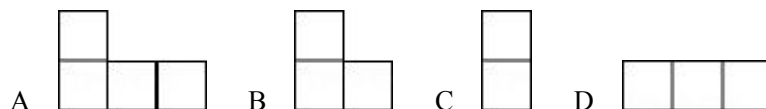
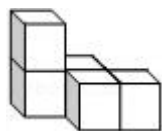


2016 年甘肃省兰州市中考数学试卷 (A 卷)

一、选择题

1. (4 分) (2016•兰州) 如图是由 5 个大小相同的正方体组成的几何体, 则该几何体的主视图是 ()



2. (4 分) (2016•兰州) 反比例函数是 $y = \frac{2}{x}$ 的图象在 ()

A. 第一、二象限 B. 第一、三象限 C. 第二、三象限 D. 第二、四象限

3. (4 分) (2016•兰州) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 $\frac{3}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 对应中线的比为 ()

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{9}{16}$ D. $\frac{16}{9}$

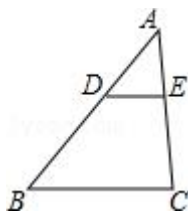
4. (4 分) (2016•兰州) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{3}{5}$, $BC = 6$, 则 $AB =$ ()

A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

5. (4 分) (2016•兰州) 一元二次方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 的根的情况 ()

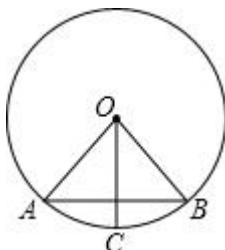
A. 有一个实数根 B. 有两个相等的实数根
C. 有两个不相等的实数根 D. 没有实数根

6. (4 分) (2016•兰州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, 若 $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$, 则 $\frac{AE}{EC} =$ ()



A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{5}$

7. (4 分) (2016•兰州) 如图, 在 $\odot O$ 中, 若点 C 是 $\widehat{AB}$ 的中点, $\angle A = 50^\circ$, 则 $\angle BOC =$ ()



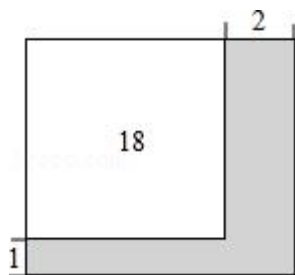
A. 40° B. 45° C. 50° D. 60°

8. (4分) (2016•兰州) 二次函数 $y=x^2-2x+4$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式, 下列正确的是 ()

A. $y=(x-1)^2+2$ B. $y=(x-1)^2+3$

C. $y=(x-2)^2+2$ D. $y=(x-2)^2+4$

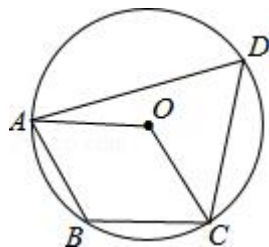
9. (4分) (2016•兰州) 公园有一块正方形的空地, 后来从这块空地上划出部分区域栽种鲜花 (如图), 原空地一边减少了 1m , 另一边减少了 2m , 剩余空地的面积为 18m^2 , 求原正方形空地的边长. 设原正方形的空地的边长为 $x\text{m}$, 则可列方程为 ()



A. $(x+1)(x+2)=18$ B. $x^2-3x+16=0$

C. $(x-1)(x-2)=18$ D. $x^2+3x+16=0$

10. (4分) (2016•兰州) 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 若四边形 $ABCO$ 是平行四边形, 则 $\angle ADC$ 的大小为 ()

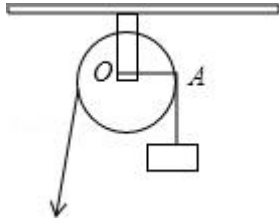


A. 45° B. 50° C. 60° D. 75°

11. (4分) (2016•兰州) 点 $P_1(-1, y_1)$, $P_2(3, y_2)$, $P_3(5, y_3)$ 均在二次函数 $y=-x^2+2x+c$ 的图象上, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()

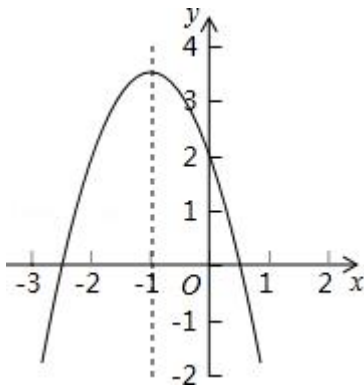
A. $y_3 > y_2 > y_1$ B. $y_3 > y_1 = y_2$ C. $y_1 > y_2 > y_3$ D. $y_1 = y_2 > y_3$

12. (4分) (2016•兰州) 如图, 用一个半径为 5cm 的定滑轮带动重物上升, 滑轮上一点 P 旋转了 108° , 假设绳索 (粗细不计) 与滑轮之间没有滑动, 则重物上升了 ()



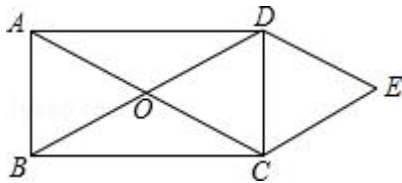
- A. πcm B. $2\pi \text{cm}$ C. $3\pi \text{cm}$ D. $5\pi \text{cm}$

13. (4分) (2016•兰州) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示, 对称轴是直线 $x=-1$, 有以下结论: ① $abc > 0$; ② $4ac < b^2$; ③ $2a+b=0$; ④ $a-b+c > 2$. 其中正确的结论的个数是 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

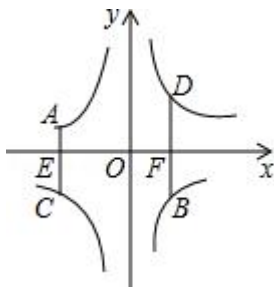
14. (4分) (2016•兰州) 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $CE \parallel BD$, $DE \parallel AC$, $AD=2\sqrt{3}$, $DE=2$, 则四边形 $OCED$ 的面积 ()



- A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. $4\sqrt{3}$ D. 8

15. (4分) (2016•兰州) 如图, A , B 两点在反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}$ 的图象上, C , D 两点在反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象上, $AC \perp x$ 轴于点 E , $BD \perp x$ 轴于点 F , $AC=2$, $BD=3$, $EF=\frac{10}{3}$, 则

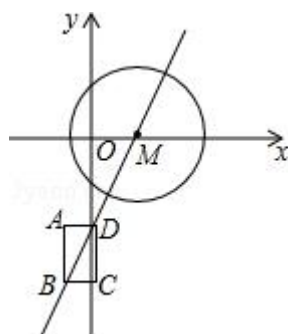
$k_2 - k_1 =$ ()



- A. 4 B. $\frac{14}{3}$ C. $\frac{16}{3}$ D. 6

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

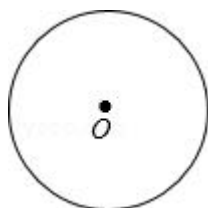
16. (4 分) (2016•兰州) 二次函数 $y=x^2+4x-3$ 的最小值是_____.
17. (4 分) (2016•兰州) 一个不透明的口袋里装有若干除颜色外其他完全相同的小球, 其中有 6 个黄球, 将口袋中的球摇匀, 从中任意摸出一个球记下颜色后再放回, 通过大量重复上述实验后发现, 摸到黄球的频率稳定在 30%, 由此估计口袋中共有小球_____个.
18. (4 分) (2016•兰州) 双曲线 $y=\frac{m-1}{x}$ 在每个象限内, 函数值 y 随 x 的增大而增大, 则 m 的取值范围是_____.
19. (4 分) (2016•兰州) $\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 且 $AC \perp BD$, 请添加一个条件: _____, 使得 $\square ABCD$ 为正方形.
20. (4 分) (2016•兰州) 对于一个矩形 $ABCD$ 及 $\odot M$ 给出如下定义: 在同一平面内, 如果矩形 $ABCD$ 的四个顶点到 $\odot M$ 上一点的距离相等, 那么称这个矩形 $ABCD$ 是 $\odot M$ 的“伴侣矩形”. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: y=\sqrt{3}x-3$ 交 x 轴于点 M , $\odot M$ 的半径为 2, 矩形 $ABCD$ 沿直线运动 (BD 在直线 l 上), $BD=2$, $AB \parallel y$ 轴, 当矩形 $ABCD$ 是 $\odot M$ 的“伴侣矩形”时, 点 C 的坐标为_____.



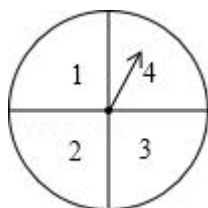
三、解答题 (共 8 小题, 满分 70 分, 解答时写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

21. (10 分) (2016•兰州) (1) $\sqrt{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2\cos 45^\circ - (\pi - 2016)^0$
- (2) $2y^2 + 4y = y + 2$.

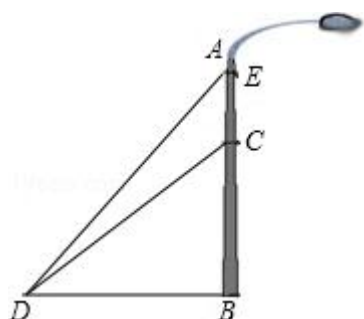
22. (5 分) (2016•兰州) 如图, 已知 $\odot O$, 用尺规作 $\odot O$ 的内接正四边形 $ABCD$. (写出结论, 不写作法, 保留作图痕迹, 并把作图痕迹用黑色签字笔描黑)



23. (6 分) (2016•兰州) 小明和小军两人一起做游戏, 游戏规则如下: 每人从 1, 2, ..., 8 中任意选择一个数字, 然后两人各转动一次如图所示的转盘 (转盘被分为面积相等的四个扇形), 两人转出的数字之和等于谁事先选择的数, 谁就获胜; 若两人转出的数字之和不等于他们各自选择的数, 就在做一次上述游戏, 直至决出胜负. 若小军事先选择的数是 5, 用列表或画树状图的方法求他获胜的概率.



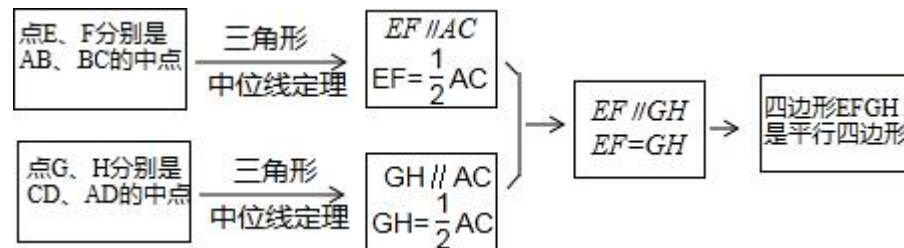
24. (7 分) (2016•兰州) 如图, 一垂直于地面的灯柱 AB 被一钢筋 CD 固定, CD 与地面成 45° 夹角 ($\angle CDB=45^\circ$), 在 C 点上方 2 米处加固另一条钢线 ED , ED 与地面成 53° 夹角 ($\angle EDB=53^\circ$), 那么钢线 ED 的长度约为多少米? (结果精确到 1 米, 参考数据: $\sin 53^\circ \approx 0.80$, $\cos 53^\circ \approx 0.60$, $\tan 53^\circ \approx 1.33$)



25. (10 分) (2016•兰州) 阅读下面材料:

在数学课上, 老师请同学思考如下问题: 如图 1, 我们把一个四边形 $ABCD$ 的四边中点 E , F , G , H 依次连接起来得到的四边形 $EFGH$ 是平行四边形吗?

小敏在思考问题是, 有如下思路: 连接 AC .



结合小敏的思路作答

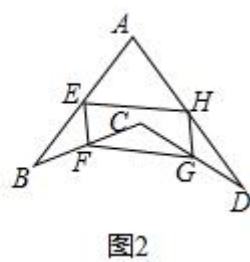
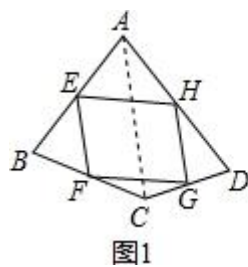
(1) 若只改变图 1 中四边形 $ABCD$ 的形状 (如图 2), 则四边形 $EFGH$ 还是平行四边形吗?

说明理由; 参考小敏思考问题方法解决一下问题:

(2) 如图 2, 在 (1) 的条件下, 若连接 AC , BD .

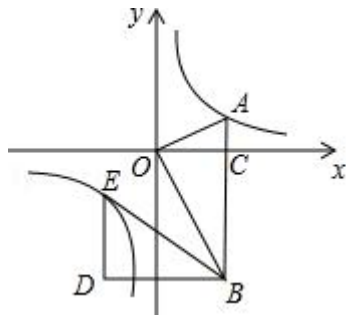
①当 AC 与 BD 满足什么条件时, 四边形 $EFGH$ 是菱形, 写出结论并证明;

②当 AC 与 BD 满足什么条件时, 四边形 $EFGH$ 是矩形, 直接写出结论.



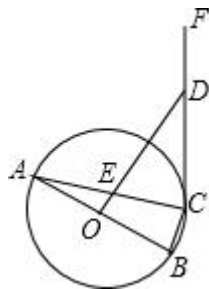
26. (10 分) (2016•兰州) 如图, 在平面直角坐标系中, $OA \perp OB$, $AB \perp x$ 轴于点 C , 点 $A(\sqrt{3}, 1)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上.

- (1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的表达式;
- (2) 在 x 轴的负半轴上存在一点 P , 使得 $S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOB}$, 求点 P 的坐标;
- (3) 若将 $\triangle BOA$ 绕点 B 按逆时针方向旋转 60° 得到 $\triangle BDE$. 直接写出点 E 的坐标, 并判断点 E 是否在该反比例函数的图象上, 说明理由.



27. (10 分) (2016•兰州) 如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, AB 是 $\odot O$ 的直径, $OD \perp AB$ 于点 O , 分别交 AC 、 CF 于点 E 、 D , 且 $DE=DC$.

- (1) 求证: CF 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 若 $\odot O$ 的半径为 5, $BC = \sqrt{10}$, 求 DE 的长.

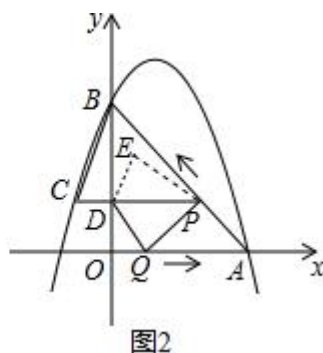
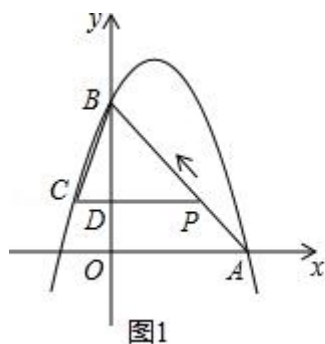


28. (12 分) (2016•兰州) 如图 1, 二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象过点 A (3, 0), B (0, 4) 两点, 动点 P 从 A 出发, 在线段 AB 上沿 A→B 的方向以每秒 2 个单位长度的速度运动, 过点 P 作 $PD \perp y$ 于点 D, 交抛物线于点 C. 设运动时间为 t (秒).

(1) 求二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的表达式;

(2) 连接 BC, 当 $t = \frac{5}{6}$ 时, 求 $\triangle BCP$ 的面积;

(3) 如图 2, 动点 P 从 A 出发时, 动点 Q 同时从 O 出发, 在线段 OA 上沿 O→A 的方向以 1 个单位长度的速度运动. 当点 P 与 B 重合时, P、Q 两点同时停止运动, 连接 DQ, PQ, 将 $\triangle DPQ$ 沿直线 PC 折叠得到 $\triangle DPE$. 在运动过程中, 设 $\triangle DPE$ 和 $\triangle OAB$ 重合部分的面积为 S, 直接写出 S 与 t 的函数关系及 t 的取值范围.

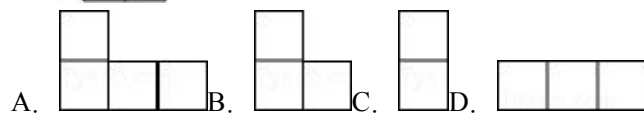
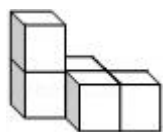


2016 年甘肃省兰州市中考数学试卷 (A 卷)

参考答案与试题解析

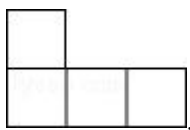
一、选择题

1. (4 分) (2016•兰州) 如图是由 5 个大小相同的正方体组成的几何体, 则该几何体的主视图是 ()



【分析】由已知条件可知, 主视图有 3 列, 每列小正方形数目分别为 2, 1, 1, 据此得出图形, 从而求解.

【解答】解: 观察图形可知, 该几何体的主视图是



故选: A.

【点评】本题考查由三视图判断几何体, 简单组合体的三视图. 由几何体的俯视图及小正方形内的数字, 可知主视图的列数与俯视图的列数相同, 且每列小正方形数目为俯视图该列小正方形数字中的最大数字. 左视图的列数与俯视图的行数相同, 且每列小正方形数目为俯视图相应行中正方形数字中的最大数字.

2. (4 分) (2016•兰州) 反比例函数是 $y = \frac{2}{x}$ 的图象在 ()

A. 第一、二象限 B. 第一、三象限 C. 第二、三象限 D. 第二、四象限

【分析】直接根据反比例函数的性质进行解答即可.

【解答】解: $\because$ 反比例函数是 $y = \frac{2}{x}$ 中, $k=2 > 0$,

$\therefore$ 此函数图象的两个分支分别位于一、三象限.

故选 B.

【点评】 本题考查的是反比例函数的性质，熟知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq 0$) 的图象是双曲线；

当 $k>0$ ，双曲线的两支分别位于第一、第三象限，在每一象限内 y 随 x 的增大而减小是解答此题的关键.

3. (4 分) (2016•兰州) 已知 $\triangle ABC\sim\triangle DEF$ ，若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 $\frac{3}{4}$ ，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 对应中线的比为 ()

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{9}{16}$ D. $\frac{16}{9}$

【分析】 根据相似三角形的对应中线的比等于相似比解答.

【解答】 解： $\because \triangle ABC\sim\triangle DEF$ ， $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 $\frac{3}{4}$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 对应中线的比为 $\frac{3}{4}$ ，

故选： A.

【点评】 本题考查的是相似三角形的性质，相似三角形周长的比等于相似比；相似三角形面积的比等于相似比的平方；相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比.

4. (4 分) (2016•兰州) 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\sin A=\frac{3}{5}$ ， $BC=6$ ， 则 $AB=$ ()

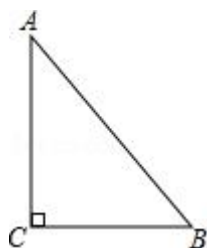
A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

【分析】 在直角三角形 ABC 中，利用锐角三角函数定义表示出 $\sin A$ ，将 $\sin A$ 的值与 BC 的长代入求出 AB 的长即可.

【解答】 解： 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$ ， $BC=6$ ，

$$\therefore AB=\frac{BC}{\sin A}=\frac{6}{\frac{3}{5}}=10,$$

故选 D



【点评】此题考查了解直角三角形，熟练掌握锐角三角函数定义是解本题的关键.

5. (4分) (2016•兰州) 一元二次方程 $x^2+2x+1=0$ 的根的情况 ()

- A. 有一个实数根 B. 有两个相等的实数根
C. 有两个不相等的实数根 D. 没有实数根

【分析】先求出 Δ 的值，再根据 $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根； $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数； $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根，进行判断即可.

【解答】解： $\because \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$,

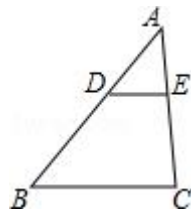
$\therefore$ 一元二次方程 $x^2+2x+1=0$ 有两个相等的实数根；

故选 B.

【点评】此题主要考查了一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：

- (1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；
(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；
(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

6. (4分) (2016•兰州) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ，若 $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$ ，则 $\frac{AE}{EC} = ()$



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{5}$

【分析】直接利用平行线分线段成比例定理写出答案即可.

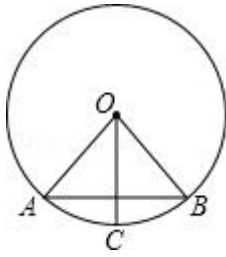
【解答】解： $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3},$$

故选 C.

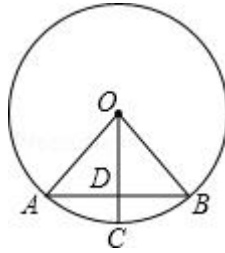
【点评】本题考查了平行线分线段成比例定理，了解定理的内容是解答本题的关键，属于基础定义或定理，难度不大.

7. (4分) (2016•兰州) 如图，在 $\odot O$ 中，若点 C 是 $\widehat{AB}$ 的中点， $\angle A = 50^\circ$ ，则 $\angle BOC = ()$



A. 40° B. 45° C. 50° D. 60°

【分析】根据等腰三角形性质和三角形内角和定理求出 $\angle AOB$ ，根据垂径定理求出 $AD=BD$ ，根据等腰三角形性质得出 $\angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB$ ，代入求出即可．



【解答】解： $\because \angle A = 50^\circ$ ， $OA = OB$ ，

$$\therefore \angle OBA = \angle OAB = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ,$$

$\because$ 点 C 是 $\widehat{AB}$ 的中点， OC 过 O，

$$\therefore OA = OB,$$

$$\therefore \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = 40^\circ,$$

故选 A.

【点评】本题考查了圆心角、弧、弦之间的关系，垂径定理，等腰三角形的性质的应用，注意：在同圆或等圆中，两个圆心角、两条弧、两条弦，其中有一对相等，那么其余两对也相等．

8. (4 分) (2016•兰州) 二次函数 $y = x^2 - 2x + 4$ 化为 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式，下列正确的是 ()

A. $y = (x - 1)^2 + 2$ B. $y = (x - 1)^2 + 3$ C. $y = (x - 2)^2 + 2$ D. $y = (x - 2)^2 + 4$

【分析】根据配方法，可得顶点式函数解析式．

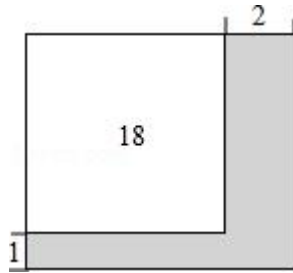
【解答】解： $y = x^2 - 2x + 4$ 配方，得

$$y = (x - 1)^2 + 3,$$

故选： B.

【点评】 本题考查了二次函数的形式你，配方法是解题关键.

9. (4分) (2016•兰州) 公园有一块正方形的空地，后来从这块空地上划出部分区域栽种鲜花(如图)，原空地一边减少了1m，另一边减少了2m，剩余空地的面积为 18m^2 ，求原正方形空地的边长. 设原正方形的空地的边长为 $x\text{m}$ ，则可列方程为 ()



- A. $(x+1)(x+2)=18$ B. $x^2-3x+16=0$ C. $(x-1)(x-2)=18$ D. $x^2+3x+16=0$

【分析】 可设原正方形的边长为 $x\text{m}$ ，则剩余的空地长为 $(x-1)\text{m}$ ，宽为 $(x-2)\text{m}$. 根据长方形的面积公式方程可列出.

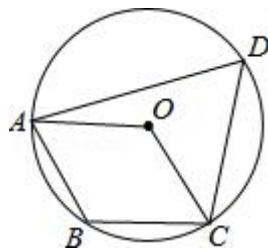
【解答】 解：设原正方形的边长为 $x\text{m}$ ，依题意有

$$(x-1)(x-2)=18,$$

故选 C.

【点评】 本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程的知识，应熟记长方形的面积公式. 另外求得剩余的空地的长和宽是解决本题的关键.

10. (4分) (2016•兰州) 如图，四边形ABCD内接于 $\odot O$ ，若四边形ABCO是平行四边形，则 $\angle ADC$ 的大小为 ()



- A. 45° B. 50° C. 60° D. 75°

【分析】 设 $\angle ADC$ 的度数= α ， $\angle ABC$ 的度数= β ，由题意可得
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ \\ \alpha = \frac{1}{2} \beta \end{cases}$$
，求出 β 即可

解决问题.

【解答】 解：设 $\angle ADC$ 的度数= α ， $\angle ABC$ 的度数= β ;

∵ 四边形 ABCO 是平行四边形,

∴ $\angle ABC = \angle AOC$;

∵ $\angle ADC = \frac{1}{2}\beta$, $\angle AOC = \alpha$; 而 $\alpha + \beta = 180^\circ$,

$$\therefore \begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ \\ \alpha = \frac{1}{2}\beta \end{cases},$$

解得: $\beta = 120^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$,

故选 C.

【点评】 该题主要考查了圆周角定理及其应用问题; 应牢固掌握该定理并能灵活运用.

11. (4 分) (2016•兰州) 点 $P_1(-1, y_1)$, $P_2(3, y_2)$, $P_3(5, y_3)$ 均在二次函数 $y = -x^2 + 2x + c$ 的图象上, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()

A. $y_3 > y_2 > y_1$ B. $y_3 > y_1 = y_2$ C. $y_1 > y_2 > y_3$ D. $y_1 = y_2 > y_3$

【分析】 根据函数解析式的特点, 其对称轴为 $x=1$, 图象开口向下, 在对称轴的右侧, y 随 x 的增大而减小, 据二次函数图象的对称性可知, $P_1(-1, y_1)$ 与 $(3, y_1)$ 关于对称轴对称, 可判断 $y_1 = y_2 > y_3$.

【解答】 解: $\because y = -x^2 + 2x + c$,

∴ 对称轴为 $x=1$,

$P_2(3, y_2)$, $P_3(5, y_3)$ 在对称轴的右侧, y 随 x 的增大而减小,

∴ $3 < 5$,

∴ $y_2 > y_3$,

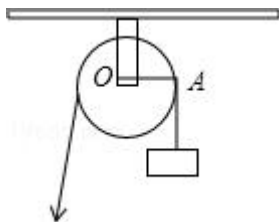
根据二次函数图象的对称性可知, $P_1(-1, y_1)$ 与 $(3, y_1)$ 关于对称轴对称,

故 $y_1 = y_2 > y_3$,

故选 D.

【点评】 本题考查了函数图象上的点的坐标与函数解析式的关系, 同时考查了函数的对称性及增减性.

12. (4 分) (2016•兰州) 如图, 用一个半径为 5cm 的定滑轮带动重物上升, 滑轮上一点 P 旋转了 108° , 假设绳索 (粗细不计) 与滑轮之间没有滑动, 则重物上升了 ()



A. π cm B. 2π cm C. 3π cm D. 5π cm

【分析】根据定滑轮的性质得到重物上升的即为转过的弧长，利用弧长公式计算即可.

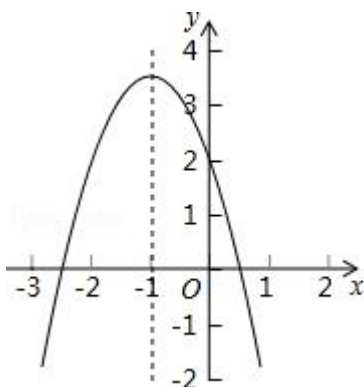
【解答】解：根据题意得： $l = \frac{108\pi \times 5}{180} = 3\pi$ cm,

则重物上升了 3π cm,

故选 C

【点评】此题考查了旋转的性质，以及弧长公式，熟练掌握旋转的性质是解本题的关键.

13. (4 分) (2016•兰州) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，对称轴是直线 $x = -1$ ，有以下结论：① $abc > 0$ ；② $4ac < b^2$ ；③ $2a + b = 0$ ；④ $a - b + c > 2$. 其中正确的结论的个数是 ()



A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】由抛物线开口方向得到 $a < 0$ ，由抛物线的对称轴方程得到 $b = 2a < 0$ ，由抛物线与 y 轴的交点位置得到 $c > 0$ ，则可对①进行判断；根据抛物线与 x 轴交点个数得到 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，则可对②进行判断；利用 $b = 2a$ 可对③进行判断；利用 $x = -1$ 时函数值为正数可对④进行判断.

【解答】解：∵ 抛物线开口向下，

∴ $a < 0$,

∵ 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = -1$,

∴ $b = 2a < 0$,

∵ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方,

$$\therefore c > 0,$$

∴ $abc > 0$, 所以①正确;

∵ 抛物线与 x 轴有 2 个交点,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0, \text{ 所以②正确;}$$

$$\therefore b = 2a,$$

$$\therefore 2a - b = 0, \text{ 所以③错误;}$$

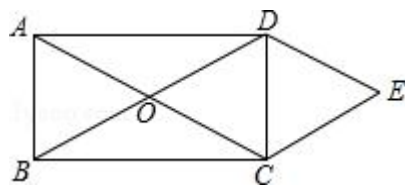
∵ 抛物线开口向下, $x = -1$ 是对称轴, 所以 $x = -1$ 对应的 y 值是最大值,

$$\therefore a - b + c > 2, \text{ 所以④正确.}$$

故选 C.

【点评】 本题考查了二次函数图象与系数的关系: 对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小: 当 $a > 0$ 时, 抛物线向上开口; 当 $a < 0$ 时, 抛物线向下开口; 一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置: 当 a 与 b 同号时 (即 $ab > 0$), 对称轴在 y 轴左; 当 a 与 b 异号时 (即 $ab < 0$), 对称轴在 y 轴右; 常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点位置: 抛物线与 y 轴交于 $(0, c)$; 抛物线与 x 轴交点个数由 Δ 决定: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, 抛物线与 x 轴有 2 个交点; $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时, 抛物线与 x 轴有 1 个交点; $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 抛物线与 x 轴没有交点.

14. (4 分) (2016•兰州) 如图, 矩形 ABCD 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O, $CE \parallel BD$, $DE \parallel AC$, $AD = 2\sqrt{3}$, $DE = 2$, 则四边形 OCED 的面积 ()



A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. $4\sqrt{3}$ D. 8

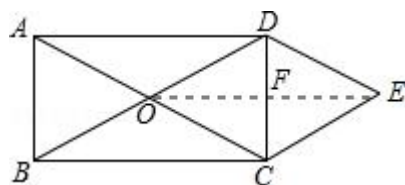
【分析】 连接 OE, 与 DC 交于点 F, 由四边形 ABCD 为矩形得到对角线互相平分且相等, 进而得到 $OD = OC$, 再由两组对边分别平行的四边形为平行四边形得到 ODEC 为平行四边形, 根据邻边相等的平行四边形为菱形得到四边形 ODEC 为菱形, 得到对角线互相平分且垂直, 求出菱形 OCEF 的面积即可.

【解答】 解: 连接 OE, 与 DC 交于点 F,

$\because$ 四边形 ABCD 为矩形,
 $\therefore$ OA=OC, OB=OD, 且 AC=BD, 即 OA=OB=OC=OD,
 $\because$ OD $\parallel$ CE, OC $\parallel$ DE,
 $\therefore$ 四边形 ODEC 为平行四边形,
 $\because$ OD=OC,
 $\therefore$ 四边形 ODEC 为菱形,
 $\therefore$ DF=CF, OF=EF, DC $\perp$ OE,
 $\because$ DE $\parallel$ OA, 且 DE=OA,
 $\therefore$ 四边形 ADEO 为平行四边形,
 $\because$ AD=2 $\sqrt{3}$, DE=2,
 $\therefore$ OE=2 $\sqrt{3}$, 即 OF=EF= $\sqrt{3}$,
 在 Rt $\triangle$ DEF 中, 根据勾股定理得: DF= $\sqrt{4-3}=1$, 即 DC=2,

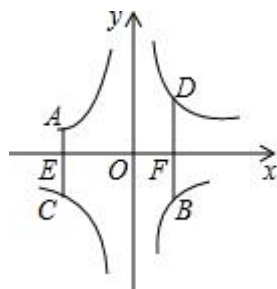
$$\text{则 } S_{\text{菱形 ODEC}} = \frac{1}{2} \text{OE} \cdot \text{DC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}.$$

故选 A



【点评】此题考查了矩形的性质，菱形的判定与性质，以及勾股定理，熟练掌握矩形的性质是解本题的关键.

15. (4 分) (2016•兰州) 如图, A, B 两点在反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ 的图象上, C、D 两点在反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图象上, AC $\perp$ x 轴于点 E, BD $\perp$ x 轴于点 F, AC=2, BD=3, EF= $\frac{10}{3}$, 则 $k_2 - k_1 =$ ()



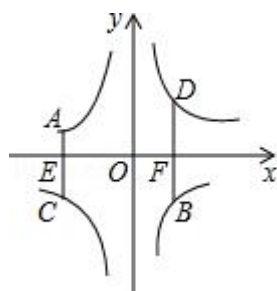
A. 4 B. $\frac{14}{3}$ C. $\frac{16}{3}$ D. 6

【分析】设 $A(m, \frac{k_1}{m})$, $B(n, \frac{k_1}{n})$ 则 $C(m, \frac{k_2}{m})$, $D(n, \frac{k_2}{n})$, 根据题意列出方程组即可解决问题.

【解答】解: 设 $A(m, \frac{k_1}{m})$, $B(n, \frac{k_1}{n})$ 则 $C(m, \frac{k_2}{m})$, $D(n, \frac{k_2}{n})$,

$$\text{由题意: } \begin{cases} n - m = \frac{10}{3} \\ \frac{k_1 - k_2}{m} = 2 \\ \frac{k_2 - k_1}{n} = 3 \end{cases} \text{ 解得 } k_2 - k_1 = 4.$$

故选 A.



【点评】本题考查反比例函数图象上的点的坐标特征, 解题的关键是利用参数, 构建方程组解决问题, 属于中考常考题型.

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

16. (4 分) (2016•兰州) 二次函数 $y=x^2+4x-3$ 的最小值是 -7.

【分析】利用配方法把二次函数写成顶点式即可解决问题.

【解答】解: $\because y=x^2+4x-3=(x+2)^2-7$,

$\because a=1>0$,

$\therefore x=-2$ 时, y 有最小值 $=-7$.

故答案为 -7 .

【点评】本题考查二次函数的最值, 记住 $a>0$ 函数有最小值, $a<0$ 函数有最大值, 学会利用配方法确定函数最值问题, 属于中考常考题型.

17. (4分) (2016•兰州) 一个不透明的口袋里装有若干除颜色外其他完全相同的小球, 其中有 6 个黄球, 将口袋中的球摇匀, 从中任意摸出一个球记下颜色后再放回, 通过大量重复上述实验后发现, 摸到黄球的频率稳定在 30%, 由此估计口袋中共有小球 20 个.

【分析】由于摸到黄球的频率稳定在 30%, 由此可以确定摸到黄球的概率, 而袋中有 6 个黄球, 由此即可求出.

【解答】解: $\because$ 摸到黄球的频率稳定在 30%,
 $\therefore$ 在大量重复上述实验下, 可估计摸到黄球的概率为 $30\%=0.3$,
而袋中黄球只有 6 个,
 $\therefore$ 推算出袋中小球大约有 $6 \div 0.3 = 20$ (个),
故答案为: 20.

【点评】本题考查了利用频率估计概率: 大量重复实验时, 事件发生的频率在某个固定位置左右摆动, 并且摆动的幅度越来越小, 根据这个频率稳定性定理, 可以用频率的集中趋势来估计概率, 这个固定的近似值就是这个事件的概率. 当实验的所有可能结果不是有限个或结果个数很多, 或各种可能结果发生的可能性不相等时, 一般通过统计频率来估计概率.

18. (4分) (2016•兰州) 双曲线 $y = \frac{m-1}{x}$ 在每个象限内, 函数值 y 随 x 的增大而增大, 则 m 的取值范围是 $m < 1$.

【分析】根据反比例函数的单调性结合反比例函数的性质, 可得出关于 m 的一元一次不等式, 解不等式即可得出结论.

【解答】解: $\because$ 双曲线 $y = \frac{m-1}{x}$ 在每个象限内, 函数值 y 随 x 的增大而增大,
 $\therefore m - 1 < 0$,
解得: $m < 1$.
故答案为: $m < 1$.

【点评】本题考查了反比例函数的性质以及解一元一次不等式, 解题的关键是找出关于 m 的一元一次不等式. 本题属于基础题, 难度不大, 解决该题型题目时, 根据反比例函数的单调性结合反比例函数的性质找出反比例系数 k 的取值范围是关键.

19. (4分) (2016•兰州) $\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 且 $AC \perp BD$, 请添加一个条件: $\angle BAD = 90^\circ$, 使得 $\square ABCD$ 为正方形.

【分析】根据正方形的判定定理添加条件即可.

【解答】解: $\because \square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 且 $AC \perp BD$,

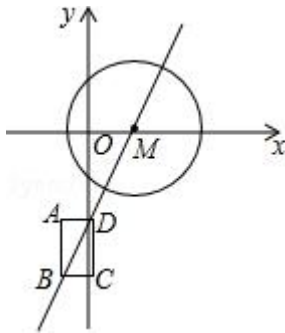
$\therefore \square ABCD$ 是菱形,

当 $\angle BAD=90^\circ$ 时, $\square ABCD$ 为正方形.

故答案为: $\angle BAD=90^\circ$.

【点评】本题考查了正方形的判定: 先判定平行四边形是菱形, 判定这个菱形有一个角为直角.

20. (4 分) (2016•兰州) 对于一个矩形 $ABCD$ 及 $\odot M$ 给出如下定义: 在同一平面内, 如果矩形 $ABCD$ 的四个顶点到 $\odot M$ 上一点的距离相等, 那么称这个矩形 $ABCD$ 是 $\odot M$ 的“伴侣矩形”. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: y=\sqrt{3}x-3$ 交 x 轴于点 M , $\odot M$ 的半径为 2, 矩形 $ABCD$ 沿直线运动 (BD 在直线 l 上), $BD=2$, $AB \parallel y$ 轴, 当矩形 $ABCD$ 是 $\odot M$ 的“伴侣矩形”时, 点 C 的坐标为 $(\sqrt{3}-\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ 或 $(\sqrt{3}+\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.



【分析】根据“伴侣矩形”的定义可知: 圆上的点一定在矩形的对角线交点上, 因为只有对角线交点到四个顶点的距离相等, 由此画出图形, 先求出直线与 x 轴和 y 轴两交点的坐标, 和矩形的长和宽;

有两种情况: ①矩形在 x 轴下方时, 作辅助线构建相似三角形得比例式, 分别求出 DG 和 DH 的长, 从而求出 CG 的长, 根据坐标特点写出点 C 的坐标; ②矩形在 x 轴上方时, 也分别过 C 、 B 两点向两坐标轴作垂线, 利用平行相似得比例式, 求出: $C(\sqrt{3}+\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

【解答】解: 如图所示, 矩形在这两个位置时就是 $\odot M$ 的“伴侣矩形”,

根据直线 $l: y=\sqrt{3}x-3$ 得: $OM=\sqrt{3}$, $ON=3$,

由勾股定理得: $MN=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=2\sqrt{3}$.

①矩形在 x 轴下方时, 分别过 A 、 D 作两轴的垂线 AH 、 DG ,

$$\text{由 } \cos \angle ABD = \cos \angle ONM = \frac{ON}{MN} = \frac{AB}{BD},$$

$$\therefore \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{AB}{2}, \quad AB = \sqrt{3}, \text{ 则 } AD = 1,$$

$\because DG \parallel y$ 轴,

$$\therefore \triangle MDG \sim \triangle MON,$$

$$\therefore \frac{DG}{ON} = \frac{DM}{MN},$$

$$\therefore \frac{DG}{3} = \frac{2-1}{2\sqrt{3}},$$

$$\therefore DG = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore CG = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{同理可得: } \frac{DH}{OM} = \frac{DN}{MN},$$

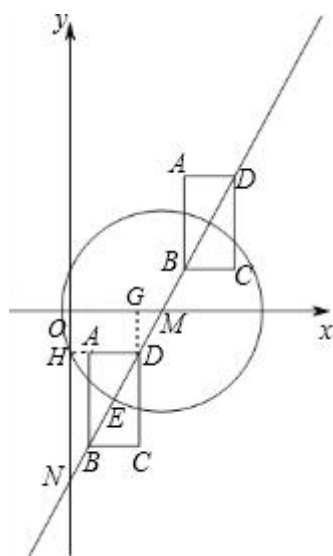
$$\therefore \frac{DH}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}},$$

$$\therefore DH = \sqrt{3} - \frac{1}{2},$$

$$\therefore C \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$\text{②矩形在 } x \text{ 轴上方时, 同理可得: } C \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$\text{故答案为: } \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \text{ 或 } \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$



【点评】 此题主要考查了圆的综合应用以及相似三角形的性质和矩形等知识，综合性较强，解答本题需要我们熟练各部分的内容，对学生的综合能力要求较高，一定要注意将所学知识

贯穿起来. 同时, 正确理解题意准确画出符合条件的矩形是本题的关键, 这就需要熟练掌握矩形的对角线的交点到四个顶点的距离相等.

三、解答题 (共 8 小题, 满分 70 分, 解答时写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

21. (10 分) (2016•兰州) (1) $\sqrt{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2\cos 45^\circ - (\pi - 2016)^0$

(2) $2y^2 + 4y = y + 2$.

【分析】 (1) 原式第一项化为最简二次根式, 第二项利用特殊角的三角函数值计算, 第三项利用零指数幂法则计算即可得到结果;

(2) 先把方程化为一般式, 然后利用因式分解法解方程.

【解答】 解: (1) $\sqrt{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2\cos 45^\circ - (\pi - 2016)^0$
 $= 2\sqrt{2} + 2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
 $= \sqrt{2} + 1;$

(2) $2y^2 + 4y = y + 2$,

$2y^2 + 3y - 2 = 0$,

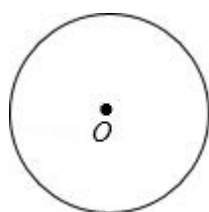
$(2y - 1)(y + 2) = 0$,

$2y - 1 = 0$ 或 $y + 2 = 0$,

所以 $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -2$.

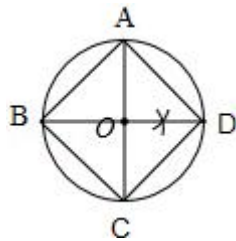
【点评】 本题考查了解一元二次方程 - 因式分解法: 先把方程的右边化为 0, 再把左边通过因式分解化为两个一次因式的积的形式, 那么这两个因式的值就都有可能为 0, 这就能得到两个一元一次方程的解, 这样也就把原方程进行了降次, 把解一元二次方程转化为解一元一次方程的问题了 (数学转化思想). 也考查了实数的运算.

22. (5 分) (2016•兰州) 如图, 已知 $\odot O$, 用尺规作 $\odot O$ 的内接正四边形 ABCD. (写出结论, 不写作法, 保留作图痕迹, 并把作图痕迹用黑色签字笔描黑)



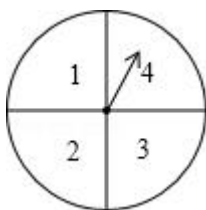
【分析】画圆的一条直径 AC，作这条直径的中垂线交⊙O 于点 BD，连结 ABCD 就是圆内接正四边形 ABCD.

【解答】解：如图所示，四边形 ABCD 即为所求：



【点评】本题考查的是复杂作图和正多边形和圆的知识，掌握中心角相等且都相等 90° 的四边形是正四边形以及线段垂直平分线的作法是解题的关键.

23. (6 分) (2016•兰州) 小明和小军两人一起做游戏，游戏规则如下：每人从 1, 2, ..., 8 中任意选择一个数字，然后两人各转动一次如图所示的转盘 (转盘被分为面积相等的四个扇形)，两人转出的数字之和等于谁事先选择的数，谁就获胜；若两人转出的数字之和不等于他们各自选择的数，就在做一次上述游戏，直至决出胜负. 若小军事先选择的数是 5，用列表或画树状图的方法求他获胜的概率.



【分析】列表得出所有等可能的情况数，找出两指针所指数字的和为 5 情况数，即可确定小军胜的概率.

【解答】解：列表如下：

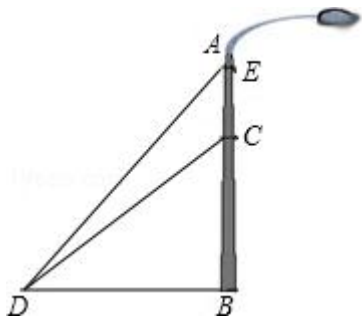
	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

所有等可能的情况有 16 种，其中两指针所指数字的和为 5 的情况有 4 种，

所以小军获胜的概率 $= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

【点评】此题考查了列表法与树状图法，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

24. (7分) (2016•兰州) 如图，一垂直于地面的灯柱 AB 被一钢筋 CD 固定，CD 与地面成 45° 夹角 ($\angle CDB=45^\circ$)，在 C 点上方 2 米处加固另一条钢线 ED，ED 与地面成 53° 夹角 ($\angle EDB=53^\circ$)，那么钢线 ED 的长度约为多少米？(结果精确到 1 米，参考数据: $\sin 53^\circ \approx 0.80$, $\cos 53^\circ \approx 0.60$, $\tan 53^\circ \approx 1.33$)



【分析】根据题意，可以得到 $BC=BD$ ，由 $\angle CDB=45^\circ$ ， $\angle EDB=53^\circ$ ，由三角函数值可以求得 BD 的长，从而可以求得 DE 的长.

【解答】解：设 $BD=x$ 米，则 $BC=x$ 米， $BE=(x+2)$ 米，

在 $Rt\triangle BDE$ 中， $\tan \angle EDB = \frac{BE}{DB} = \frac{x+2}{x}$,

$$\text{即 } \frac{x+2}{x} \approx 1.33,$$

解得， $x \approx 6.06$,

$$\because \sin \angle EDB = \frac{BE}{ED},$$

$$\text{即 } 0.8 = \frac{8.06}{ED},$$

解得， $ED \approx 10$

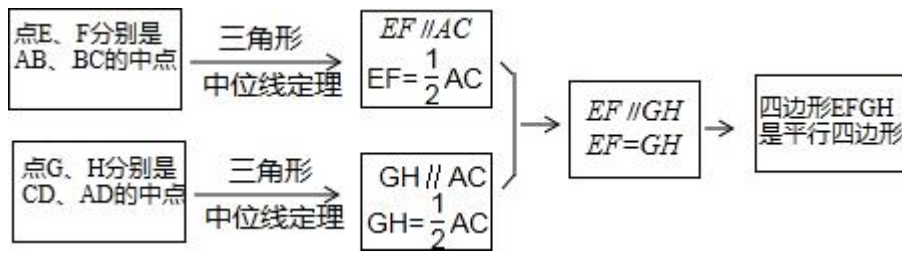
即钢线 ED 的长度约为 10 米.

【点评】本题考查解直角三角形的应用，解题的关键是明确题意，利用三角函数值求出相应的边的长度.

25. (10分) (2016•兰州) 阅读下面材料:

在数学课上，老师请同学们思考如下问题：如图 1，我们把一个四边形 ABCD 的四边中点 E, F, G, H 依次连接起来得到的四边形 EFGH 是平行四边形吗？

小敏在思考问题是，有如下思路：连接 AC.



结合小敏的思路作答

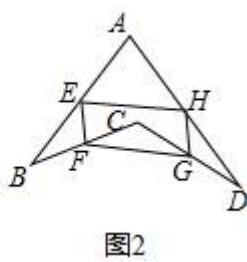
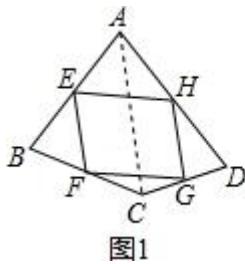
(1) 若只改变图 1 中四边形 ABCD 的形状 (如图 2), 则四边形 EFGH 还是平行四边形吗?

说明理由; 参考小敏思考问题方法解决一下问题:

(2) 如图 2, 在 (1) 的条件下, 若连接 AC, BD.

①当 AC 与 BD 满足什么条件时, 四边形 EFGH 是菱形, 写出结论并证明;

②当 AC 与 BD 满足什么条件时, 四边形 EFGH 是矩形, 直接写出结论.



【分析】 (1) 如图 2, 连接 AC, 根据三角形中位线的性质得到 $EF \parallel AC$, $EF = \frac{1}{2}AC$, 然后根据平行四边形判定定理即可得到结论;

(2) 由 (1) 知, 四边形 EFGH 是平行四边形, 且 $FG = \frac{1}{2}BD$, $HG = \frac{1}{2}AC$, 于是得到当 $AC = BD$ 时, $FG = HG$, 即可得到结论;

(3) 根据平行线的性质得到 $GH \perp BD$, $GH \perp GF$, 于是得到 $\angle HGF = 90^\circ$, 根据矩形的判定定理即可得到结论.

【解答】 解: (1) 是平行四边形,

证明: 如图 2, 连接 AC,

$\because E$ 是 AB 的中点, F 是 BC 的中点,

$\therefore EF \parallel AC$, $EF = \frac{1}{2}AC$,

同理 $HG \parallel AC$, $HG = \frac{1}{2}AC$,

综上所述: $EF \parallel HG$, $EF = HG$,

故四边形 EFGH 是平行四边形;

(2) $AC=BD$.

理由如下:

由 (1) 知, 四边形 EFGH 是平行四边形, 且 $FG=\frac{1}{2}BD$, $HG=\frac{1}{2}AC$,

$\therefore$ 当 $AC=BD$ 时, $FG=HG$,

$\therefore$ 平行四边形 EFGH 是菱形,

(3) 当 $AC \perp BD$ 时, 四边形 EFGH 为矩形;

理由如下:

同 (2) 得: 四边形 EFGH 是平行四边形,

$\because AC \perp BD$, $GH \parallel AC$,

$\therefore GH \perp BD$,

$\because GF \parallel BD$,

$\therefore GH \perp GF$,

$\therefore \angle HGF=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 EFGH 为矩形.

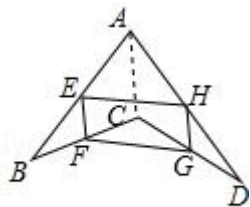


图2

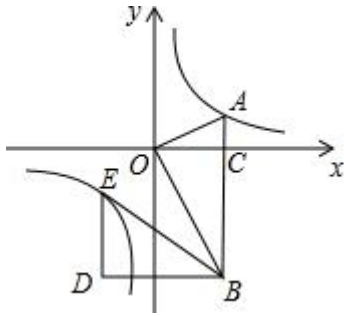
【点评】 此题主要考查了中点四边形, 关键是掌握三角形中位线定理, 三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半.

26. (10 分) (2016•兰州) 如图, 在平面直角坐标系中, $OA \perp OB$, $AB \perp x$ 轴于点 C, 点 A $(\sqrt{3}, 1)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上.

(1) 求反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的表达式;

(2) 在 x 轴的负半轴上存在一点 P, 使得 $S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOB}$, 求点 P 的坐标;

(3) 若将 $\triangle BOA$ 绕点 B 按逆时针方向旋转 60° 得到 $\triangle BDE$. 直接写出点 E 的坐标, 并判断点 E 是否在该反比例函数的图象上, 说明理由.



【分析】 (1) 将点 $A(\sqrt{3}, 1)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 利用待定系数法即可求出反比例函数的表达式;

(2) 先由射影定理求出 $BC=3$, 那么 $B(\sqrt{3}, -3)$, 计算求出 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 4 = 2\sqrt{3}$. 则 $S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOB} = \sqrt{3}$. 设点 P 的坐标为 $(m, 0)$, 列出方程求解即可;

(3) 先解 $\triangle OAB$, 得出 $\angle ABO = 30^\circ$, 再根据旋转的性质求出 E 点坐标为 $(-\sqrt{3}, -1)$, 即可求解.

【解答】 解: (1) $\because$ 点 $A(\sqrt{3}, 1)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上,

$$\therefore k = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{反比例函数的表达式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{x};$$

$$(2) \because A(\sqrt{3}, 1), AB \perp x \text{ 轴于点 } C,$$

$$\therefore OC = \sqrt{3}, AC = 1,$$

$$\text{由射影定理得 } OC^2 = AC \cdot BC, \text{ 可得 } BC = 3, B(\sqrt{3}, -3),$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 4 = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOB} = \sqrt{3}.$$

$$\text{设点 } P \text{ 的坐标为 } (m, 0),$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times |m| \times 1 = \sqrt{3},$$

$$\therefore |m| = 2\sqrt{3},$$

$$\because P \text{ 是 } x \text{ 轴的负半轴上的点},$$

$$\therefore m = -2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (-2\sqrt{3}, 0);$$

(3) 点 E 在该反比例函数的图象上, 理由如下:

$$\because OA \perp OB, OA=2, OB=2\sqrt{3}, AB=4,$$

$$\therefore \sin \angle ABO = \frac{OA}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle ABO = 30^\circ,$$

$\therefore$ 将 $\triangle BOA$ 绕点 B 按逆时针方向旋转 60° 得到 $\triangle BDE$,

$$\therefore \triangle BOA \cong \triangle BDE, \angle OBD = 60^\circ,$$

$$\therefore BO = BD = 2\sqrt{3}, OA = DE = 2, \angle BOA = \angle BDE = 90^\circ, \angle ABD = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ,$$

$$\text{而 } BD - OC = \sqrt{3}, BC - DE = 1,$$

$$\therefore E(-\sqrt{3}, -1),$$

$$\because -\sqrt{3} \times (-1) = \sqrt{3},$$

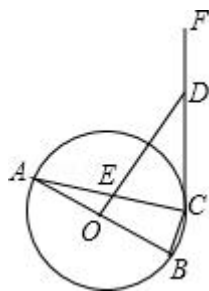
$\therefore$ 点 E 在该反比例函数的图象上.

【点评】 本题考查了待定系数法求反比例函数的解析式, 反比例函数图象上点的坐标特征, 三角形的面积, 旋转的性质, 正确求出解析式是解题的关键.

27. (10 分) (2016•兰州) 如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, AB 是 $\odot O$ 的直径, $OD \perp AB$ 于点 O, 分别交 AC、CF 于点 E、D, 且 $DE = DC$.

(1) 求证: CF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 5, $BC = \sqrt{10}$, 求 DE 的长.



【分析】 (1) 连接 OC, 欲证明 CF 是 $\odot O$ 的切线, 只要证明 $\angle OCF = 90^\circ$.

(2) 作 $DH \perp AC$ 于 H, 由 $\triangle AEO \sim \triangle ABC$, 得 $\frac{AO}{AC} = \frac{AE}{AB}$ 求出 AE, EC, 再根据

$\sin \angle A = \sin \angle EDH$, 得到 $\frac{BC}{AB} = \frac{EH}{DE}$, 求出 DE 即可.

【解答】 证明: 连接 OC,

$$\because OA = OC,$$

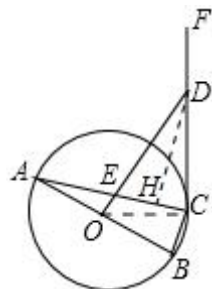
$$\therefore \angle A = \angle OCA,$$

$$\because OD \perp AB,$$

$$\therefore \angle A + \angle AEO = 90^\circ,$$

$$\because DE = DC,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle DCE,$$



$$\because \angle AEO = \angle DEC,$$

$$\therefore \angle AEO = \angle DCE,$$

$$\therefore \angle OCE + \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCF = 90^\circ,$$

$$\therefore OC \perp CF,$$

$\therefore CF$ 是 $\odot O$ 切线.

(2) 作 $DH \perp AC$ 于 H , 则 $\angle EDH = \angle A$,

$$\because DE = DC,$$

$$\therefore EH = HC = \frac{1}{2}EC,$$

$$\because \odot O \text{ 的半径为 } 5, BC = \sqrt{10},$$

$$\therefore AB = 10, AC = 3\sqrt{10},$$

$$\because \triangle AEO \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AO}{AC} = \frac{AE}{AB},$$

$$\therefore AE = \frac{5 \times 10}{3\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{3},$$

$$\therefore EC = AC - AE = \frac{4\sqrt{10}}{3},$$

$$\therefore EH = \frac{1}{2}EC = \frac{2\sqrt{10}}{3},$$

$$\because \angle EDH = \angle A,$$

$$\therefore \sin \angle A = \sin \angle EDH,$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{EH}{DE},$$

$$\therefore DE = \frac{AB \cdot EH}{BC} = \frac{10 \times \frac{2\sqrt{10}}{3}}{\sqrt{10}} = \frac{20}{3}.$$

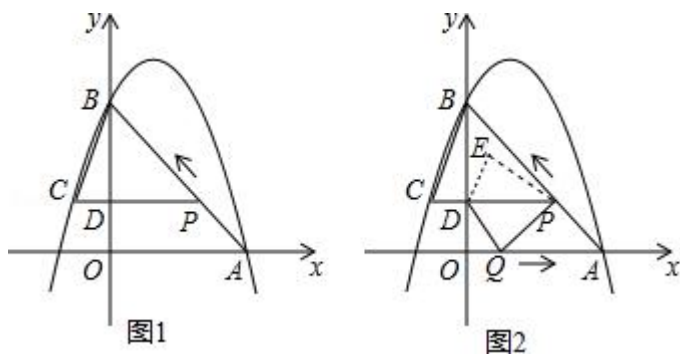
【点评】本题考查切线的性质、相似三角形的判定和性质、三角函数等知识，解题的关键是添加辅助线，构造相似三角形，属于中考常考题型.

28. (12分) (2016·兰州) 如图1，二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象过点 A (3, 0)，B (0, 4) 两点，动点 P 从 A 出发，在线段 AB 上沿 A→B 的方向以每秒 2 个单位长度的速度运动，过点 P 作 $PD \perp y$ 于点 D，交抛物线于点 C. 设运动时间为 t (秒).

(1) 求二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的表达式;

(2) 连接 BC，当 $t = \frac{5}{6}$ 时，求 $\triangle BCP$ 的面积;

(3) 如图2，动点 P 从 A 出发时，动点 Q 同时从 O 出发，在线段 OA 上沿 O→A 的方向以 1 个单位长度的速度运动. 当点 P 与 B 重合时，P、Q 两点同时停止运动，连接 DQ，PQ，将 $\triangle DPQ$ 沿直线 PC 折叠得到 $\triangle DPE$. 在运动过程中，设 $\triangle DPE$ 和 $\triangle OAB$ 重合部分的面积为 S，直接写出 S 与 t 的函数关系及 t 的取值范围.



【分析】(1) 直接将 A、B 两点的坐标代入列方程组解出即可;

(2) 如图1，要想求 $\triangle BCP$ 的面积，必须求对应的底和高，即 PC 和 BD；先求 OD，再求 BD，PC 是利用点 P 和点 C 的横坐标求出，要注意符号;

(3) 分两种情况讨论：① $\triangle DPE$ 完全在 $\triangle OAB$ 中时，即当 $0 \leq t \leq \frac{15}{17}$ 时，如图2所示，重合部分的面积为 S 就是 $\triangle DPE$ 的面积；② $\triangle DPE$ 有一部分在 $\triangle OAB$ 中时，当 $\frac{15}{17} < t \leq 2.5$ 时，如图4所示， $\triangle PDN$ 就是重合部分的面积 S.

【解答】解：(1) 把 A (3, 0)，B (0, 4) 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 中得：

$$\begin{cases} -9+3b+c=0 \\ c=4 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} b=\frac{5}{3}, \\ c=4 \end{cases}$$

∴二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的表达式为: $y=-x^2+\frac{5}{3}x+4$;

(2) 如图 1, 当 $t=\frac{5}{6}$ 时, $AP=2t$,

∵ $PC \parallel x$ 轴,

$$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{AP},$$

$$\therefore \frac{4}{OD} = \frac{5}{2t},$$

$$\therefore OD = \frac{8t}{5} = \frac{8}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{4}{3},$$

当 $y=\frac{4}{3}$ 时, $\frac{4}{3} = -x^2 + \frac{5}{3}x + 4$,

$$3x^2 - 5x - 8 = 0,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{8}{3},$$

$$\therefore C \left(-1, \frac{4}{3}\right),$$

$$\text{由 } \frac{BD}{OB} = \frac{PD}{OA} \text{ 得 } \frac{4 - \frac{4}{3}}{4} = \frac{PD}{3},$$

则 $PD=2$,

$$\therefore S_{\triangle BCP} = \frac{1}{2} \times PC \times BD = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{8}{3} = 4;$$

(3) 如图 3,

当点 E 在 AB 上时,

$$\text{由 (2) 得 } OD=QM=ME=\frac{8t}{5},$$

$$\therefore EQ = \frac{16t}{5},$$

由折叠得: $EQ \perp PD$, 则 $EQ \parallel y$ 轴

$$\therefore \frac{EQ}{OB} = \frac{AQ}{OA},$$

$$\therefore \frac{\frac{16t}{5}}{4} = \frac{3-t}{3},$$

$$\therefore t = \frac{15}{17},$$

同理得: $PD=3-\frac{6t}{5}$,

$$\therefore \text{当 } 0 \leq t \leq \frac{15}{17} \text{ 时, } S = S_{\triangle PDQ} = \frac{1}{2} \times PD \times MQ = \frac{1}{2} \times \left(3 - \frac{6t}{5}\right) \times \frac{8t}{5},$$

$$S = -\frac{24}{25}t^2 + \frac{12}{5}t;$$

当 $\frac{15}{17} < t \leq 2.5$ 时,

如图 4, $P'D' = 3 - \frac{6t}{5}$,

点 Q 与点 E 关于直线 P'C' 对称, 则 Q (t, 0)、E (t, $\frac{16t}{5}$),

∴ AB 的解析式为: $y = -\frac{4}{3}x + 4$,

D'E 的解析式为: $y = \frac{8}{5}x + \frac{8}{5}t$,

则交点 N $(\frac{15-6t}{11}, \frac{8t+24}{11})$,

$$\therefore S = S_{\Delta P'D'N} = \frac{1}{2} \times P'D' \times FN = \frac{1}{2} \times \left(3 - \frac{6t}{5}\right) \left(\frac{8t+24}{11} - \frac{8t}{5}\right),$$

$$\therefore S = \frac{144}{275}t^2 - \frac{144}{55}t + \frac{36}{11}.$$

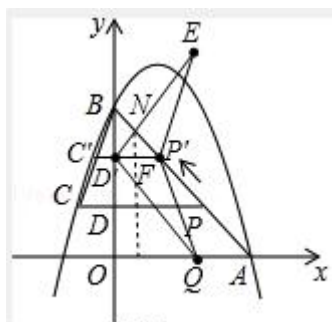


图4

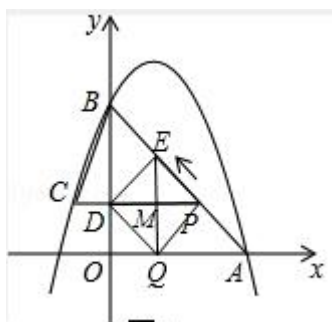


图 3

【点评】本题是二次函数的综合题,考查了利用待定系数法求二次函数和一次函数的解析式,并能利用方程组求出两图象的交点,把方程和函数有机地结合在一起,使函数问题简单化;

同时考查了分类讨论的思想，这一思想在二次函数中经常运用，要熟练掌握；本题还与相似结合，利用相似三角形对应边的比来表示线段的长.

参与本试卷答题和审题的老师有：HJJ；CJX；1286697702；sks；733599；sjzx；zjx111；2300680618；王学峰；守拙；gsls；弯弯的小河；三界无我；曹先生；tcm123；HLing；wd1899；zgm666（排名不分先后）

