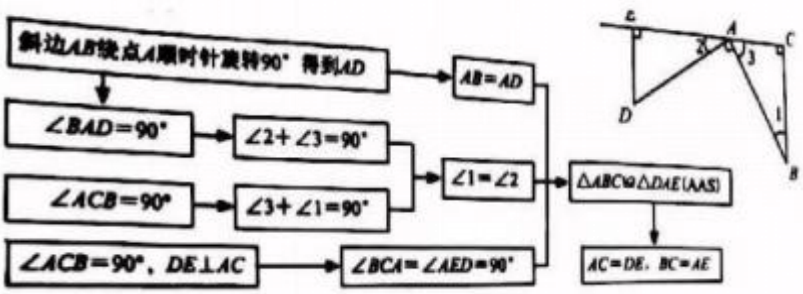
通过对下面数学模型的研究学习, 解决第 27 题、第 28 题

【模型呈现】

如右图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 将斜边 AB 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 AD , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , 可以推理得到 $\triangle ABC \cong \triangle DAE$, 进而得到 $AC = DE$, $BC = AE$.

我们把这个数学模型称为 “K 型”

推理过程如下:



【模型应用】

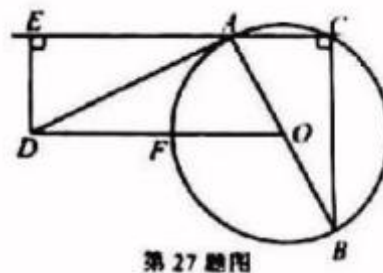
27. (本题 10 分) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 2$. 将斜边 AB 绕点 A 顺时针旋转一定角度

得到 AD, 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E, $\angle DAE = \angle ABC$, $DE = 1$, 连接 DO 交 $\odot O$ 于点 F.

(1) 求证: AD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 连接 FC 交 AB 于点 G, 连接 FB,

求证: $FG^2 = GO \cdot GB$.



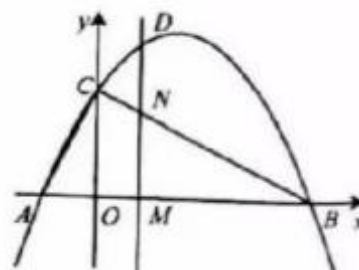
28.(本题 12 分)二次函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 的图象交 x 轴于点 A (-1, 0), 点 B (4, 0) 两点, 交 y 轴于点 C. 动点 M 从点 A 出发, 以每秒 2 个单位长度的速度沿 AB 方向运动, 过点 M 作 $MN \perp x$ 轴交直线 BC 于点 N, 交抛物线于点 D, 连接 AC, 设运动的时间为 t 秒.

(1) 求二次函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 的表达式;

(2) 连接 BD, 当 $t = \frac{3}{2}$ 时, 求 $\triangle DNB$ 的面积;

(3) 在直线 MN 上存在一点 P, 当 $\triangle PBC$ 是以 $\angle BPC$ 为直角的等腰直角三角形时, 求此时点 D 的坐标;

(4) 当 $t = \frac{5}{4}$ 时, 在直线 MN 上存在一点 Q, 使得 $\angle AQC + \angle QAC = 90^\circ$, 求点 Q 的坐标.



- 1.全卷共 150 分，考试时间 120 分钟；
- 2.考生必须将姓名、准考证号、座位号等个人信息填（涂）与在答题卡上；
- 3.考生务必将答案直接填（涂）与在答题卡的相应位置。

一、选择题（本大题 12 个小题，每小题 4 分，共 48 分，每小题只有一个正确选项）

1. -2019 的相反数是（ ）

- A. $\frac{1}{2019}$ B. 2019 C. -2019 D. $-\frac{1}{2019}$

【答案】B.

【考点】相反数的定义.

【考察能力】运算求解能力

【难度】简单

【解析】 $-(-2019) = 2019$

2.如图，直线 a, b 被直线 c 所截， $a \parallel b$ ， $\angle 1 = \angle 80^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ （ ）

- A. 130° . B. 120° . C. 110° . D. 100° .

【答案】D.

【考点】平行线的性质.

【考察能力】识图运算能力

【难度】容易

【解析】 $\because \angle 1 = 80^\circ$,

$\therefore \angle 1$ 的对顶角为 80° ,

又 $\because a \parallel b$, $\therefore \angle 1$ 的对顶角和 $\angle 2$ 互补,

$\therefore \angle 2 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$,

答案为 D.

3. 计算： $\sqrt{12} - \sqrt{3} =$ （ ）

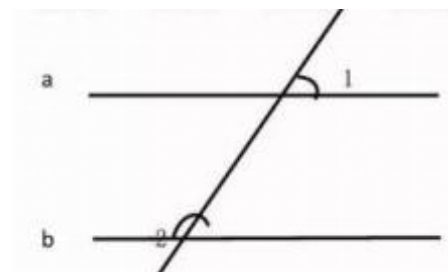
- A. $\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 3 . D. $4\sqrt{3}$.

【答案】A.

【考点】平方根的运算.

【考察能力】运算求解能力

【难度】简单



第 2 题图

【解析】 $\sqrt{12} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

4. 剪纸是中国特有的民间艺术，在如图所示的四个剪纸图案中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【答案】C.

【考点】轴对称图形和中心对称图形

【考察能力】观察能力

【难度】容易

【解析】轴对称图形关于某条直线对称，可以排除 A、B，中心对称图形是图形绕某一点旋转 180° 后与原图形重合的图形排除 D.

故选 C.

5. $x=1$ 是关于的一元二次方程 $x^2+ax+2b=0$ 的解，则 $2a+4b=$ （ ）

A. -2 . B. -3 . C. 4 . D. -6 .

【答案】A.

【考点】一元二次方程的解，整式运算

【考察能力】运算求解能力

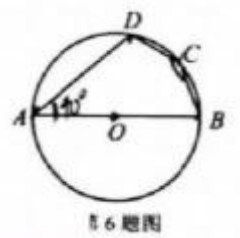
【难度】简单

【解析】将 $x=1$ 代入方程 $x^2+ax+2b=0$ ，得 $a+2b=-1$ ， $2a+4b=2(a+2b)=2 \times (-1) = -2$.

故选 A.

6. 如图，四边形 ABCD 内接于 $\odot O$ ，若 $\angle A = 40^\circ$ ，则 $\angle C =$ （ ）

A. 110° . B. 120° . C. 135° . D. 140° .



【答案】D.

【考点】圆内接四边形的性质.

【考察能力】运算求解能力和观察识图能力

【难度】容易

【解析】 $\because$ 四边形 ABCD 内接于 $\odot O$ ， $\angle A = 40^\circ$ ，
 $\therefore \angle C = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$,

故选 D.

7. 化简： $\frac{a^2+1}{a+1} - \frac{2}{a+1} =$ （ ）

A. $a-1$. B. $a+1$. C. $\frac{a-1}{a+1}$. D. $\frac{1}{a+1}$.

【答案】A.

【考点】分式计算.

【考察能力】运算求解能力.

【难度】简单

【解析】 $\frac{a^2+1}{a+1} - \frac{2}{a+1} = \frac{a^2+1-2}{a+1} = \frac{(a+1)(a-1)}{a+1} = a-1$.

故选 A.

8. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $AB=8$, $A'B'=6$, 则 $\frac{BC}{B'C'} =$ ()

A. 2. B. $\frac{4}{3}$. C. 3. D. $\frac{16}{9}$.

【答案】B.

【考点】相似三角形的性质.

【考察能力】运算求解能力.

【难度】容易

【解析】 $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$\text{又} \because AB=8, A'B'=6,$$

$$\therefore \frac{BC}{B'C'} = \frac{4}{3}.$$

故选 B.

9. 《九章算术》是中国古代数学著作之一,书中有这样一个问题:五只雀、六只燕共重一斤;雀重燕轻,互换其中一只,恰好一样重.问:每只雀、燕的重量各为多少?设一只雀的重量为 x 斤,一只燕的重量为 y 斤,则可列方程为 ()

A. $\begin{cases} 5x+6y=1 \\ 5x-y=6y-x \end{cases}$ B. $\begin{cases} 6x+5y=1 \\ 5x+y=6y+x \end{cases}$ C. $\begin{cases} 5x+6y=1 \\ 4x+y=5y+x \end{cases}$ D. $\begin{cases} 6x+5y=1 \\ 4x-y=5y-x \end{cases}$

【答案】C.

【考点】利用方程求解实际问题.

【考察能力】抽象概括能力.

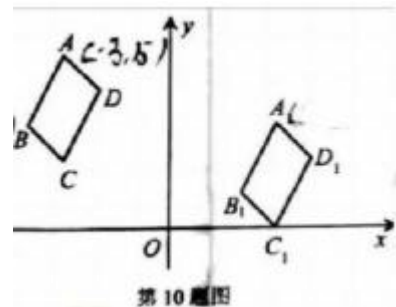
【难度】中等

【解析】根据题目条件找出等量关系并列方程: (1) 五只雀和六只燕共重一斤, 列出方程: $5x+6y=1$
(2) 互换其中一只, 恰好一样重, 即四只雀和一只燕的重量等于五只燕一只雀的重量, 列出方程:

$$4x+y=5y+x,$$

故选 C.

10. 如图, 平面直角坐标系 xOy 中, 将四边形 $ABCD$ 先向下平移, 再向右平移得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$, 已知 $A(-3, 5)$, $B(-4, 3)$, $A_1(3, 3)$. 则点 B_1 坐标为 ()



- A. $(1, 2)$ B. $(2, 1)$ C. $(1, 4)$ D. $(4, 1)$

【答案】B.

【考点】图形的平移.

【考察能力】识图能力和计算能力

【难度】简单

【解析】图形向下平移, 纵坐标发生变化, 图形向右平移, 横坐标发生变化. $A(-3, 5)$ 到 $A_1(3, 3)$ 得向右平移 $3 - (-3) = 6$ 个单位, 向下平移 $5 - 3 = 2$ 个单位. 所以 $B(-4, 3)$ 平移后 $B_1(2, 1)$.

故选 B.

11. 已知, 点 $A(1, y_1)$, $B(2, y_2)$ 在抛物线 $y = -(x+1)^2 + 2$ 上, 则下列结论正确的是 ()

- A. $2 > y_1 > y_2$ B. $2 > y_2 > y_1$ C. $y_1 > y_2 > 2$ D. $y_2 > y_1 > 2$

【答案】A.

【考点】二次函数顶点式以及二次函数的性质.

【考察能力】空间想象能力, 运算求解能力.

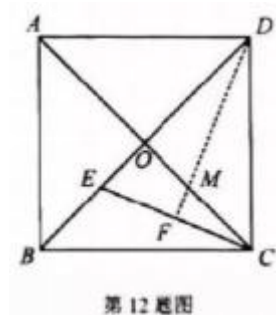
【难度】较难

【解析】根据二次函数顶点式得到函数的开口向下, 对称轴为直线 $x = -1$, 顶点坐标 $(-1, 2)$, 根据函数增减性可以得到, 当 $x > -1$ 时, y 随 x 的增大而减小. 因为 $-1 < 1 < 2$, 所以 $2 > y_1 > y_2$.

故选 A.

12. 如图, 边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O , 将正方形 $ABCD$ 沿直线 DF 折叠, 点 C 落在对角线 BD 上的点 E 处, 折痕 DF 交 AC 于点 M , 则 $DM =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{3} - 1$ D. $\sqrt{2} - 1$



【答案】D.

【考点】正方形的性质, 折叠的性质, 相似三角形的性质与判定, 角平分线的性质.

【考察能力】空间想象能力, 推理论证能力, 运算求解能力.

【难度】较难

【解析】过点 M 作 $MP \perp CD$ 垂足为 P , 过点 O 作 $OQ \perp CD$ 垂足为 Q ,

$\therefore$ 正方形的边长为 $\sqrt{2}$,

$\therefore OD = 1, OC = 1, OQ = DQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 由折叠可知, $\angle EDF = \angle CDF$.

又 $\because AC \perp BD, \therefore OM = PM$,

设 $OM = PM = x$

$\because OQ \perp CD, MP \perp CD$

$\therefore \angle OQC = \angle MPC = 90^\circ, \angle PCM = \angle QCO$,

$\therefore \triangle CMP \sim \triangle COQ$

$\therefore \frac{MP}{OQ} = \frac{CM}{CO}, \text{ 即 } \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-x}{1}, \text{ 解得 } x = \sqrt{2} - 1$

$\therefore OM = PM = \sqrt{2} - 1$.

故选 D.

二、填空题 (本大题共 4 个小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

13. 因式分解: $a^3 + 2a^2 + a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $a(a+1)^2$.

【考点】 因式分解.

【考察能力】 运算求解能力.

【难度】 简单

【解析】 $a^3 + 2a^2 + a = a(a^2 + 2a + 1) = a(a+1)^2$.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC, \angle A = 40^\circ$, 则 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 70° .

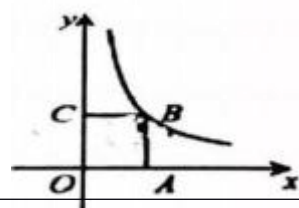
【考点】 等腰三角形性质.

【考察能力】 空间想象能力.

【难度】 容易

【解析】 $\because AB = AC, \angle A = 40^\circ,$
 $\therefore \angle B = \angle C = 70^\circ$.

15. 如图, 矩形 OABC 的顶点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上, $S_{\text{矩形 OABC}} = 6$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】6.

【考点】k 的几何意义.

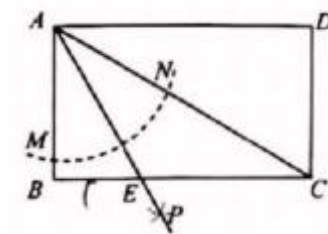
【考察能力】数形结合.

【难度】简单

【解析】 $|k| = S_{\text{矩形} OABC} = 6$, $\therefore$ 图象在第一象限, $\therefore k > 0$, $\therefore k = 6$.

第 15 题图

16. 如图, 矩形 ABCD, $\angle BAC = 60^\circ$. 以点 A 为圆心, 以任意长为半径作弧分别交 AB、AC 于点 M、N 两点, 再分别以点 M、N 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧交于点 P, 作射线 AP 交 BC 于点 E, 若 $BE = 1$, 则矩形 ABCD 的面积等于_____.



第 16 题图

【答案】 $3\sqrt{3}$.

【考点】尺规作图, 矩形的性质.

【考察能力】基础运算能力, 空间想象能力, 推理论证能力..

【难度】难.

【解析】由题可知 AP 是 $\angle BAC$ 的角平分线

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ$$

$$\therefore \angle BAE = \angle EAC = 30^\circ$$

$$\therefore AE = 2 BE = 2.$$

$$\therefore AB = \sqrt{3}$$

$$\therefore \angle AEB = 60^\circ$$

$$\text{又} \therefore \angle AEB = \angle EAC + \angle ECA$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ECA = 30^\circ$$

$$\therefore AE = EC = 2$$

$$\therefore BC = 3$$

$$\therefore S_{\text{矩形} ABCD} = 3\sqrt{3}.$$

三、解答题 (本大题共 12 小题, 满分 86 分, 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本题 5 分)

计算: $|-2| - (\sqrt{3}+1)^0 + (-2)^2 - \tan 45^\circ$.

【答案】4.

【考点】实数的计算.

【考察能力】运算求解能力.

【难度】简单.

【解析】解: 原式 $= 2 - 1 + 4 - 1 = 4$.

18.(本题 5 分) 化简: $a(1-2a)+2(a+1)(a-1)$

【答案】 $a-2$.

【考点】代数式的化简.

【考察能力】运算求解能力.

【难度】简单.

【解析】解: $a(1-2a)+2(a+1)(a-1)$

$$= a - 2a^2 + 2a^2 - 2$$

$$= a - 2.$$

19. (本题 5 分) 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x-1 < x+5 & \text{①} \\ \frac{x+1}{3} < x-1 & \text{②} \end{cases}$$

【答案】 $2 < x < 6$.

【考点】不等式组的解法.

【考察能力】计算能力.

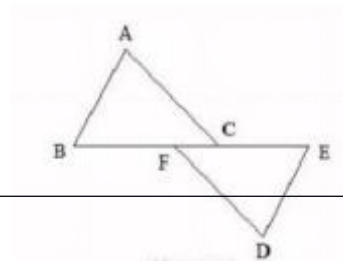
【难度】中等.

【解析】解:
$$\begin{cases} 2x-1 < x+5 & \text{①} \\ \frac{x+1}{3} < x-1 & \text{②} \end{cases}$$

由①得: $x < 6$

由②得: $x > 2$

所以原不等式组的解集为: $2 < x < 6$.



20. (本题 6 分) 如图, $AB = DE$, $BF = EC$. $\angle B = \angle E$.
 求证: $AC \parallel DF$.

第 20 题图

【答案】 $AC \parallel DF$.
 【考点】 三角形的全等.
 【考察能力】 推理论证能力.
 【难度】 简单.

【解析】 证明: $\because BF = EC$
 $\therefore BF + CF = EC + CF$
 $\therefore BC = EF$
 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle B = \angle E \\ BC = EF \end{cases}$$

 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (SAS)$
 $\therefore \angle ACB = \angle EFD$
 $\therefore AC \parallel DF$.

21. (本题 6 分) 2019 年 5 月, 以“寻根国学, 传承文明”为主题的兰州市第三届“国学少年强——国学知识挑战赛”总决赛拉开帷幕. 小明晋级了总决赛, 比赛过程分两个环节, 参赛选手须在每个环节中各选择一道题目.

- 第一环节: 写字注音、成语故事、国学常识、成语接龙 (分别用 A_1, A_2, A_3, A_4 表示);
 第二环节: 成语听写、诗词对句、经典通读 (分别用 B_1, B_2, B_3 表示).
 (1) 请用树状图或列表的方法表示小明参加总决赛抽取题目的所有可能的结果;
 (2) 求小明参加总决赛抽取题目都是成语题目 (成语故事、成语接龙、成语听写) 的概率.

【答案】 解: (1) 12 种.
 (2) $\frac{1}{6}$.

【考点】 概率与统计.
 【考察能力】 推理论证能力.
 【难度】 简单.

【解析】 (1) 解:

$\begin{matrix} \text{二} \\ \text{一} \end{matrix}$	B_1	B_2	B_3
A_1	A_1B_1	A_1B_2	A_1B_3
A_2	A_2B_1	A_2B_2	A_2B_3
A_3	A_3B_1	A_3B_2	A_3B_3

A_4	A_4B_1	A_4B_2	A_4B_3
-------	----------	----------	----------

(2) 小明参加总决赛抽取题目都是成语题目的概率为: $P(\text{抽取题目都是成语题目}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

22. (本题 7 分)

如图, $AC=8$, 分别以 A 、 C 为圆心, 以长度 5 为半径作弧, 两弧分别相交于点 B 和 D , 依次连接 A 、 B 、 C 、 D , 连接 BD 交 AC 于点 O .

(1) 判断四边形 $ABCD$ 的形状并说明理由;

(2) 求 BD 的长.

【答案】(1) 菱形, (2) $BD=6$.

【考点】菱形的判定, 垂直平分线的应用.

【考察能力】推理论证能力, 运算求解能力.

【难度】中等.

【解析】证明: (1) 由图可知, BD 垂直平分 AC , 且 $AB=BC=CD=AD=5$, 所以四边形 $ABCD$ 是菱形.

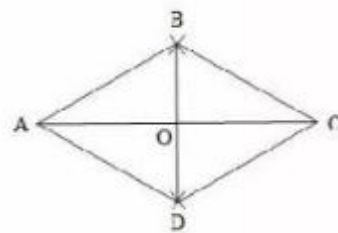
(2) $\because AC=8$, $BD \perp AC$ 且 BD 平分 AC ,

$\therefore OA=OC=4$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AOB$ 中, $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$\therefore BD = 2OB = 2 \times 3 = 6$

$\therefore BD$ 的长为 6.



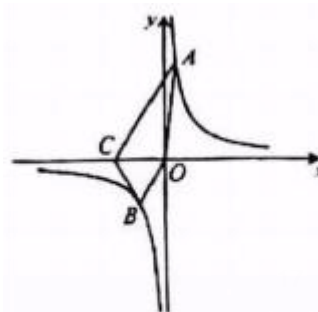
第 22 题图

23. (本题 7 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象, 过等边 $\triangle BOC$ 的顶点 B , $OC=2$, 点 A 在反比例函数图象上, 连接 AC 、 AO .

(1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的表达式;

(2) 若四边形 $ACBO$ 的面积是 $3\sqrt{3}$, 求点 A 的坐标.



第 23 题图

【答案】(1) $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$; (2) A $(\frac{1}{2}, 2\sqrt{3})$

【考点】反比例函数解析式，不规则图形面积.

【考察能力】运算求解能力，推理论证能力.

【难度】中等.

【解析】 解：(1) $\because OC = 2$,

$$\therefore OM = 1, \quad BM = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } B(-1, -\sqrt{3}),$$

$$\therefore k = (-1) \times (-\sqrt{3}) = \sqrt{3},$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{x}.$$

$$(2) \because S_{ACBO} = 3\sqrt{3}, \quad S_{ACBO} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = \frac{\sqrt{3}}{4} OC^2 = \sqrt{3},$$

$$\therefore \sqrt{3} + S_{\triangle AOC} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle AOC} = 2\sqrt{3}.$$

$$\because OC = 2$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times OC \times AN = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore AN = 2\sqrt{3}$$

$$\text{设 } A(t, 2\sqrt{3})$$

$$\therefore 2\sqrt{3}t = \sqrt{3}$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore A\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{3}\right).$$

24. (本题 7 分)

为了解某校八年级学生一门课程的学习情况，小佳和小丽分别对八年级 1 班和 2 班本门课程的期末成绩进行了调查分析.小佳对八年级 1 班全班学生 (25 名) 的成绩进行分析，过程如下：

分数段 班级	$60 \leq x < 70$	$70 \leq x < 80$	$80 \leq x < 90$	$90 \leq x < 100$
八年级 1 班	7	5	10	3

表二

分数段 班级	平均数	中位数	众数	极差	方差
八年级 1 班	78		85	36	105.28

小丽用同样的方式对八年级 2 班全班学生（25 名）的成绩进行分析，数据如下：

表三

分数段 班级	平均数	中位数	众数	极差	方差
八年级 2 班	75	76	73	44	146.80

根据以上信息，解决下列问题：

(1) 已知八年级 1 班学生的成绩处在 $80 \leq x < 90$ 这一组的数据如下：

85, 87, 88, 80, 82, 85, 83, 85, 87, 85.

根据上述数据，将表二补充完整；

(2) 你认为哪个班级的成绩更为优异？请说明理由.

【答案】(1) 80. (2) 八年级 1 班更为优异.

【考点】统计，数据的集中程度和离散程度.

【考察能力】运算求解能力，数据处理能力.

【难度】中等.

【解析】 (1)

表二

分数段 班级	平均数	中位数	众数	极差	方差
八年级 1 班	78	80	85	36	105.28

(2) 八年级 1 班更为优异.理由如下：可以从平均数、中位数、众数、方差等角度分析，理由合理即可.

25 (本题 7 分) 某数学课题研究小组针对兰州市住房“如何设计遮阳篷”这一课题进行了探究.过程如下：

问题提出:

如图 1 是某住户上方安装的遮阳篷, 要求设计的遮阳篷既能最大限度地遮挡夏天炎热的阳光, 又能最大限度地使冬天温暖的阳光射入室内.

方案设计:

如图 2, 该数学课题研究小组通过调查研究设计了垂直了墙面 AC 的遮阳篷 CD.

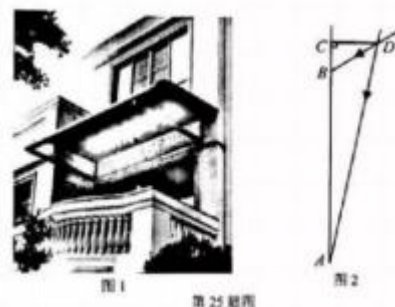
数据收集:

通过查阅相关资料和实际测量: 兰州市一年中, 夏至这一天的正午时刻, 太阳光线 DA 与遮阳篷 CD 的夹角 $\angle ADC$ 最大 ($\angle ADC = 77.44^\circ$); 冬至这一天的正午时刻, 太阳光线 DB 与遮阳篷 CD 的夹角 $\angle BDC$ 最小 ($\angle BDC = 30.56^\circ$); 窗户的高度 $AB = 2\text{m}$.

问题解决:

根据上述方案及数据, 求遮阳篷 CD 的长.

(结果精确到 0.1m, 参考数据: $\sin 30.56^\circ \approx 0.51$, $\cos 30.56^\circ \approx 0.86$, $\tan 30.56^\circ \approx 0.59$, $\sin 77.44^\circ \approx 0.98$, $\cos 77.44^\circ \approx 0.22$, $\tan 77.44^\circ \approx 4.49$).



【答案】0.5m.

【考点】三角函数及其应用.

【考察能力】运算求解能力, 实际应用能力.

【难度】中等

【解析】在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\angle BCD = 90^\circ$, $\angle BDC = 30.56^\circ$,

$$\therefore \tan \angle BDC = \frac{BC}{CD},$$

$$\therefore BC = CD \cdot \tan \angle BDC,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle ACD = 90^\circ$, $\angle ADC = 77.44^\circ$,

$$\therefore \tan \angle ADC = \frac{AC}{CD},$$

$$\therefore AC = CD \cdot \tan \angle ADC,$$

$$\therefore AC - BC = AB,$$

$$\therefore CD \cdot \tan \angle ADC - CD \cdot \tan \angle BDC = 2$$

$$\text{即 } CD \cdot \tan 77.44^\circ - CD \cdot \tan 30.56^\circ = 2$$

$$(4.49 - 0.59) CD = 2$$

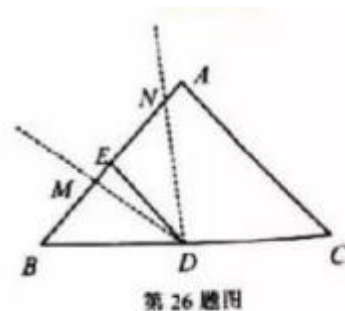
$$\therefore CD = 0.5$$

答: 遮阳篷 CD 长为 0.5m.

26. (本题 9 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 6\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, 点 D 为 BC 的中点, $BE = DE$. 将 $\angle BDE$ 绕点 D 顺时针旋转 a 度 ($0^\circ \leq a \leq 83^\circ$). 角的两边分别交直线 AB 于 M、N 两点. 设 B、M 两点间的距离为 $x\text{cm}$, M、N 两点间的距离为 $y\text{cm}$.

小涛根据学习函数的经验, 对函数 y 随自变量 x 的变化而变化的规律进行了探究, 下面是小涛的探究过程. 请补充完整.

(1) 列表: 下表的已知数据是根据 B、M 两点间的距离 x 进行取点、画图、测量, 分别得到了 y 与 x 的几组对应值:



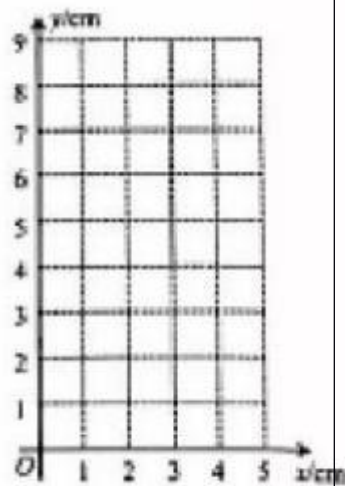
x/cm	0	0.30	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	$\frac{8}{3}$	3.00	3.50	3.68	3.81	3.90	3.93	4.10
y/cm		2.88	2.81	2.69	2.67	2.80	3.15		3.85	5.24	6.01	6.71	7.27	7.41	8.87

请你通过计算，补全表格.

(2) 描点、连线：在平面直角坐标系 xOy 中，描出表中各组数值所对应的点 (x, y) ，并画出函数 y 关于 x 的图象：

(3) 探究性质：随着自变量 x 的不断增大，函数 y 的变化趋势_____.

(4) 解决问题：当 $MN = 2BM$ 时， BM 的长度大约是_____cm (保留两位小数).



【答案】 (1)

x/cm	0	0.30	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	$\frac{8}{3}$	3.00	3.50	3.68	3.81	3.90	3.93	4.10
y/cm	3	2.88	2.81	2.69	2.67	2.80	3.15	$\frac{10}{3}$	3.85	5.24	6.01	6.71	7.27	7.41	8.87

(2) 图略 (描点可得)

(3) 随着自变量 x 的不断增大，函数 y 呈现先减小再增大的趋势.

(4) 4 和 1.33

【考点】函数图象性质，三角形相似.

【考察能力】数据处理分析能力

【难度】难

【解析】 (1) 当 $x=0$ 时， M 点与 N 点分别和 B 点 E 点重合 $MN = BE = 3$

当 $x = \frac{8}{3}$ 时，假设 DN 交 CA 的延长线于点 H

$\because AB = AC,$

$\therefore \angle B = \angle C,$

又 $\because D$ 为 BC 的中点， $BE = DE.$

$\therefore \angle B = \angle EDB,$ ED 为 AC 边的中位线

根据旋转性质

$\angle B = \angle EDB = \angle C = \angle MDN,$

$\therefore \angle NDB = \angle H + \angle C$ (外角性质)

$\angle NDB = \angle MDB + \angle MDN,$

$\therefore \angle MDB + \angle MDN = \angle H + \angle C$

$$\begin{aligned} \therefore \angle MDB &= \angle H, \quad \angle B = \angle C, \\ \therefore \triangle MDB &\sim \triangle DHC \\ \therefore \frac{CH}{BD} &= \frac{DC}{BM}, \\ \therefore \frac{CH}{4} &= \frac{4}{\frac{8}{3}}, \quad CH = 6 = AC \quad \text{即 A 点与 H 点重合} \end{aligned}$$

$$\therefore MN = 6 - BM = \frac{10}{3}.$$

(2) 根据表格描点可得.

(3) 根据图象可得

$$(4) \because MN = 2BM$$

$$\text{设 } BM = x, \quad MN = 2x,$$

$$EN = 3x - 3, \quad AN = 6 - 3x,$$

$$\because \angle NDB = \angle H + \angle C (\text{外角性质})$$

$$\angle NDB = \angle MDB + \angle MDN,$$

$$\therefore \angle MDB + \angle MDN = \angle H + \angle C$$

$$\therefore \angle MDB = \angle H, \quad \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \triangle MDB \sim \triangle DHC$$

$$\therefore \frac{CH}{BD} = \frac{DC}{BM},$$

$$\therefore \frac{CH}{4} = \frac{4}{x}, \quad \therefore CH = \frac{16}{x}, \quad HA = HC - AC = \frac{16}{x} - 6$$

$$\text{又 } \because \triangle HAN \sim \triangle DEN$$

$$\therefore \frac{AH}{ED} = \frac{AN}{NE},$$

$$\therefore \frac{\frac{16}{x} - 6}{3} = \frac{6 - 3x}{3x - 3}, \quad \text{解得: } x_1 = 4, \quad x_2 = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

答: BM 为 4 或 1.33.

主要学习

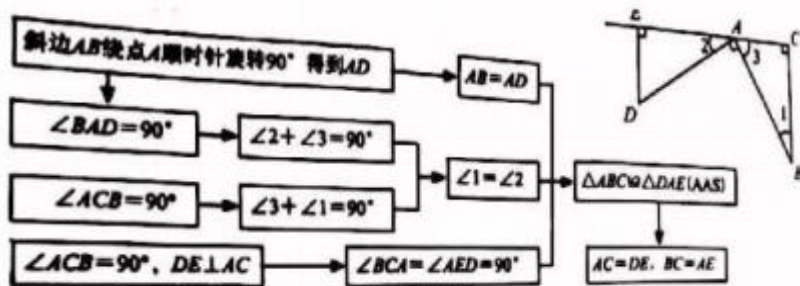
通过对下面数学模型的研究学习, 解决第 27 题、第 28 题

【模型呈现】

如右图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 将斜边 AB 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 AD , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , 可以推理得到 $\triangle ABC \cong \triangle DAE$, 进而得到 $AC = DE$, $BC = AE$.

我们把这个数学模型称为“K 型”

推理过程如下：



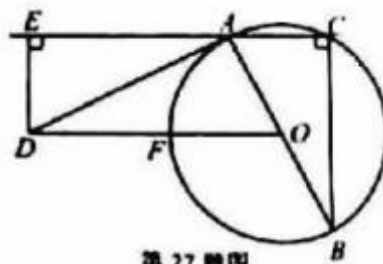
【模型应用】

27. (本题 10 分) 如图, Rt $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 2$. 将斜边 AB 绕点 A 顺时针旋转一定角度得到 AD , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , $\angle DAE = \angle ABC$, $DE = 1$, 连接 DO 交 $\odot O$ 于点 F .

(1) 求证: AD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 连接 FC 交 AB 于点 G , 连接 FB ,

求证: $FG^2 = GO \cdot GB$.



第 27 题图

【答案】答案见解析.

【考点】三角形相似, 圆切线证明.

【考察能力】推理论证能力, 运算求解能力

【难度】较难

【解析】 (1) 证明: $\because \angle DAE = \angle ABC$ 且 $\angle ABC + \angle CAB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle EAD + \angle CAB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle DAB = 90^\circ$,
 $\because AO$ 为 $\odot O$ 的半径,
 $\therefore AD$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 证明: 由 (1) 知 $\angle DAB = 90^\circ$,
 $\because AC = 1, BC = 2$

$$\therefore AB = \sqrt{5},$$

由模型可知, $\triangle AED \cong \triangle BCA$,

$$\therefore AD = \sqrt{5},$$

$$\therefore AO = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \therefore DO = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{DO} = \frac{DE}{AO} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle DAO$$

$$\therefore \angle EAD = \angle ADO$$

$$\therefore AE \parallel DO$$

$$\therefore \angle ACF = \angle CFO = \angle ABF$$

$$\begin{aligned} \because \angle FGO &= \angle BGF, \\ \therefore \triangle FGO &\sim \triangle BGF \\ \therefore \frac{FG}{BG} &= \frac{GO}{FG} \\ \therefore FG^2 &= GO \cdot GB. \end{aligned}$$

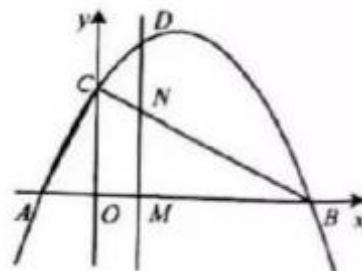
28.(本题 12 分)二次函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 的图象交 x 轴于点 $A(-1, 0)$, 点 $B(4, 0)$ 两点, 交 y 轴于点 C . 动点 M 从点 A 出发, 以每秒 2 个单位长度的速度沿 AB 方向运动, 过点 M 作 $MN \perp x$ 轴交直线 BC 于点 N , 交抛物线于点 D , 连接 AC , 设运动的时间为 t 秒.

(1) 求二次函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 的表达式;

(2) 连接 BD , 当 $t = \frac{3}{2}$ 时, 求 $\triangle DNB$ 的面积;

(3) 在直线 MN 上存在一点 P , 当 $\triangle PBC$ 是以 $\angle BPC$ 为直角的等腰直角三角形时, 求此时点 D 的坐标;

(4) 当 $t = \frac{5}{4}$ 时, 在直线 MN 上存在一点 Q , 使得 $\angle AQC + \angle QAC = 90^\circ$, 求点 Q 的坐标.



【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$.

(2) 2

(3) $D(1, 3)$

(4) $Q(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ 或 $Q(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$

【考点】二次函数的综合应用.

【考察能力】运算求解能力、推理论证能力、空间想象能力.

【难度】困难

【解析】(1) 将点 $A(-1, 0)$, 点 $B(4, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 2$ 中, 得:

$$\begin{cases} a - b + 2 = 0 \\ 16a + 4b + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

所以, 二次函数的表达式为: $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$.

(2) $\because t = \frac{3}{2},$

$\therefore AM = 3,$

又 $\because OA = 1, \therefore OM = 2,$

设 BC 的解析式为: $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 将点 $C(0, 2)$ 、 $B(4, 0)$ 代入, 得:

$$\begin{cases} b = 2 \\ 4k + b = 0 \end{cases} \quad \text{解得:} \quad \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

所以直线 BC 的解析式为: $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

将 $x = 2$ 分别代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ 和 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 中, 得: D (2, 3)、N (2, 1)

$$\therefore DN = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle DNB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2.$$

(3) 过点 P 作 x 轴的平行线, 交 y 轴于点 E, 过点 B 作 y 轴的平行线, 交 EP 的延长线于点 F, 设

D (m, $-\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2$)、E (0, n)、P (m, n)、F (4, n), 由题意得:

$$\triangle PEC \cong \triangle BFP,$$

$$\therefore PE = BF, \quad CE = PF$$

$$\therefore \begin{cases} 4 - m = 2 - n \\ -n = m \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} m = 1 \\ n = -1 \end{cases}$$

所以, 点 D 的坐标为: (1, 3).

(4) 当 $t = \frac{5}{4}$ 时, $AM = \frac{5}{2}$, 此时 M 点在二次函数的对称轴上,

以 M 点为圆心, AM 长为半径作圆, 交 MN 于 Q_1 、 Q_2 两点,

$$\therefore C (0, 2), \quad M \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$\therefore CM = \frac{5}{2} = R,$$

$\therefore$ C 点在该圆上

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB + \angle CBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CQ_1A = \angle CAB, \quad (\text{同弧所对的圆周角})$$

$$\therefore \angle CQ_1A + \angle CBA = 90^\circ,$$

$$\angle CQ_2A + \angle CBA = 90^\circ,$$

$$\therefore Q \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ 或 } Q \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$