

2015 年甘肃省酒泉市中考数学试卷

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2015•酒泉) 64 的立方根是 ()

- A. 4 B. ± 4 C. 8 D. ± 8

2. (3 分) (2015•酒泉) 中国航空母舰“辽宁号”的满载排水量为 67500 吨. 将数 67500 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.675×10^5 B. 6.75×10^4 C. 67.5×10^3 D. 675×10^2

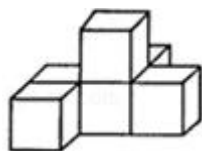
3. (3 分) (2015•酒泉) 若 $\angle A = 34^\circ$, 则 $\angle A$ 的补角为 ()

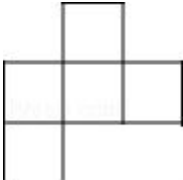
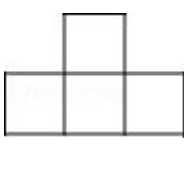
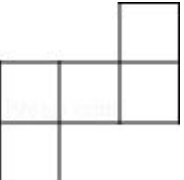
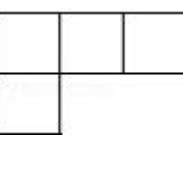
- A. 56° B. 146° C. 156° D. 166°

4. (3 分) (2015•酒泉) 下列运算正确的是 ()

- A. $x^2 + x^2 = x^4$ B. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ C. $(-a^2)^3 = -a^6$ D. $3a^2 \cdot 2a^3 = 6a^6$

5. (3 分) (2015•酒泉) 如图是由 6 个相同的小正方体搭成的几何体, 那么这个几何体的俯视图是 ()



- A.  B.  C.  D. 

6. (3 分) (2015•酒泉) 下列命题中, 假命题是 ()

- A. 平行四边形是中心对称图形
B. 三角形三边的垂直平分线相交于一点, 这点到三角形三个顶点的距离相等
C. 对于简单的随机样本, 可以用样本的方差去估计总体的方差
D. 若 $x^2 = y^2$, 则 $x = y$

7. (3 分) (2015•酒泉) 今年来某县加大了对教育经费的投入, 2013 年投入 2500 万元, 2015 年投入 3500 万元. 假设该县投入教育经费的年平均增长率为 x , 根据题意列方程, 则下列方程正确的是 ()

A. $2500x^2=3500$

B. $2500(1+x)^2=3500$

C. $2500(1+x\%)^2=3500$

D. $2500(1+x)+2500(1+x)^2=3500$

8. (3分) (2015•酒泉) $\triangle ABC$ 为 $\odot O$ 的内接三角形, 若 $\angle AOC=160^\circ$, 则 $\angle ABC$ 的度数是 ()

A. 80°

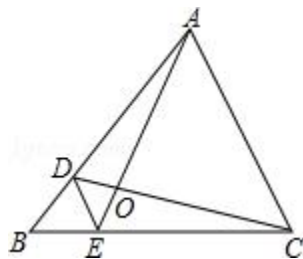
B. 160°

C. 100°

D. 80° 或 100°

9. (3分) (2015•酒泉) 如图, D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC 上的点, $DE \parallel AC$,

若 $S_{\triangle BDE} : S_{\triangle CDE} = 1 : 3$, 则 $S_{\triangle DOE} : S_{\triangle AOC}$ 的值为 ()



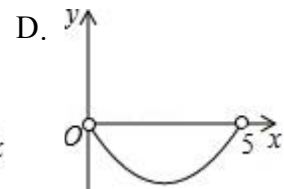
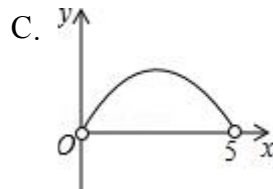
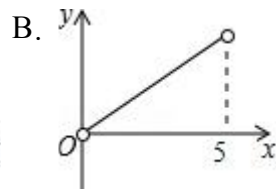
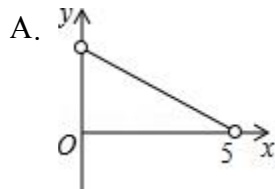
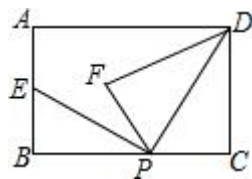
A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{1}{16}$

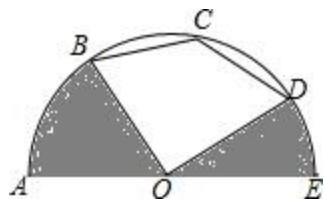
10. (3分) (2015•酒泉) 如图, 矩形 ABCD 中, $AB=3$, $BC=5$, 点 P 是 BC 边上的一个动点 (点 P 与点 B、C 都不重合), 现将 $\triangle PCD$ 沿直线 PD 折叠, 使点 C 落到点 F 处; 过点 P 作 $\angle BPF$ 的角平分线交 AB 于点 E. 设 $BP=x$, $BE=y$, 则下列图象中, 能表示 y 与 x 的函数关系的图象大致是 ()



二、填空题 (本题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. (3分) (2015•酒泉) 分解因式: $x^3y - 2x^2y + xy =$ _____.

12. (3分) (2015•酒泉) 分式方程 $\frac{2}{x} = \frac{5}{x+3}$ 的解是_____.
13. (3分) (2015•酒泉) 在函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.
14. (3分) (2015•酒泉) 定义新运算: 对于任意实数 a, b 都有: $a \oplus b = a(a-b) + 1$, 其中等式右边是通常的加法、减法及乘法运算. 如: $2 \oplus 5 = 2 \times (2-5) + 1 = 2 \times (-3) + 1 = -5$, 那么不等式 $3 \oplus x < 13$ 的解集为_____.
15. (3分) (2015•酒泉) 已知 α, β 均为锐角, 且满足 $|\sin \alpha - \frac{1}{2}| + \sqrt{(\tan \beta - 1)^2} = 0$, 则 $\alpha + \beta =$ _____.
16. (3分) (2015•酒泉) 关于 x 的方程 $kx^2 - 4x - \frac{2}{3} = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是_____.
17. (3分) (2015•酒泉) 如图, 半圆 O 的直径 $AE=4$, 点 B, C, D 均在半圆上, 若 $AB=BC, CD=DE$, 连接 OB, OD , 则图中阴影部分的面积为_____.



18. (3分) (2015•酒泉) 古希腊数学家把数 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... 叫做三角形数, 其中 1 是第一个三角形数, 3 是第 2 个三角形数, 6 是第 3 个三角形数, ... 依此类推, 那么第 9 个三角形数是_____, 2016 是第_____个三角形数.

三、解答题 (本题共 5 小题, 共 26 分)

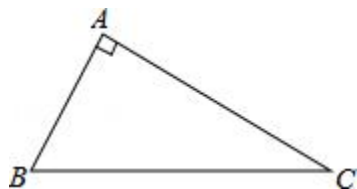
19. (4分) (2015•酒泉) 计算: $(\pi - \sqrt{5})^0 + \sqrt{4} + (-1)^{2015} - \sqrt{3} \tan 60^\circ$.

20. (4 分) (2015•酒泉) 先化简, 再求值: $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \div (1 - \frac{3}{x+1})$, 其中 $x=0$.

21. (6 分) (2015•酒泉) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$

(1) 请用圆规和直尺作出 $\odot P$, 使圆心 P 在 AC 边上, 且与 AB , BC 两边都相切 (保留作图痕迹, 不写作法和证明).

(2) 若 $\angle B=60^\circ$, $AB=3$, 求 $\odot P$ 的面积.

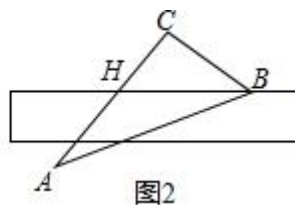
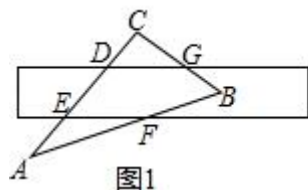


22. (6 分) (2015•酒泉) 如图①所示, 将直尺摆放在三角板上, 使直尺与三角板的边分别交于点 D , E , F , G , 已知 $\angle CGD=42^\circ$

(1) 求 $\angle CEF$ 的度数;

(2) 将直尺向下平移, 使直尺的边缘通过三角板的顶点 B , 交 AC 边于点 H , 如图②所示, 点 H , B 在直尺上的度数分别为 4, 13.4, 求 BC 的长 (结果保留两位小数).

(参考数据: $\sin 42^\circ \approx 0.67$, $\cos 42^\circ \approx 0.74$, $\tan 42^\circ \approx 0.90$)



23. (6分) (2015•酒泉) 有三张卡片 (形状、大小、颜色、质地都相等), 正反面分别下上整式 x^2+1 , $-x^2-2$, 3 . 将这三张卡片背面向上洗匀, 从中任意抽取一张卡片, 记卡片上的整式为 A , 再从剩下的卡片中任意抽取一张, 记卡片上的整式为 B , 于是得到代数式 $\frac{A}{B}$.

(1) 请用画树状图或列表的方法, 写出代数式 $\frac{A}{B}$ 所有可能的结果;

(2) 求代数式 $\frac{A}{B}$ 恰好是分式的概率.

四、解答题 (本题共 5 小题, 共 40 分)

24. (7分) (2015•酒泉) 某班同学响应“阳光体育运动”号召, 利用课外活动积极参加体育锻炼, 每位同学从长跑、铅球、立定跳远、篮球定时定点投篮中任选一项进行了训练, 训练前后都进行了测试, 现将项目选择情况及训练后篮球定时定点投篮进球数进行整理, 作出如下统计图表.

训练后篮球定点投篮测试进球统计表

进球数 (个)	8	7	6	5	4	3
人数	2	1	4	7	8	2

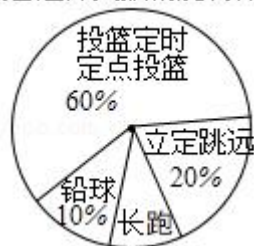
请你根据图表中的信息回答下列问题:

(1) 训练后篮球定时定点投篮人均进球数为_____个;

(2) 选择长跑训练的人数占全班人数的百分比是_____, 该班共有同学_____人;

(3) 根据测试资料, 参加篮球定时定点投篮的学生训练后比训练前的人均进球增加了 25%, 求参加训练之前的人均进球数.

项目选择人数情况统计图



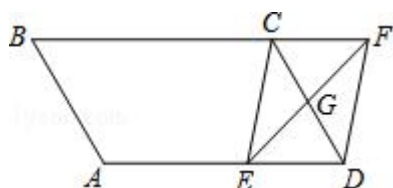
25. (7分) (2015•酒泉) 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=3\text{cm}$, $BC=5\text{cm}$, $\angle B=60^\circ$, G 是 CD 的中点, E 是边 AD 上的动点, EG 的延长线与 BC 的延长线交于点 F , 连结 CE , DF .

(1) 求证: 四边形 $CEDF$ 是平行四边形;

(2) ①当 $AE=\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$ 时, 四边形 $CEDF$ 是矩形;

②当 $AE=\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$ 时, 四边形 $CEDF$ 是菱形.

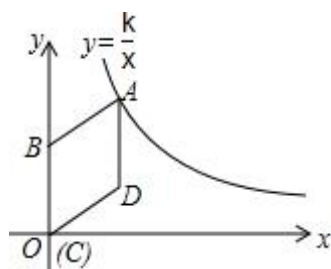
(直接写出答案, 不需要说明理由)



26. (8分) (2015•酒泉) 如图, 在平面直角坐标系中, 菱形 $ABCD$ 的顶点 C 与原点 O 重合, 点 B 在 y 轴的正半轴上, 点 A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$, $x>0$) 的图象上, 点 D 的坐标为 $(4, 3)$.

(1) 求 k 的值;

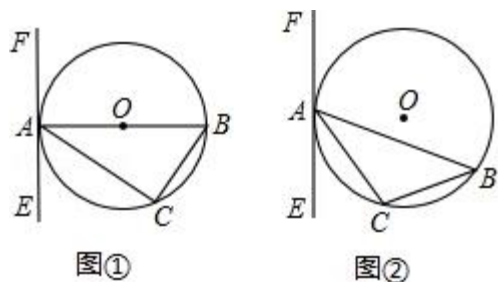
(2) 若将菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移, 当菱形的顶点 D 落在函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$, $x>0$) 的图象上时, 求菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移的距离.



27. (8分) (2015•酒泉) 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, 过点 A 作直线 EF .

(1) 如图①所示, 若 AB 为 $\odot O$ 的直径, 要使 EF 成为 $\odot O$ 的切线, 还需要添加的一个条件是 (至少说出两种): _____ 或者 _____.

(2) 如图②所示, 如果 AB 是不过圆心 O 的弦, 且 $\angle CAE = \angle B$, 那么 EF 是 $\odot O$ 的切线吗? 试证明你的判断.

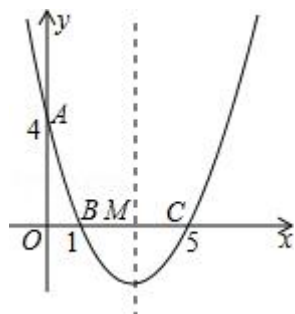


28. (10 分) (2015•酒泉) 如图, 在直角坐标系中, 抛物线经过点 $A(0, 4)$, $B(1, 0)$, $C(5, 0)$, 其对称轴与 x 轴相交于点 M .

(1) 求抛物线的解析式和对称轴;

(2) 在抛物线的对称轴上是否存在一点 P , 使 $\triangle PAB$ 的周长最小? 若存在, 请求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 连接 AC , 在直线 AC 的下方的抛物线上, 是否存在一点 N , 使 $\triangle NAC$ 的面积最大? 若存在, 请求出点 N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2015 年甘肃省酒泉市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2015•酒泉) 64 的立方根是 ()

- A. 4 B. ± 4 C. 8 D. ± 8

考点：立方根.

分析：如果一个数 x 的立方等于 a ，那么 x 是 a 的立方根，根据此定义求解即可.

解答：解： $\because 4$ 的立方等于 64，

$\therefore 64$ 的立方根等于 4.

故选 A.

点评：此题主要考查了求一个数的立方根，解题时应先找出所要求的这个数是哪一个数的立方. 由开立方和立方是互逆运算，用立方的方法求这个数的立方根. 注意一个数的立方根与原数的性质符号相同.

2. (3 分) (2015•酒泉) 中国航空母舰“辽宁号”的满载排水量为 67500 吨. 将数 67500 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.675×10^5 B. 6.75×10^4 C. 67.5×10^3 D. 675×10^2

考点：科学记数法—表示较大的数.

分析：科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

解答：解：将 67500 用科学记数法表示为： 6.75×10^4 .

故选：B.

点评： 此题考查了科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

3. (3 分) (2015•酒泉) 若 $\angle A = 34^\circ$ ，则 $\angle A$ 的补角为 ()

- A. 56° B. 146° C. 156° D. 166°

考点： 余角和补角．

分析： 根据互补的两角之和为 180° ，可得出答案．

解答： 解： $\because \angle A = 34^\circ$ ，

$\therefore \angle A$ 的补角 $= 180^\circ - 34^\circ = 146^\circ$ ．

故选 B．

点评： 本题考查了余角和补角的知识，解答本题的关键是掌握互补的两角之和为 180° ．

4. (3 分) (2015•酒泉) 下列运算正确的是 ()

- A. $x^2 + x^2 = x^4$ B. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$
C. $(-a^2)^3 = -a^6$ D. $3a^2 \cdot 2a^3 = 6a^6$

考点： 完全平方公式；合并同类项；幂的乘方与积的乘方；单项式乘单项式．

分析： 根据同类项、完全平方公式、幂的乘方和单项式的乘法计算即可．

解答： 解： A、 $x^2 + x^2 = 2x^2$ ，错误；

B、 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，错误；

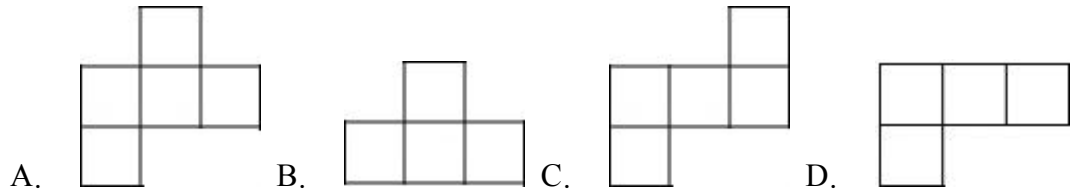
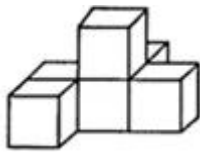
C、 $(-a^2)^3 = -a^6$ ，正确；

D、 $3a^2 \cdot 2a^3 = 6a^5$ ，错误；

故选 C．

点评： 此题考查同类项、完全平方公式、幂的乘方和单项式的乘法，关键是根据法则进行计算．

5. (3 分) (2015•酒泉) 如图是由 6 个相同的小正方体搭成的几何体, 那么这个几何体的俯视图是 ()



考点: 简单组合体的三视图.

分析: 找到从上面看所得到的图形即可, 注意所有的看到的棱都应表现在俯视图中.

解答: 解: 从上面看易得上面第一层中间有 1 个正方形, 第二层有 3 个正方形. 下面一层左边有 1 个正方形,
故选 A.

点评: 本题考查了三视图的知识, 俯视图是从物体的上面看得到的视图.

6. (3 分) (2015•酒泉) 下列命题中, 假命题是 ()

- A. 平行四边形是中心对称图形
- B. 三角形三边的垂直平分线相交于一点, 这点到三角形三个顶点的距离相等
- C. 对于简单的随机样本, 可以用样本的方差去估计总体的方差
- D. 若 $x^2=y^2$, 则 $x=y$

考点: 命题与定理; 有理数的乘方; 线段垂直平分线的性质; 中心对称图形; 用样本估计总体.

分析: 根据平行四边形的性质、三角形外心的性质以及用样本的数字特征估计总体的数字特征和有理数乘方的运算逐项分析即可.

解答: 解: A、平行四边形是中心对称图形, 它的中心对称点为两条对角线的交点, 故该命题是真命题;

B、三角形三边的垂直平分线相交于一点, 为三角形的外心, 这点到三角形三个顶点的距离相等, 故该命题是真命题;

C、用样本的数字特征估计总体的数字特征：主要数据有众数、中位数、平均数、标准差与方差，故该命题是真命题；

D、若 $x^2=y^2$ ，则 $x=\pm y$ ，不是 $x=y$ ，故该命题是假命题；

故选 D.

点评： 本题考查了命题真假的判断，属于基础题. 根据定义：符合事实真理的判断是真命题，不符合事实真理的判断是假命题，不难选出正确项.

7. (3 分) (2015•酒泉) 今年来某县加大了对教育经费的投入，2013 年投入 2500 万元，2015 年投入 3500 万元. 假设该县投入教育经费的年平均增长率为 x ，根据题意列方程，则下列方程正确的是 ()

A. $2500x^2=3500$

B. $2500(1+x)^2=3500$

C. $2500(1+x\%)^2=3500$

D. $2500(1+x)+2500(1+x)^2=3500$

考点： 由实际问题抽象出一元二次方程.

专题： 增长率问题.

分析： 根据 2013 年教育经费额 $\times (1+\text{平均年增长率})^2=2015$ 年教育经费支出额，列出方程即可.

解答： 解：设增长率为 x ，根据题意得 $2500 \times (1+x)^2=3500$ ，

故选 B.

点评： 本题考查一元二次方程的应用——求平均变化率的方法. 若设变化前的量为 a ，变化后的量为 b ，平均变化率为 x ，则经过两次变化后的数量关系为 $a(1\pm x)^2=b$. (当增长时中间的“ $\pm$ ”号选“+”，当下降时中间的“ $\pm$ ”号选“-”).

8. (3 分) (2015•酒泉) $\triangle ABC$ 为 $\odot O$ 的内接三角形，若 $\angle AOC=160^\circ$ ，则 $\angle ABC$ 的度数是 ()

A. 80°

B. 160°

C. 100°

D. 80° 或 100°

考点： 圆周角定理.

分析： 首先根据题意画出图形，由圆周角定理即可求得答案 $\angle ABC$ 的度数，又由圆的内接四边形的性质，即可求得 $\angle ABC$ 的度数.

解答： 解：如图， $\because \angle AOC=160^\circ$,

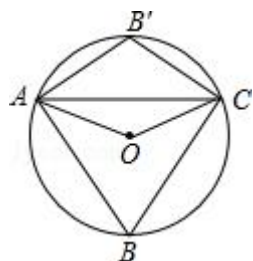
$$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \times 160^\circ = 80^\circ,$$

$$\because \angle ABC + \angle AB'C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AB'C = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

$$\therefore \angle ABC \text{ 的度数是： } 80^\circ \text{ 或 } 100^\circ.$$

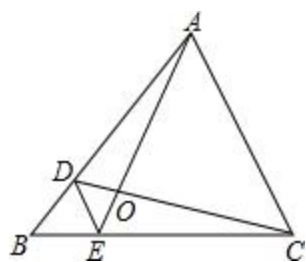
故选 D.



点评： 此题考查了圆周角定理与圆的内接四边形的性质. 此题难度不大，注意数形结合思想与分类讨论思想的应用，注意别漏解.

9. (3 分) (2015•酒泉) 如图, D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC 上的点, $DE \parallel AC$,

若 $S_{\triangle BDE} : S_{\triangle CDE} = 1 : 3$, 则 $S_{\triangle DOE} : S_{\triangle AOC}$ 的值为 ()



A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{1}{16}$

考点： 相似三角形的判定与性质.

分析： 证明 $BE: EC=1: 3$ ，进而证明 $BE: BC=1: 4$ ；证明 $\triangle DOE \sim \triangle AOC$ ，

得到 $\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{4}$ ，借助相似三角形的性质即可解决问题.

解答： 解： $\because S_{\triangle BDE}: S_{\triangle CDE}=1: 3$ ，

$$\therefore BE: EC=1: 3;$$

$$\therefore BE: BC=1: 4;$$

$$\because DE \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle DOE \sim \triangle AOC,$$

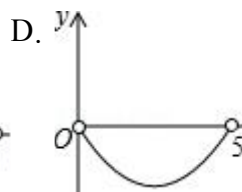
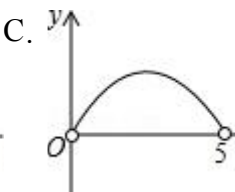
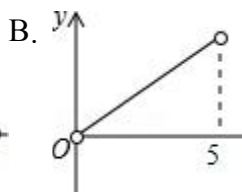
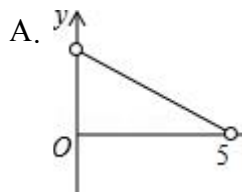
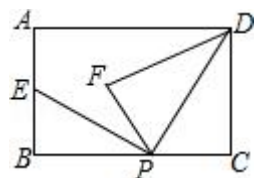
$$\therefore \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle DOE}: S_{\triangle AOC} = \left(\frac{DE}{AC}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

故选 D.

点评： 本题主要考查了相似三角形的判定及其性质的应用问题；解题的关键是灵活运用形似三角形的判定及其性质来分析、判断、推理或解答.

10. (3 分) (2015•酒泉) 如图，矩形 ABCD 中， $AB=3$ ， $BC=5$ ，点 P 是 BC 边上的一个动点 (点 P 与点 B、C 都不重合)，现将 $\triangle PCD$ 沿直线 PD 折叠，使点 C 落到点 F 处；过点 P 作 $\angle BPF$ 的角平分线交 AB 于点 E. 设 $BP=x$ ， $BE=y$ ，则下列图象中，能表示 y 与 x 的函数关系的图象大致是 ()



考点： 动点问题的函数图象.

分析： 证明 $\triangle BPE \sim \triangle CDP$ ，根据相似三角形的对应边的比相等求得 y 与 x 的函数关系式，根据函数的性质即可作出判断.

解答： 解： $\because \angle CPD = \angle FPD, \angle BPE = \angle FPE,$

又 $\because \angle CPD + \angle FPD + \angle BPE + \angle FPE = 180^\circ,$

$\therefore \angle CPD + \angle BPE = 90^\circ,$

又 $\because$ 直角 $\triangle BPE$ 中, $\angle BPE + \angle BEP = 90^\circ,$

$\therefore \angle BEP = \angle CPD,$

又 $\because \angle B = \angle C,$

$\therefore \triangle BPE \sim \triangle CDP,$

$\therefore \frac{BP}{CD} = \frac{BE}{PC},$ 即 $\frac{x}{3} = \frac{y}{5-x},$ 则 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3},$ y 是 x 的二次函数, 且开口向下.

故选 C.

点评： 本题考查了动点问题的函数图象, 求函数的解析式, 就是把自变量当作已知数值, 然后求函数变量 y 的值, 即求线段长的问题, 正确证明 $\triangle BPE \sim \triangle CDP$ 是关键.

二、填空题 (本题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. (3 分) (2015•酒泉) 分解因式: $x^3y - 2x^2y + xy = \underline{xy(x-1)^2}.$

考点： 提公因式法与公式法的综合运用.

专题： 计算题.

分析： 原式提取公因式, 再利用完全平方公式分解即可.

解答： 解: 原式 $= xy(x^2 - 2x + 1) = xy(x-1)^2.$

故答案为: $xy(x-1)^2$

点评： 此题考查了提公因式法与公式法的综合运用, 熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

12. (3 分) (2015•酒泉) 分式方程 $\frac{2}{x} = \frac{5}{x+3}$ 的解是 $x=2$.

考点： 解分式方程.

分析： 观察可得最简公分母是 $x(x+3)$ ，方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解.

解答： 解：方程的两边同乘 $x(x+3)$ ，得

$$2(x+3) = 5x,$$

解得 $x=2$.

检验：把 $x=2$ 代入 $x(x+3) = 10 \neq 0$ ，即 $x=2$ 是原分式方程的解.

故原方程的解为： $x=2$.

故答案为： $x=2$.

点评： 此题考查了分式方程的求解方法. 注意：①解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解，②解分式方程一定要注意要验根.

13. (3 分) (2015•酒泉) 在函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 中，自变量 x 的取值范围是 $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$.

考点： 函数自变量的取值范围.

分析： 根据二次根式的性质和分式的意义，被开方数大于或等于 0，分母不等于 0，可以求出 x 的范围.

解答： 解：根据题意得： $x+1 \geq 0$ 且 $x \neq 0$,

解得： $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$.

故答案为： $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$.

点评： 考查了函数自变量的取值范围，函数自变量的取值范围一般从三个方面考虑：

- (1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；
- (2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；
- (3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负.

14. (3 分) (2015•酒泉) 定义新运算：对于任意实数 a , b 都有： $a \oplus b = a(a - b) + 1$ ，其中等式右边是通常的加法、减法及乘法运算．如： $2 \oplus 5 = 2 \times (2 - 5) + 1 = 2 \times (-3) + 1 = -5$ ，那么不等式 $3 \oplus x < 13$ 的解集为 $x > -1$ ．

考点：一元一次不等式的应用．

专题：新定义．

分析：根据运算的定义列出不等式，然后解不等式求得不等式的解集即可．

解答：解： $3 \oplus x < 13$,

$$3(3 - x) + 1 < 13,$$

解得： $x > -1$ ．

故答案为： $x > -1$ ．

点评：此题考查一元一次不等式解集的求法，理解运算的方法，改为不等式是解决问题的关键．

15. (3 分) (2015•酒泉) 已知 α 、 β 均为锐角，且满足 $|\sin \alpha - \frac{1}{2}| + \sqrt{(\tan \beta - 1)^2} = 0$ ，则 $\alpha + \beta =$ 75° ．

考点：特殊角的三角函数值；非负数的性质：绝对值；非负数的性质：算术平方根．

分析：根据非负数的性质求出 $\sin \alpha$ 、 $\tan \beta$ 的值，然后根据特殊角的三角函数值求出两个角的度数．

解答：解： $\because |\sin \alpha - \frac{1}{2}| + \sqrt{(\tan \beta - 1)^2} = 0$,

$$\therefore \sin \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = 1,$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ,$$

$$\text{则 } \alpha + \beta = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ.$$

故答案为： 75° ．

点评： 本题考查了特殊角的三角函数值，解答本题的关键是掌握几个特殊角的三角函数值.

16. (3 分) (2015•酒泉) 关于 x 的方程 $kx^2 - 4x - \frac{2}{3} = 0$ 有实数根，则 k 的取值范围是 $k \geq -6$.

考点： 根的判别式；一元二次方程的解.

分析： 由于 k 的取值不确定，故应分 $k=0$ (此时方程化简为一元一次方程) 和 $k \neq 0$ (此时方程为二元一次方程) 两种情况进行解答.

解答： 解：当 $k=0$ 时， $-4x - \frac{2}{3} = 0$ ，解得 $x = -\frac{1}{6}$ ，

当 $k \neq 0$ 时，方程 $kx^2 - 4x - \frac{2}{3} = 0$ 是一元二次方程，

根据题意可得： $\Delta = 16 - 4k \times (-\frac{2}{3}) \geq 0$ ，

解得 $k \geq -6$ ， $k \neq 0$ ，

综上 $k \geq -6$ ，

故答案为 $k \geq -6$.

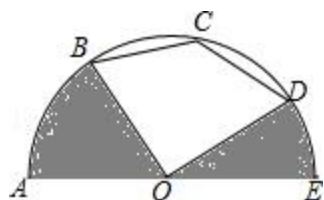
点评： 本题考查的是根的判别式，注意掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：①当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；

②当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；③当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根. 同

时解答此题时要注意分 $k=0$ 和 $k \neq 0$ 两种情况进行讨论.

17. (3 分) (2015•酒泉) 如图，半圆 O 的直径 $AE=4$ ，点 B ， C ， D 均在半圆上，若 $AB=BC$ ， $CD=DE$ ，连接 OB ， OD ，则图中阴影部分的面积为 π .



考点：扇形面积的计算.

分析：根据题意可知，图中阴影部分的面积等于扇形 BOD 的面积，根据扇形面积公式即可求解.

解答：解：∵AB=BC，CD=DE，

$$\therefore \widehat{AB}=\widehat{BC}, \widehat{CD}=\widehat{DE},$$

$$\therefore \widehat{AB}+\widehat{DE}=\widehat{BC}+\widehat{CD},$$

$$\therefore \angle BOD=90^{\circ},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形 OBD}}=\frac{90\pi\times(4\div 2)^2}{360}=\pi.$$

故答案是：π.

点评：本题考查了扇形的面积计算及圆心角、弧之间的关系. 解答本题的关键是得出阴影部分的面积等于扇形 BOD 的面积.

18. (3 分) (2015•酒泉) 古希腊数学家把数 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...叫做三角形数, 其中 1 是第一个三角形数, 3 是第 2 个三角形数, 6 是第 3 个三角形数, ...依此类推, 那么第 9 个三角形数是 45, 2016 是第 63 个三角形数.

考点：规律型：数字的变化类.

分析：根据所给的数据发现：第 n 个三角形数是 $1+2+3+\dots+n$, 由此代入分别求得答案即可.

解答：解：第 9 个三角形数是 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$,

$$1+2+3+4+\dots+n=2016,$$

$$n(n+1)=4032,$$

解得：n=63.

故答案为：45, 63.

点评：此题考查数字的变化规律, 找出数字之间的运算规律, 利用规律解决问题.

三、解答题（本题共 5 小题，共 26 分）

19. (4 分) (2015•酒泉) 计算: $(\pi - \sqrt{5})^0 + \sqrt{4} + (-1)^{2015} - \sqrt{3}\tan 60^\circ$.

考点: 实数的运算; 零指数幂; 特殊角的三角函数值.

专题: 计算题.

分析: 原式第一项利用零指数幂法则计算, 第二项利用算术平方根定义计算, 第三项利用乘方的意义化简, 最后一项利用特殊角的三角函数值计算即可得到结果.

解答: 解: 原式 $= 1 + 2 - 1 - \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$$= 2 - 3$$

$$= -1.$$

点评: 此题考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (4 分) (2015•酒泉) 先化简, 再求值: $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \div (1 - \frac{3}{x+1})$, 其中 $x=0$.

考点: 分式的化简求值.

分析: 先根据分式混合运算的法则把原式进行化简, 再把 $x=0$ 代入进行计算即可.

解答: 解: 原式 $= \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} \div (\frac{x+1}{x+1} - \frac{3}{x+1})$

$$= \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x+1}{x-2}$$

$$= \frac{x-1}{x-2}$$

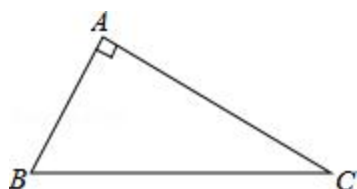
$$\text{当 } x=0 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{2}.$$

点评: 本题考查的是分式的化简求值, 熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键.

21. (6 分) (2015•酒泉) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$

(1) 请用圆规和直尺作出 $\odot P$ ，使圆心 P 在 AC 边上，且与 AB ， BC 两边都相切（保留作图痕迹，不写作法和证明）.

(2) 若 $\angle B=60^\circ$ ， $AB=3$ ，求 $\odot P$ 的面积.

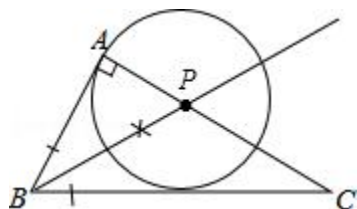


考点： 作图—复杂作图；切线的性质.

分析： (1) 作 $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于 P ，再以 P 为圆心 PA 为半径即可作出 $\odot P$;

(2) 根据角平分线的性质得到 $\angle ABP=30^\circ$ ，根据三角函数可得 $AP=\sqrt{3}$ ，再根据圆的面积公式即可求解.

解答： 解：(1) 如图所示，则 $\odot P$ 为所求作的圆.



(2) $\because \angle B=60^\circ$ ， BP 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABP=30^\circ,$$

$$\because \tan \angle ABP = \frac{AP}{AB},$$

$$\therefore AP = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\odot P} = 3\pi.$$

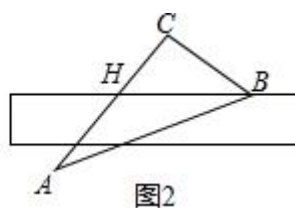
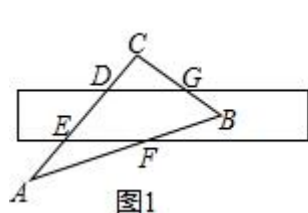
点评： 本题主要考查了作图—复杂作图，角平分线的性质，即角平分线上的点到角两边的距离相等．同时考查了圆的面积.

22. (6分) (2015•酒泉) 如图①所示, 将直尺摆放在三角板上, 使直尺与三角板的边分别交于点 D, E, F, G, 已知 $\angle CGD=42^\circ$

(1) 求 $\angle CEF$ 的度数;

(2) 将直尺向下平移, 使直尺的边缘通过三角板的顶点 B, 交 AC 边于点 H, 如图②所示, 点 H, B 在直尺上的度数分别为 4, 13.4, 求 BC 的长 (结果保留两位小数).

(参考数据: $\sin 42^\circ \approx 0.67$, $\cos 42^\circ \approx 0.74$, $\tan 42^\circ \approx 0.90$)



考点: 解直角三角形.

分析: (1) 先根据直角三角形的两锐角互余求出 $\angle CDG$ 的度数, 再根据两直线平行, 同位角相等求出 $\angle DEF$, 然后根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和即可求出 $\angle EFA$;

(2) 根据度数求出 HB 的长度, 再根据 $\angle CBH = \angle CGD = 42^\circ$, 利用 42° 的余弦值进求解.

解答: 解: (1) $\because \angle CGD = 42^\circ$, $\angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CDG = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ,$$

$$\because DG \parallel EF,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle CDG = 48^\circ;$$

(2) $\because$ 点 H, B 的读数分别为 4, 13.4,

$$\therefore HB = 13.4 - 4 = 9.4 \text{ (m)},$$

$$\therefore BC = HB \cos 42^\circ \approx 9.4 \times 0.74 \approx 6.96 \text{ (m)}.$$

答：BC 的长为 6.96m.

点评： 本题考查了解直角三角形与平行线的性质，直角三角形两锐角互余的性质，三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和，综合性较强，但难度不大，仔细分析图形并认真计算即可.

23. (6 分) (2015•酒泉) 有三张卡片 (形状、大小、颜色、质地都相等)，正面分别下上整式 x^2+1 ， $-x^2-2$ ， 3 . 将这三张卡片背面向上洗匀，从中任意抽取一张卡片，记卡片上的整式为 A，再从剩下的卡片中任意抽取一张，记卡片上的整式为 B，于是得到代数式 $\frac{A}{B}$.

(1) 请用画树状图或列表的方法，写出代数式 $\frac{A}{B}$ 所有可能的结果；

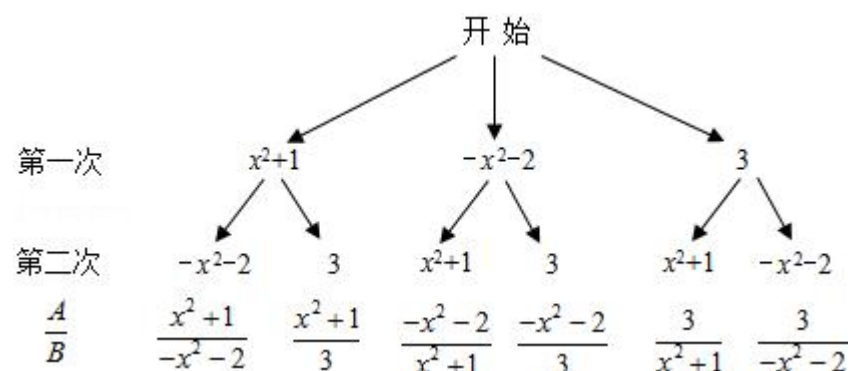
(2) 求代数式 $\frac{A}{B}$ 恰好是分式的概率.

考点： 列表法与树状图法；分式的定义.

分析： (1) 首先根据题意画出树状图，然后由树状图即可求得所有等可能的结果；

(2) 由 (1) 中的树状图，可求得抽取的两张卡片结果能组成分式的情况，然后利用概率公式求解即可求得答案.

解答： 解：(1) 画树状图：



列表：

第一次

第二次 $x^2+1 - x^2 - 2$ 3

$$x^2+1 \quad \frac{-x^2-2}{x^2+1} \quad \frac{3}{x^2+1}$$

$$-x^2-2 \quad \frac{x^2+1}{-x^2-2} \quad \frac{3}{-x^2-2}$$

$$3 \quad \frac{x^2+1}{3} \quad \frac{-x^2-2}{3}$$

(2) 代数式 $\frac{A}{B}$ 所有可能的结果共有 6 种, 其中代数式 $\frac{A}{B}$ 是分式的有 4 种: $\frac{x^2+1}{-x^2-2}$,

$$\frac{-x^2-2}{x^2+1}, \quad \frac{3}{x^2+1}, \quad \frac{3}{-x^2-2},$$

$$\text{所以 } P(\text{是分式}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

点评: 此题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 注意列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 列表法适合于两步完成的事件, 树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 注意概率=所求情况数与总情况数之比.

四、解答题 (本题共 5 小题, 共 40 分)

24. (7 分) (2015•酒泉) 某班同学响应“阳光体育运动”号召, 利用课外活动积极参加体育锻炼, 每位同学从长跑、铅球、立定跳远、篮球定时定点投篮中任选一项进行了训练, 训练前后都进行了测试, 现将项目选择情况及训练后篮球定时定点投篮进球数进行整理, 作出如下统计图表.

训练后篮球定点投篮测试进球统计表

进球数 (个)	8	7	6	5	4	3
人数	2	1	4	7	8	2

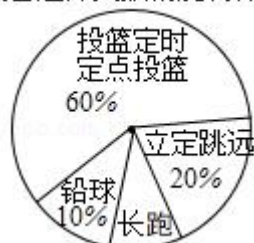
请你根据图表中的信息回答下列问题:

(1) 训练后篮球定时定点投篮人均进球数为 5 个;

(2) 选择长跑训练的人数占全班人数的百分比是 10%，该班共有同学 40 人；

(3) 根据测试资料，参加篮球定时定点投篮的学生训练后比训练前的人均进球增加了 25%，求参加训练之前的人均进球数.

项目选择人数情况统计图



考点： 扇形统计图；一元一次方程的应用；统计表.

分析： (1) 根据平均数的概念计算平均进球数；

(2) 根据所有人数的比例和为 1 计算选择长跑训练的人数占全班人数的百分比；

由总人数=某种运动的人数÷所占比例计算总人数；

(3) 通过比较训练前后的成绩，利用增长率的意义即可列方程求解.

解答： 解：(1) 参加篮球训练的人数是： $2+1+4+7+8+2=24$ (人).

训练后篮球定时定点投篮人均进球数=
$$\frac{8 \times 2 + 7 \times 1 + 6 \times 4 + 5 \times 7 + 4 \times 8 + 3 \times 2}{24} = 5$$

(个).

故答案是：5；

(2) 由扇形图可以看出：选择长跑训练的人数占全班人数的百分比= $1 - 60\% - 10\% - 20\% = 10\%$,

则全班同学的人数为 $24 \div 60\% = 40$ (人),

故答案是：10%，40；

(3) 设参加训练之前的人均进球数为 x 个，

则 $x(1+25\%) = 5$ ，解得 $x=4$.

即参加训练之前的人均进球数是 4 个.

点评： 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

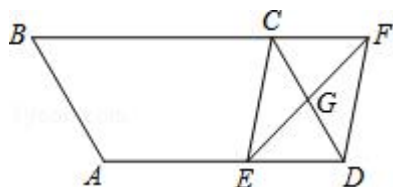
25. (7分) (2015•酒泉) 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=3\text{cm}$, $BC=5\text{cm}$, $\angle B=60^\circ$, G 是 CD 的中点, E 是边 AD 上的动点, EG 的延长线与 BC 的延长线交于点 F , 连结 CE , DF .

(1) 求证: 四边形 $CEDF$ 是平行四边形;

(2) ①当 $AE=$ 3.5 cm 时, 四边形 $CEDF$ 是矩形;

②当 $AE=$ 2 cm 时, 四边形 $CEDF$ 是菱形.

(直接写出答案, 不需要说明理由)



考点: 平行四边形的判定与性质; 菱形的判定; 矩形的判定.

专题: 动点型.

分析: (1) 证 $\triangle CFG \cong \triangle EDG$, 推出 $FG=EG$, 根据平行四边形的判定推出即可;

(2) ①求出 $\triangle MBA \cong \triangle EDC$, 推出 $\angle CED = \angle AMB = 90^\circ$, 根据矩形的判定推出即可;

②求出 $\triangle CDE$ 是等边三角形, 推出 $CE=DE$, 根据菱形的判定推出即可.

解答: (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore CF \parallel ED$,

$\therefore \angle FCG = \angle EDG$,

$\because G$ 是 CD 的中点,

$\therefore CG = DG$,

在 $\triangle FCG$ 和 $\triangle EDG$ 中,

$$\begin{cases} \angle FCG = \angle EDG \\ CG = DG \\ \angle CGF = \angle DGE \end{cases},$$

$\therefore \triangle FCG \cong \triangle EDG$ (ASA)

$\therefore FG = EG,$

$\because CG = DG,$

$\therefore$ 四边形 CEDF 是平行四边形;

(2) ①解: 当 $AE=3.5$ 时, 平行四边形 CEDF 是矩形,

理由是: 过 A 作 $AM \perp BC$ 于 M,

$\because \angle B = 60^\circ, AB = 3,$

$\therefore BM = 1.5,$

$\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore \angle CDA = \angle B = 60^\circ, DC = AB = 3, BC = AD = 5,$

$\because AE = 3.5,$

$\therefore DE = 1.5 = BM,$

在 $\triangle MBA$ 和 $\triangle EDC$ 中,

$$\begin{cases} BM = DE \\ \angle B = \angle CDA, \\ AB = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle MBA \cong \triangle EDC$ (SAS),

$\therefore \angle CED = \angle AMB = 90^\circ,$

$\because$ 四边形 CEDF 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 CEDF 是矩形,

故答案为: 3.5;

②当 $AE=2$ 时，四边形 $CEDF$ 是菱形，

理由是： $\because AD=5, AE=2,$

$\therefore DE=3,$

$\because CD=3, \angle CDE=60^\circ,$

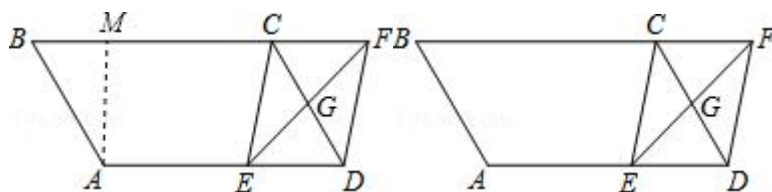
$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形，

$\therefore CE=DE,$

$\because$ 四边形 $CEDF$ 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是菱形，

故答案为： 2.

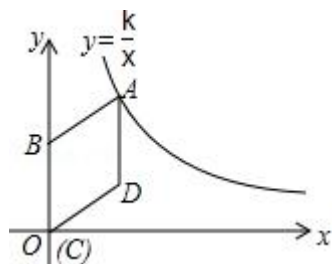


点评： 本题考查了平行四边形的性质和判定，菱形的判定，矩形的判定，等边三角形的性质和判定，全等三角形的性质和判定的应用，注意：有一组邻边相等的平行四边形是菱形，有一个角是直角的平行四边形是矩形.

26. (8 分) (2015•酒泉) 如图，在平面直角坐标系中，菱形 $ABCD$ 的顶点 C 与原点 O 重合，点 B 在 y 轴的正半轴上，点 A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0, x>0$) 的图象上，点 D 的坐标为 $(4, 3)$.

(1) 求 k 的值；

(2) 若将菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移，当菱形的顶点 D 落在函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0, x>0$) 的图象上时，求菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移的距离.



考点：反比例函数综合题.

分析：（1）过点 D 作 x 轴的垂线，垂足为 F，首先得出 A 点坐标，再利用反比例函数图象上点的坐标性质得出即可；

（2）将菱形 ABCD 沿 x 轴正方向平移，使得点 D 落在函数 $y = \frac{32}{x}$ ($x > 0$) 的图象 D' 点处，得出点 D' 的纵坐标为 3，求出其横坐标，进而得出菱形 ABCD 平移的距离.

解答：解：（1）过点 D 作 x 轴的垂线，垂足为 F，

$\because$ 点 D 的坐标为 (4, 3),

$\therefore OF=4, DF=3,$

$\therefore OD=5,$

$\therefore AD=5,$

$\therefore$ 点 A 坐标为 (4, 8),

$\therefore k=xy=4 \times 8=32,$

$\therefore k=32;$

（2）将菱形 ABCD 沿 x 轴正方向平移，使得点 D 落在函数 $y = \frac{32}{x}$ ($x > 0$) 的图象 D' 点处，

过点 D' 做 x 轴的垂线，垂足为 F'.

$\because DF=3,$

$$\therefore D'F'=3,$$

$\therefore$ 点 D' 的纵坐标为 3,

$\therefore$ 点 D' 在 $y=\frac{32}{x}$ 的图象上

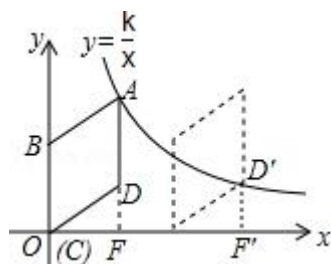
$$\therefore 3=\frac{32}{x},$$

$$\text{解得: } x=\frac{32}{3},$$

$$\text{即 } OF'=\frac{32}{3},$$

$$\therefore FF'=\frac{32}{3}-4=\frac{20}{3},$$

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 平移的距离为 $\frac{20}{3}$.

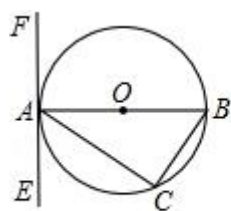


点评: 此题主要考查了反比例函数综合以及反比例函数图象上点的坐标性质, 得出 A 点坐标是解题关键.

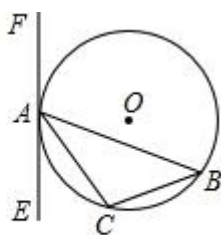
27. (8 分) (2015•酒泉) 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, 过点 A 作直线 EF.

(1) 如图①所示, 若 AB 为 $\odot O$ 的直径, 要使 EF 成为 $\odot O$ 的切线, 还需要添加的一个条件是 (至少说出两种): $\angle BAE=90^\circ$ 或者 $\angle EAC=\angle ABC$.

(2) 如图②所示, 如果 AB 是不过圆心 O 的弦, 且 $\angle CAE=\angle B$, 那么 EF 是 $\odot O$ 的切线吗? 试证明你的判断.



图①



图②

考点：切线的判定.

分析：（1）求出 $\angle BAE=90^\circ$ ，再根据切线的判定定理推出即可；

（2）作直径AM，连接CM，根据圆周角定理求出 $\angle M=\angle B$ ， $\angle ACM=90^\circ$ ，求出 $\angle MAC+\angle CAE=90^\circ$ ，再根据切线的判定推出即可.

解答：解：（1）① $\angle BAE=90^\circ$ ，② $\angle EAC=\angle ABC$ ，

理由是：① $\because \angle BAE=90^\circ$ ，

$\therefore AE \perp AB$ ，

$\because AB$ 是直径，

$\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线；

② $\because AB$ 是直径，

$\therefore \angle ACB=90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC+\angle BAC=90^\circ$ ，

$\because \angle EAC=\angle ABC$ ，

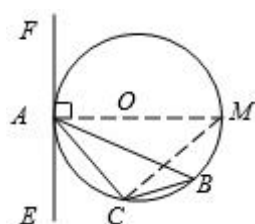
$\therefore \angle BAE=\angle BAC+\angle EAC=\angle BAC+\angle ABC=90^\circ$ ，

即 $AE \perp AB$ ，

$\because AB$ 是直径，

$\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线；

（2）EF 是 $\odot O$ 的切线.



证明：作直径 AM，连接 CM，

则 $\angle ACM=90^\circ$ ， $\angle M=\angle B$ ，

$\therefore \angle M+\angle CAM=\angle B+\angle CAM=90^\circ$ ，

$\because \angle CAE=\angle B$ ，

$\therefore \angle CAM+\angle CAE=90^\circ$ ，

$\therefore AE \perp AM$ ，

$\because AM$ 为直径，

$\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线.

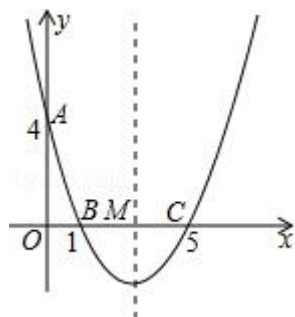
点评： 本题考查了圆周角定理，切线的判定的应用，主要考查学生运用定理进行推理的能力，注意：经过半径的外端，并且垂直于半径的直线是圆的切线.

28. (10 分) (2015•酒泉) 如图，在直角坐标系中，抛物线经过点 A (0, 4)，B (1, 0)，C (5, 0)，其对称轴与 x 轴相交于点 M.

(1) 求抛物线的解析式和对称轴；

(2) 在抛物线的对称轴上是否存在一点 P，使 $\triangle PAB$ 的周长最小？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由；

(3) 连接 AC，在直线 AC 的下方的抛物线上，是否存在一点 N，使 $\triangle NAC$ 的面积最大？若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由.



考点： 二次函数综合题.

分析： (1) 抛物线经过点 A (0, 4), B (1, 0), C (5, 0), 可利用两点式法设抛物线的解析式为 $y=a(x-1)(x-5)$, 代入 A (0, 4) 即可求得函数的解析式, 则可求得抛物线的对称轴;

(2) 点 A 关于对称轴的对称点 A' 的坐标为 (6, 4), 连接 BA' 交对称轴于点 P, 连接 AP, 此时 $\triangle PAB$ 的周长最小, 可求出直线 BA' 的解析式, 即可得出点 P 的坐标.

(3) 在直线 AC 的下方的抛物线上存在点 N, 使 $\triangle NAC$ 面积最大. 设 N 点的横坐标为 t, 此时点 N $(t, \frac{4}{5}t^2 - \frac{24}{5}t + 4)$ ($0 < t < 5$), 再求得直线 AC 的解析式, 即可求得 NG 的长与 $\triangle ACN$ 的面积, 由二次函数最大值的问题即可求得答案.

解答： 解: (1) 根据已知条件可设抛物线的解析式为 $y=a(x-1)(x-5)$,

把点 A (0, 4) 代入上式得: $a=\frac{4}{5}$,

$$\therefore y=\frac{4}{5}(x-1)(x-5)=\frac{4}{5}x^2-\frac{24}{5}x+4=\frac{4}{5}(x-3)^2-\frac{16}{5},$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴是: $x=3$;

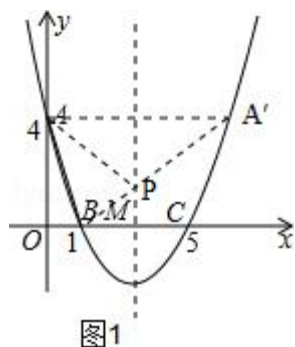
(2) P 点坐标为 $(3, \frac{8}{5})$.

理由如下:

$\because$ 点 A (0, 4), 抛物线的对称轴是 $x=3$,

$\therefore$ 点 A 关于对称轴的对称点 A' 的坐标为 (6, 4)

如图 1, 连接 BA' 交对称轴于点 P, 连接 AP, 此时 $\triangle PAB$ 的周长最小.



设直线 BA' 的解析式为 $y=kx+b$,

把 A' (6, 4), B (1, 0) 代入得 $\begin{cases} 4=6k+b \\ 0=k+b \end{cases}$,

$$\text{解得} \begin{cases} k=\frac{4}{5} \\ b=-\frac{4}{5} \end{cases},$$

$$\therefore y=\frac{4}{5}x-\frac{4}{5},$$

$\therefore$ 点 P 的横坐标为 3,

$$\therefore y=\frac{4}{5}\times 3-\frac{4}{5}=\frac{8}{5},$$

$$\therefore P\left(3, \frac{8}{5}\right).$$

(3) 在直线 AC 的下方的抛物线上存在点 N, 使 $\triangle NAC$ 面积最大.

设 N 点的横坐标为 t, 此时点 N $\left(t, \frac{4}{5}t^2 - \frac{24}{5}t + 4\right)$ ($0 < t < 5$),

如图 2, 过点 N 作 $NG \parallel y$ 轴交 AC 于 G; 作 $AD \perp NG$ 于 D,

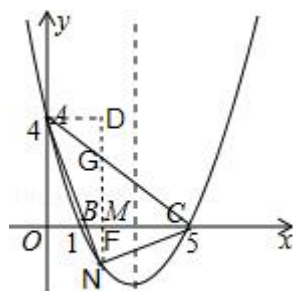


图2

由点 A (0, 4) 和点 C (5, 0) 可求出直线 AC 的解析式为: $y=-\frac{4}{5}x+4$,

把 $x=t$ 代入得: $y=-\frac{4}{5}t+4$, 则 $G\left(t, -\frac{4}{5}t+4\right)$,

$$\text{此时: } NG = -\frac{4}{5}t+4 - \left(\frac{4}{5}t^2 - \frac{24}{5}t + 4\right) = -\frac{4}{5}t^2 + 4t,$$

$$\therefore AD+CF=CO=5,$$

$$\therefore S_{\triangle ACN} = S_{\triangle ANG} + S_{\triangle CGN} = \frac{1}{2}AM \times NG + \frac{1}{2}NG \times CF = \frac{1}{2}NG \cdot OC = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{4}{5}t^2 + 4t\right) \times 5 = -$$

$$2t^2 + 10t = -2\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2},$$

$$\therefore \text{当 } t=\frac{5}{2} \text{ 时, } \triangle CAN \text{ 面积的最大值为 } \frac{25}{2},$$

由 $t = \frac{5}{2}$, 得: $y = \frac{4}{5}t^2 - \frac{24}{5}t + 4 = -3$,

$\therefore N\left(\frac{5}{2}, -3\right)$.

点评: 本题主要考查了二次函数与方程、几何知识的综合应用, 解题的关键是方程思想与数形结合思想的灵活应用.