

2015 年甘肃省庆阳市中考数学试卷

一、选择题（本题包括 12 小题，每小题 3 分，共 36 分，每小题只有一个选项符合题意）

1. $-\frac{1}{3}$ 的相反数是（ ）

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

2. (3 分) (2015•庆阳) 在以下绿色食品、回收、节能、节水四个标志中，是轴对称图形的是（ ）



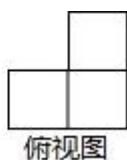
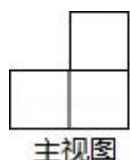
3. (3 分) (2015•庆阳) 2015 羊年春晚在某网站取得了同时在线人数超 14 000 000 的惊人成绩，创下了全球单平台网络直播记录，则 14 000 000 用科学记数法可表示为（ ）

- A. 0.14×10^8 B. 1.4×10^7 C. 1.4×10^8 D. 14×10^6

4. (3 分) (2015•庆阳) 下列说法属于不可能事件的是（ ）

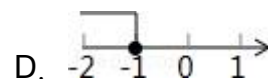
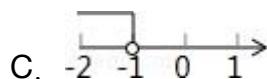
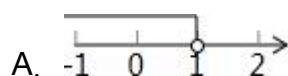
- A. 四边形的内角和为 360° B. 梯形的对角线不相等
C. 内错角相等 D. 存在实数 x 满足 $x^2+1=0$

5. (3 分) (2015•庆阳) 某几何体由一些大小相同的小正方体组成，如图分别是它的主视图和俯视图，那么要组成该几何体，至少需要多少个这样的小正方体（ ）



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

6. (3分) (2015•庆阳) 已知点 $P(a+1, -\frac{a}{2}+1)$ 关于原点对称的点在第四象限, 则 a 的取值范围在数轴上表示正确的是 ()



7. (3分) (2015•庆阳) 在 $\triangle ABC$ 中, 若角 A, B 满足 $|\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}| + (1 - \tan B)^2 = 0$, 则 $\angle C$ 的大小是 ()

A. 45°

B. 60°

C. 75°

D. 105°

8. (3分) (2015•庆阳) 书架上有 3 本小说、2 本散文, 从中随机抽取 2 本都是小说的概率是 ()

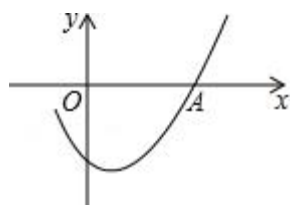
A. $\frac{3}{10}$

B. $\frac{6}{25}$

C. $\frac{9}{25}$

D. $\frac{3}{5}$

9. (3分) (2015•庆阳) 如图是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象的一部分, 且过点 $A(3, 0)$, 二次函数图象的对称轴是直线 $x=1$, 下列结论正确的是 ()



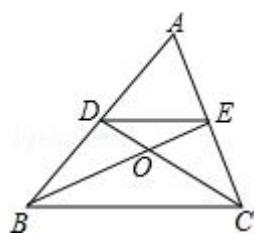
A. $b^2 < 4ac$

B. $ac > 0$

C. $2a - b = 0$

D. $a - b + c = 0$

10. (3分) (2015•庆阳) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 两条中线 BE, CD 相交于点 O , 则 $S_{\triangle DOE} : S_{\triangle DCE} =$ ()



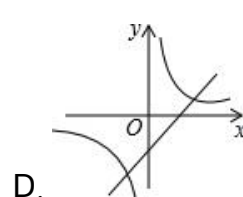
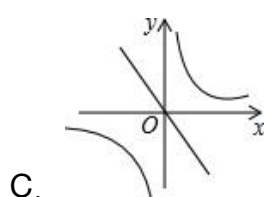
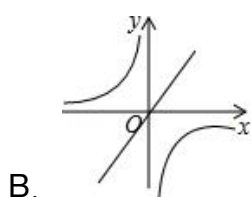
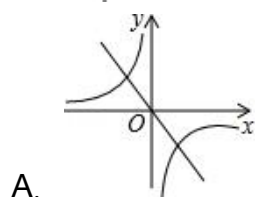
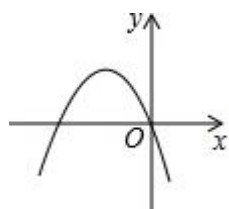
A. 1: 4

B. 1: 3

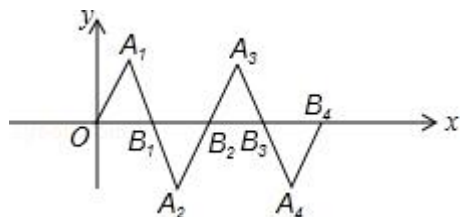
C. 1: 2

D. 2: 3

11. (3分) (2015•庆阳) 如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示, 那么一次函数 $y=bx+c$ 和反比例函数 $y=\frac{b}{x}$ 在同一坐标系中的图象大致是 ()



12. (3分) (2015•庆阳) 在如图所示的平面直角坐标系中, $\triangle OA_1B_1$ 是边长为 2 的等边三角形, 作 $\triangle B_2A_2B_1$ 与 $\triangle OA_1B_1$ 关于点 B_1 成中心对称, 再作 $\triangle B_2A_3B_3$ 与 $\triangle B_2A_2B_1$ 关于点 B_2 成中心对称, 如此作下去, 则 $\triangle B_{2n}A_{2n+1}B_{2n+1}$ (n 是正整数) 的顶点 A_{2n+1} 的坐标是 ()

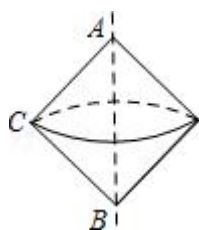
A. $(4n-1, \sqrt{3})$ B. $(2n-1, \sqrt{3})$ C. $(4n+1, \sqrt{3})$ D. $(2n+1, \sqrt{3})$

二、填空题 (本题包括 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

13. (3分) (2015•庆阳) 函数 $y=\frac{\sqrt{1-2x}}{x}$ 的自变量 x 的取值范围是_____.

14. (3分) (2015•庆阳) $\sqrt{16}$ 的平方根是_____.

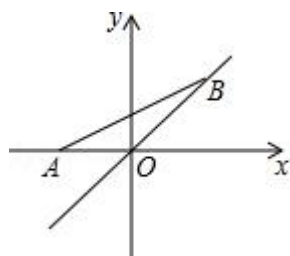
15. (3分) (2015•庆阳) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=2\sqrt{2}$, 若把 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕边 AB 所在直线旋转一周, 则所得几何体的表面积为_____ (结果保留 π).



16. (3分) (2015•庆阳) 若 $-2x^m \cdot y^2$ 与 $3x^4 y^{2m+n}$ 是同类项, 则 $m-3n$ 的立方根是_____.

17. (3分) (2015•庆阳) 有六张完全相同的卡片, 其正面分别标有数字: -2 , $\sqrt{7}$, π , 0 , $\sqrt{4}$, $3.\dot{1}\dot{4}$, 将它们背面朝上洗匀后, 从中随机抽取一张卡片, 则其正面的数字为无理数的概率是_____.

18. (3分) (2015•庆阳) 如图, 定点 $A(-2, 0)$, 动点 B 在直线 $y=x$ 上运动, 当线段 AB 最短时, 点 B 的坐标为_____.

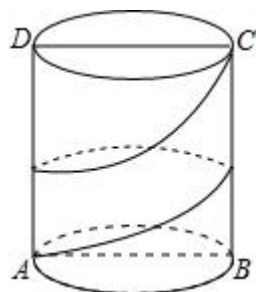


19. (3分) (2015•庆阳) 已知三条不同的直线 a 、 b 、 c 在同一平面内, 下列四条命题:

- ①如果 $a \parallel b$, $a \perp c$, 那么 $b \perp c$; ②如果 $b \parallel a$, $c \parallel a$, 那么 $b \parallel c$;
③如果 $b \perp a$, $c \perp a$, 那么 $b \perp c$; ④如果 $b \perp a$, $c \perp a$, 那么 $b \parallel c$.

其中真命题的是_____. (填写所有真命题的序号)

20. (3分) (2015•庆阳) 在底面直径为 2cm，高为 3cm 的圆柱体侧面上，用一条无弹性的丝带从 A 至 C 按如图所示的圈数缠绕，则丝带的最短长度为_____cm. (结果保留 π)

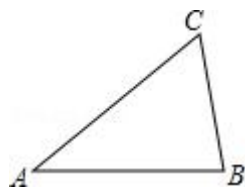


三、解答题 (本题包括 9 小题，共 90 分)

21. (8分) (2015•庆阳) 计算: $(\sqrt{3}-2)^0 + (\frac{1}{3})^{-1} + 4\cos 30^\circ - |\sqrt{3} - \sqrt{27}|$

22. (8分) (2015•庆阳) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=60^\circ$ ， $\angle A=40^\circ$.

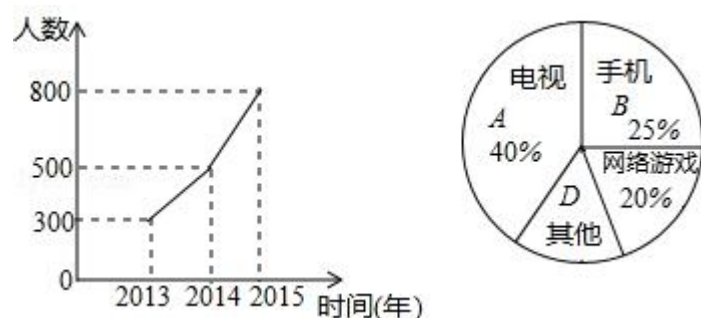
- (1) 用尺规作图作 AB 的垂直平分线，交 AC 于点 D，交 AB 于点 E (保留作图痕迹，不要求写作法和证明)；
- (2) 求证: BD 平分 $\angle CBA$.



23. (8分) (2015•庆阳) 已知关于 x 的一元二次方程 $\frac{1}{2}mx^2 + mx + m - 1 = 0$ 有两个相等的实数根.

- (1) 求 m 的值;
- (2) 解原方程.

24. (10 分) (2015•庆阳) 现在的青少年由于沉迷电视、手机、网络游戏等, 视力日渐减退, 某市为了解学生的视力变化情况, 从全市九年级随机抽取了 1500 名学生, 统计了每个人连续三年视力检查的结果, 根据视力在 4.9 以下的人数变化制成折线统计图, 并对视力下降的主要因素进行调查, 制成扇形统计图.

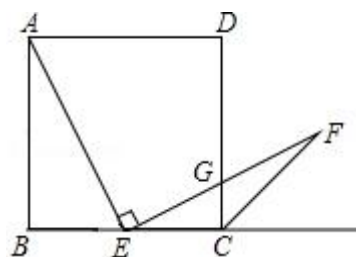


解答下列问题:

- (1) 图中 D 所在扇形的圆心角度数为 54° ;
- (2) 若 2015 年全市共有 30000 名九年级学生, 请你估计视力在 4.9 以下的学生约有多少名?
- (3) 根据扇形统计图信息, 你觉得中学生应该如何保护视力?

25. (10 分) (2015•庆阳) 如图, 在正方形 ABCD 中, 点 E 是边 BC 的中点, 直线 EF 交正方形外角的平分线于点 F, 交 DC 于点 G, 且 $AE \perp EF$.

- (1) 当 $AB=2$ 时, 求 $\triangle GEC$ 的面积;
- (2) 求证: $AE=EF$.



26. (10 分) (2015•庆阳) 某体育用品专卖店销售 7 个篮球和 9 个排球的总利润为 355 元, 销售 10 个篮球和 20 个排球的总利润为 650 元.

(1) 求每个篮球和每个排球的销售利润;

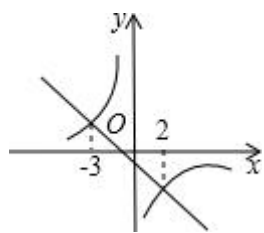
(2) 已知每个篮球的进价为 200 元, 每个排球的进价为 160 元, 若该专卖店计划用不超过 17400 元购进篮球和排球共 100 个, 且要求篮球数量不少于排球数量的一半, 请你为专卖店设计符合要求的进货方案.

27. (12 分) (2015•庆阳) 定义运算 $\max\{a, b\}$: 当 $a \geq b$ 时, $\max\{a, b\} = a$; 当 $a < b$ 时, $\max\{a, b\} = b$. 如 $\max\{-3, 2\} = 2$.

(1) $\max\{\sqrt{7}, 3\} = \underline{3}$;

(2) 已知 $y_1 = \frac{k_1}{x}$ 和 $y_2 = k_2x + b$ 在同一坐标系中的图象如图所示, 若 $\max\{\frac{k_1}{x}, k_2x + b\} = \frac{k_1}{x}$, 结合图象, 直接写出 x 的取值范围;

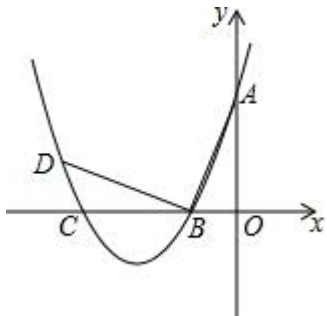
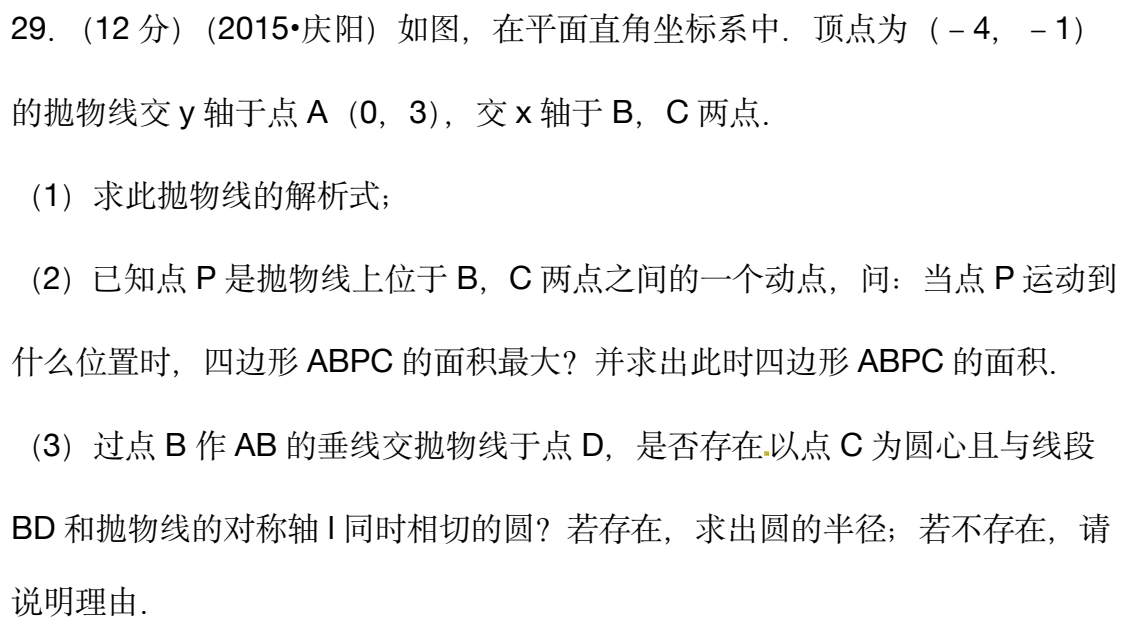
(3) 用分类讨论的方法, 求 $\max\{2x+1, x-2\}$ 的值.



28. (12 分) (2015•庆阳) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 以 AC 为直径作 $\odot O$ 交 BC 于点 D , 过点 D 作 $\odot O$ 的切线, 交 AB 于点 E , 交 CA 的延长线于点 F .

(1) 求证: $FE \perp AB$;

(2) 当 $EF = 6$, $\frac{OA}{OF} = \frac{3}{5}$ 时, 求 DE 的长.



2015 年甘肃省庆阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题包括 12 小题，每小题 3 分，共 36 分，每小题只有一个选项符合题意）

1. $-\frac{1}{3}$ 的相反数是（ ）

A. 3

B. -3

C. $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

考点： 相反数.

分析： 一个数的相反数就是在这个数前面添上“-”号.

解答： 解： $-\frac{1}{3}$ 的相反数是 $\frac{1}{3}$,

故选 C

点评： 本题考查了相反数的意义，一个数的相反数就是在这个数前面添上“-”号；一个正数的相反数是负数，一个负数的相反数是正数，0 的相反数是 0.

2. (3 分) (2015•庆阳) 在以下绿色食品、回收、节能、节水四个标志中，是轴对称图形的是（ ）



考点： 轴对称图形.

分析： 根据轴对称图形的概念求解. 如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴.

解答： 解： A、是轴对称图形，故 A 符合题意；

B、不是轴对称图形，故 B 不符合题意；

C、不是轴对称图形，故 C 不符合题意；

D、不是轴对称图形，故 D 不符合题意.

故选：A.

点评： 本题主要考查轴对称图形的知识点. 确定轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合.

3. (3 分) (2015•庆阳) 2015 羊年春晚在某网站取得了同时在线人数超 14 000 000 的惊人成绩，创下了全球单平台网络直播记录，则 14 000 000 用科学记数法可表示为 ()

- A. 0.14×10^8 B. 1.4×10^7 C. 1.4×10^8 D. 14×10^6

考点： 科学记数法—表示较大的数.

分析： 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

解答： 解： $14000000 = 1.4 \times 10^7$,

故选 B.

点评： 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. (3 分) (2015•庆阳) 下列说法属于不可能事件的是 ()

- A. 四边形的内角和为 360° B. 梯形的对角线不相等
C. 内错角相等 D. 存在实数 x 满足 $x^2 + 1 = 0$

考点： 随机事件.

分析： 不可能事件就是一定不会发生的事件，根据定义即可作出判断.

解答： 解：A、是随机事件，故选项错误；

B、是随机事件，故选项错误；

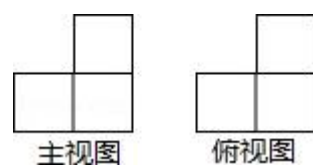
C、是随机事件，故选项错误；

D、不可能事件，故选项正确；

故选 D.

点评： 考查了随机事件. 解决本题需要正确理解必然事件、不可能事件、随机事件的概念. 必然事件指在一定条件下一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件. 不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件.

5. (3 分) (2015•庆阳) 某几何体由一些大小相同的小正方体组成，如图分别是它的主视图和俯视图，那么要组成该几何体，至少需要多少个这样的小正方体 ()



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

考点： 由三视图判断几何体.

专题： 数形结合.

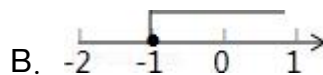
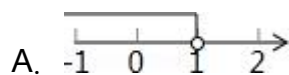
分析： 先由俯视图可得最底层有 3 个小正方体，然后根据主视图得到第二列由两层，于是可判断上面第二列至少有 1 个小正方体，从而得到几何体所需要最少小正方体的个数.

解答： 解：从俯视图可得最底层有 3 个小正方体，由主视图可得上面一层至少有 1 个小正方体，所以至少需要 4 个这样的小正方体。

故选 B.

点评： 本题考查了由三视图判断几何体：由三视图想象几何体的形状，首先，应分别根据主视图、俯视图和左视图想象几何体的前面、上面和左侧面的形状，然后综合起来考虑整体形状.

6. (3 分) (2015•庆阳) 已知点 P $(a+1, -\frac{a}{2}+1)$ 关于原点对称的点在第四象限，则 a 的取值范围在数轴上表示正确的是 ()



考点： 在数轴上表示不等式的解集；解一元一次不等式组；关于原点对称的点的坐标.

分析： 首先根据题意判断出 P 点在第二象限，再根据第二象限内点的坐标符号 $(-, +)$ ，可得到不等式 $a+1 < 0$ ， $-\frac{a}{2}+1 > 0$ ，然后解出 a 的范围即可.

解答： 解：∵ P $(a+1, -\frac{a}{2}+1)$ 关于原点对称的点在第四象限，

∴ P 点在第二象限，

∴ $a+1 < 0$ ， $-\frac{a}{2}+1 > 0$ ，

解得： $m < -1$ ，

则 a 的取值范围在数轴上表示正确的是

故选： C.

点评： 此题主要考查了关于原点对称的点的坐标特点，以及各象限内点的坐标符号，关键是判断出 P 点所在象限.

7. (3分) (2015•庆阳) 在 $\triangle ABC$ 中, 若角A, B满足 $|\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}| + (1 - \tan B)^2 = 0$, 则 $\angle C$ 的大小是 ()

- A. 45° B. 60° C. 75° D. 105°

考点: 特殊角的三角函数值; 非负数的性质: 绝对值; 非负数的性质: 偶次方.

分析: 根据非负数的性质得出 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan B = 1$, 求出 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的度数, 继而可求得 $\angle C$ 的度数.

解答: 解: 由题意得, $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan B = 1$,

则 $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$,

则 $\angle C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$.

故选D.

点评: 本题考查了特殊角的三角函数值, 解答本题的关键是掌握几个特殊角的三角函数值.

8. (3分) (2015•庆阳) 书架上有3本小说、2本散文, 从中随机抽取2本都是小说的概率是 ()

- A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{6}{25}$ C. $\frac{9}{25}$ D. $\frac{3}{5}$

考点: 列表法与树状图法.

分析: 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与随机抽取2本都是小说的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

解答: 解: 设三本小说分别为红、红、红、两本散文分别为白、白, 画树状图得:



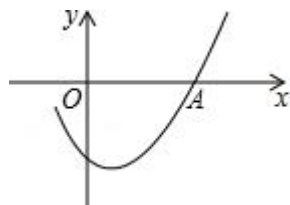
∴共有 20 种等可能的结果，从中随机抽取 2 本都是 6 种情况，

∴从中随机抽取 2 本都是小说的概率= $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ ，

故选 A.

点评： 此题考查的是用列表法或树状图法求概率．列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

9. (3 分) (2015•庆阳) 如图是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象的一部分，且过点 A (3, 0)，二次函数图象的对称轴是直线 $x=1$ ，下列结论正确的是 ()



- A. $b^2 < 4ac$ B. $ac > 0$ C. $2a - b = 0$ D. $a - b + c = 0$

考点： 二次函数图象与系数的关系．

分析： 根据抛物线与 x 轴有两个交点有 $b^2 - 4ac > 0$ 可对 A 进行判断；由抛物线开口向上得 $a > 0$ ，由抛物线与 y 轴的交点在 x 轴下方得 $c < 0$ ，则可对 B 进行判断；根据抛物线的对称性是 $x=1$ 对 C 选项进行判断；根据抛物线的对称性得到抛物线与 x 轴的另一个交点为 $(-1, 0)$ ，所以 $a - b + c = 0$ ，则可对 D 选项进行判断．

解答： 解：∵抛物线与 x 轴有两个交点，

$\therefore b^2 - 4ac > 0$, 即 $b^2 > 4ac$, 所以 A 选项错误;

$\therefore$ 抛物线开口向上,

$\therefore a > 0$,

$\therefore$ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴下方,

$\therefore c < 0$,

$\therefore ac < 0$, 所以 B 选项错误;

$\therefore$ 二次函数图象的对称轴是直线 $x=1$,

$\therefore -\frac{b}{2a}=1$, $\therefore 2a+b=0$, 所以 C 选项错误;

$\therefore$ 抛物线过点 A (3, 0), 二次函数图象的对称轴是 $x=1$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一个交点为 (-1, 0),

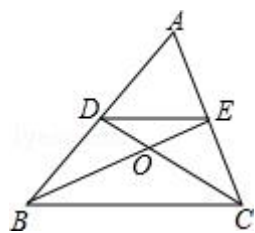
$\therefore a - b + c = 0$, 所以 D 选项正确;

故选: D.

点评: 本题考查了二次函数的图象与系数的关系: 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象为抛物线, 当 $a > 0$, 抛物线开口向上; 对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$; 抛物线与 y 轴的交点坐标为 (0, c); 当 $b^2 - 4ac > 0$, 抛物线与 x 轴有两个交点; 当 $b^2 - 4ac = 0$, 抛物线与 x 轴有一个交点; 当 $b^2 - 4ac < 0$, 抛物线与 x 轴没有交点.

10. (3 分) (2015•庆阳) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 两条中线 BE, CD 相交于点 O,

则 $S_{\triangle DOE} : S_{\triangle DCE} =$ ()



A. 1: 4

B. 1: 3

C. 1: 2

D. 2: 3

考点：相似三角形的判定与性质；三角形中位线定理.

分析：先根据题意判断出 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，故可得出 $\triangle ODE \sim \triangle OCB$ ，

由此可得出 $\frac{OD}{OC} = \frac{1}{2}$ ，进而可得出结论.

解答：解： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，两条中线 BE ， CD 相交于点 O ，

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore \triangle ODE \sim \triangle OCB$ ，

$$\therefore \frac{OD}{OC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{OD}{CD} = \frac{1}{3},$$

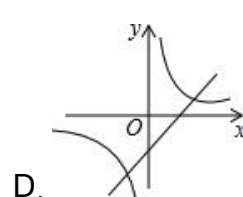
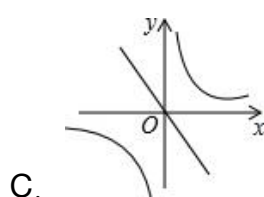
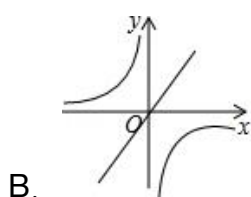
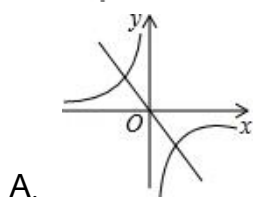
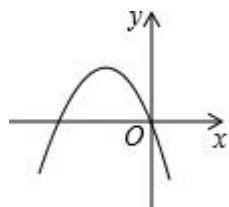
$\therefore \triangle DOE$ 与 $\triangle DCE$ 等高，

$\therefore S_{\triangle DOE} : S_{\triangle DCE} = OD : CD = 1 : 3$.

故选 B.

点评： 本题考查的是相似三角形的判定与性质，先根据题意得出 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线是解答此题的关键.

11. (3 分) (2015•庆阳) 如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，那么一次函数 $y=bx+c$ 和反比例函数 $y=\frac{b}{x}$ 在同一坐标系中的图象大致是 ()



考点： 二次函数的图象；一次函数的图象；反比例函数的图象.

分析： 根据二次函数的图象的性质先确定出 a 、 b 、 c 的取值范围，然后根据一次函数和反比例函数的性质即可做出判断.

解答： 解： $\because$ 抛物线开口向下，

$$\therefore a < 0,$$

$\because$ 抛物线的对称轴位于 y 轴的左侧；

$\therefore a$ 与 b 同号，

$$\therefore b < 0,$$

$\because$ 抛物线经过原点，所以 $c=0$.

$$\because b < 0, c=0,$$

$\therefore$ 直线 $y=bx+c$ 经过二、四象限和坐标原点.

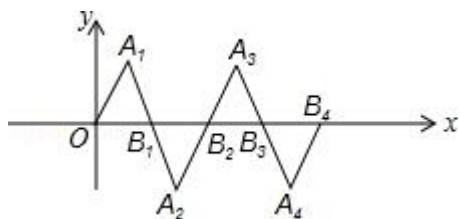
$$\because b < 0,$$

$\therefore$ 反比例函数的图象，位于二、四象限.

故选：A.

点评： 本题主要考查的是二次函数、一次函数和反比例函数的性质，掌握相关性质是解题的关键.

12. (3 分) (2015•庆阳) 在如图所示的平面直角坐标系中， $\triangle OA_1B_1$ 是边长为 2 的等边三角形，作 $\triangle B_2A_2B_1$ 与 $\triangle OA_1B_1$ 关于点 B_1 成中心对称，再作 $\triangle B_2A_3B_3$ 与 $\triangle B_2A_2B_1$ 关于点 B_2 成中心对称，如此作下去，则 $\triangle B_{2n}A_{2n+1}B_{2n+1}$ (n 是正整数) 的顶点 A_{2n+1} 的坐标是 ()



A. $(4n-1, \sqrt{3})$ B. $(2n-1, \sqrt{3})$

C. $(4n+1, \sqrt{3})$ D. $(2n+1, \sqrt{3})$

考点： 坐标与图形变化-旋转.

专题： 规律型.

分析： 首先根据 $\triangle OA_1B_1$ 是边长为2的等边三角形, 可得 A_1 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$, B_1 的坐标为 $(2, 0)$; 然后根据中心对称的性质, 分别求出点 A_2 、 A_3 、 A_4 的坐标各是多少; 最后总结出 A_n 的坐标的规律, 求出 A_{2n+1} 的坐标是多少即可.

解答： 解: $\because \triangle OA_1B_1$ 是边长为2的等边三角形,

$$\therefore A_1 \text{ 的坐标为 } (1, \sqrt{3}), B_1 \text{ 的坐标为 } (2, 0),$$

$$\because \triangle B_2A_2B_1 \text{ 与 } \triangle OA_1B_1 \text{ 关于点 } B_1 \text{ 成中心对称},$$

$$\therefore \text{点 } A_2 \text{ 与点 } A_1 \text{ 关于点 } B_1 \text{ 成中心对称},$$

$$\therefore 2 \times 2 - 1 = 3, \quad 2 \times 0 - \sqrt{3} = -\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } A_2 \text{ 的坐标是 } (3, -\sqrt{3}),$$

$$\because \triangle B_2A_3B_3 \text{ 与 } \triangle B_2A_2B_1 \text{ 关于点 } B_2 \text{ 成中心对称},$$

$$\therefore \text{点 } A_3 \text{ 与点 } A_2 \text{ 关于点 } B_2 \text{ 成中心对称},$$

$$\therefore 2 \times 4 - 3 = 5, \quad 2 \times 0 - (-\sqrt{3}) = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } A_3 \text{ 的坐标是 } (5, \sqrt{3}),$$

$$\because \triangle B_3A_4B_4 \text{ 与 } \triangle B_3A_3B_2 \text{ 关于点 } B_3 \text{ 成中心对称},$$

$$\therefore \text{点 } A_4 \text{ 与点 } A_3 \text{ 关于点 } B_3 \text{ 成中心对称},$$

$$\therefore 2 \times 6 - 5 = 7, \quad 2 \times 0 - \sqrt{3} = -\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } A_4 \text{ 的坐标是 } (7, -\sqrt{3}),$$

...,

$$\therefore 1=2 \times 1 - 1, \quad 3=2 \times 2 - 1, \quad 5=2 \times 3 - 1, \quad 7=2 \times 3 - 1, \quad \dots,$$

$$\therefore A_n \text{ 的横坐标是 } 2n - 1, \quad A_{2n+1} \text{ 的横坐标是 } 2(2n+1) - 1 = 4n+1,$$

$$\therefore \text{当 } n \text{ 为奇数时, } A_n \text{ 的纵坐标是 } \sqrt{3}, \quad \text{当 } n \text{ 为偶数时, } A_n \text{ 的纵坐标是 } -\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{顶点 } A_{2n+1} \text{ 的纵坐标是 } \sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle B_{2n} A_{2n+1} B_{2n+1} \quad (n \text{ 是正整数}) \text{ 的顶点 } A_{2n+1} \text{ 的坐标是 } (4n+1, \sqrt{3}).$$

故选: C.

点评: 此题主要考查了坐标与图形变化 - 旋转问题, 要熟练掌握, 解答此题的关键是分别判断出 A_n 的横坐标、纵坐标各是多少.

二、填空题 (本题包括 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

13. (3 分) (2015•庆阳) 函数 $y = \frac{\sqrt{1-2x}}{x}$ 的自变量 x 的取值范围是 $x \leq \frac{1}{2}$ 且 $x \neq 0$.

考点: 函数自变量的取值范围.

专题: 计算题.

分析: 根据分母不为零和被开方数不小于零得到 $x \neq 0$ 且 $1 - 2x \geq 0$, 然后求出两不等式的公共解即可.

解答: 解: 根据题意得 $x \neq 0$ 且 $1 - 2x \geq 0$,

$$\text{所以 } x \leq \frac{1}{2} \text{ 且 } x \neq 0.$$

故答案为

点评: 本题考查了函数自变量的取值范围: 自变量的取值范围必须使含有自变量的表达式都有意义, 当表达式的分母中含有自变量时, 自变量取值要使分母不

为零；当函数的表达式是偶次根式时，自变量的取值范围必须使被开方数不小于零.

14. (3 分) (2015•庆阳) $\sqrt{16}$ 的平方根是 ± 2 .

考点：平方根；算术平方根.

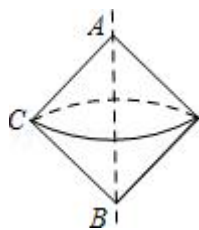
分析：根据平方根的定义，求数 a 的平方根，也就是求一个数 x ，使得 $x^2=a$ ，则 x 就是 a 的平方根，由此即可解决问题.

解答：解： $\sqrt{16}$ 的平方根是 ± 2 .

故答案为： ± 2

点评：本题考查了平方根的定义. 注意一个正数有两个平方根，它们互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根.

15. (3 分) (2015•庆阳) 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC=2\sqrt{2}$ ，若把 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕边 AB 所在直线旋转一周，则所得几何体的表面积为 $8\sqrt{2}\pi$ (结果保留 π).



考点：圆锥的计算；点、线、面、体.

分析：首先求得高 CD 的长，然后根据圆锥的侧面积的计算方法，即可求解.

解答：解：过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ,

$\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC$,

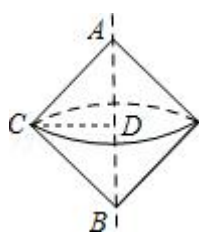
$$\therefore AB = \sqrt{2}AC = 4,$$

$$\therefore CD = 2,$$

以 CD 为半径的圆的周长是： 4π .

故直线旋转一周则所得的几何体得表面积是： $2 \times \frac{1}{2} \times 4\pi \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\pi$.

故答案为： $8\sqrt{2}\pi$.



点评： 此题主要考查了圆锥的有关计算，正确确定旋转后的图形得出以 CD 为半径的圆的弧长是解题的关键.

16. (3 分) (2015•庆阳) 若 $-2x^m \cdot y^2$ 与 $3x^4y^{2m+n}$ 是同类项，则 $m - 3n$ 的立方根是 2.

考点： 立方根；合并同类项；解二元一次方程组.

专题： 计算题.

分析： 根据同类项的定义可以得到 m ， n 的值，继而求出 $m - 3n$ 的立方根.

解答： 解：若 $-2x^m \cdot y^2$ 与 $3x^4y^{2m+n}$ 是同类项，

$$\therefore \begin{cases} m - n = 4 \\ 2m + n = 2 \end{cases},$$

$$\text{解方程得：} \begin{cases} m = 2 \\ n = -2 \end{cases}.$$

$$\therefore m - 3n = 2 - 3 \times (-2) = 8.$$

8 的立方根是 2.

故答案为： 2.

点评： 本题考查了同类项的概念以及立方根的求法，解体的关键是根据定义求出对应 m 、 n 的值.

17. (3 分) (2015•庆阳) 有六张完全相同的卡片，其正面分别标有数字： -2 ， $\sqrt{7}$ ， π ， 0 ， $\sqrt{4}$ ， $3.\dot{1}\dot{4}$ ，将它们背面朝上洗匀后，从中随机抽取一张卡片，则其正面的数字为无理数的概率是 $\frac{1}{3}$.

考点： 概率公式；无理数.

专题： 计算题.

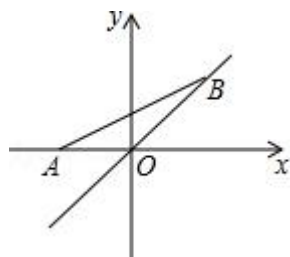
分析： 判断六张卡片中无理数的个数，即可得到结果.

解答： 解：在 -2 ， $\sqrt{7}$ ， π ， 0 ， $\sqrt{4}$ ， $3.\dot{1}\dot{4}$ 中，无理数有 $\sqrt{7}$ ， π 共 2 个，则从中随机抽取一张卡片，则其正面的数字为无理数的概率是 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

故答案为： $\frac{1}{3}$

点评： 此题考查了概率公式，以及无理数，熟练掌握无理数的定义是解本题的关键.

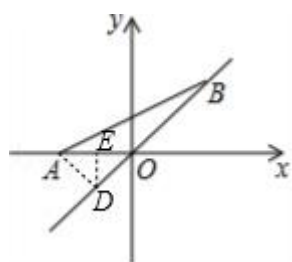
18. (3 分) (2015•庆阳) 如图，定点 $A(-2, 0)$ ，动点 B 在直线 $y=x$ 上运动，当线段 AB 最短时，点 B 的坐标为 $(-1, -1)$.



考点： 一次函数图象上点的坐标特征；垂线段最短.

分析： 过 A 作 $AD \perp$ 直线 $y=x$, 过 D 作 $DE \perp x$ 轴于 E, 即当 B 点和 D 点重合时, 线段 AB 的长最短, 求出 $\angle DOA = \angle OAD = \angle EDO = \angle EDA = 45^\circ$, $OA=2$, 求出 $OE=DE=1$, 求出 D 的坐标即可.

解答： 解: 过 A 作 $AD \perp$ 直线 $y=x$, 过 D 作 $DE \perp x$ 轴于 E,



则 $\angle DOA = \angle OAD = \angle EDO = \angle EDA = 45^\circ$,

$\therefore A(-2, 0)$,

$\therefore OA=2$,

$\therefore OE=DE=1$,

$\therefore D$ 的坐标为 $(-1, -1)$,

即动点 B 在直线 $y=x$ 上运动, 当线段 AB 最短时, 点 B 的坐标为 $(-1, -1)$,

故答案为: $(-1, -1)$.

点评： 本题考查了等腰直角三角形, 垂线段最短, 坐标与图形性质的应用, 解此题的关键求出符合条件的点的位置.

19. (3 分) (2015•庆阳) 已知三条不同的直线 a、b、c 在同一平面内, 下列四条命题:

- ①如果 $a \parallel b$, $a \perp c$, 那么 $b \perp c$; ②如果 $b \parallel a$, $c \parallel a$, 那么 $b \parallel c$;
③如果 $b \perp a$, $c \perp a$, 那么 $b \perp c$; ④如果 $b \perp a$, $c \perp a$, 那么 $b \parallel c$.

其中真命题的是 ①②④. (填写所有真命题的序号)

考点： 命题与定理； 平行线的判定与性质.

专题： 推理填空题.

分析： 分析是否为真命题，需要分别分析各题设是否能推出结论，从而利用排除法得出答案.

解答： 解：①如果 $a \parallel b$ ， $a \perp c$ ，那么 $b \perp c$ 是真命题，故①正确；

②如果 $b \parallel a$ ， $c \parallel a$ ，那么 $b \parallel c$ 是真命题，故②正确；

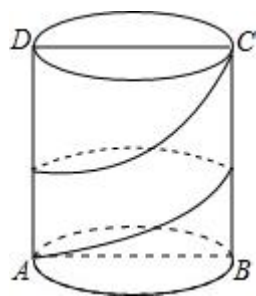
③如果 $b \perp a$ ， $c \perp a$ ，那么 $b \perp c$ 是假命题，故③错误；

④如果 $b \perp a$ ， $c \perp a$ ，那么 $b \parallel c$ 是真命题，故④正确.

故答案为：①②④.

点评： 本题主要考查了命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题，难度适中.

20. (3 分) (2015•庆阳) 在底面直径为 2cm，高为 3cm 的圆柱体侧面上，用一条无弹性的丝带从 A 至 C 按如图所示的圈数缠绕，则丝带的最短长度为 $\sqrt{4\pi+9}$ cm. (结果保留 π)



考点： 平面展开-最短路径问题.

分析： 根据绕两圈到 C，则展开后相当于求出直角三角形 ACB 的斜边长，并且 AB 的长为圆柱的底面圆的周长，BC 的长为圆柱的高，根据勾股定理求出即可.

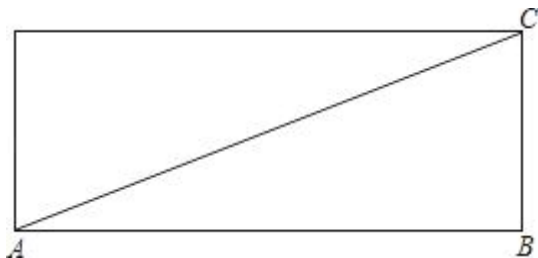
解答： 解：如图所示，

$\because$ 无弹性的丝带从 A 至 C，

∴展开后 $AB=2\pi\text{cm}$, $BC=3\text{cm}$,

由勾股定理得: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4\pi+9}\text{cm}$.

故答案为: $\sqrt{4\pi+9}$.



点评: 本题考查了平面展开 - 最短路线问题和勾股定理的应用, 能正确画出图形是解此题的关键, 用了数形结合思想.

三、解答题 (本题包括 9 小题, 共 90 分)

21. (8 分) (2015•庆阳) 计算: $(\sqrt{3}-2)^0 + (\frac{1}{3})^{-1} + 4\cos 30^\circ - |\sqrt{3}-\sqrt{27}|$

考点: 实数的运算; 零指数幂; 负整数指数幂; 特殊角的三角函数值.

专题: 计算题.

分析: 原式第一项利用零指数幂法则计算, 第二项利用负指数幂法则计算, 第三项利用特殊角的三角函数值计算, 最后一项利用绝对值的代数意义化简, 计算即可得到结果.

解答: 解: 原式 $= 1 + 3 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}$

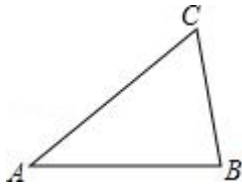
$= 4$.

点评: 此题考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

22. (8 分) (2015•庆阳) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=60^\circ$, $\angle A=40^\circ$.

(1) 用尺规作图作 AB 的垂直平分线, 交 AC 于点 D , 交 AB 于点 E (保留作图痕迹, 不要求写作法和证明);

(2) 求证: BD 平分 $\angle CBA$.

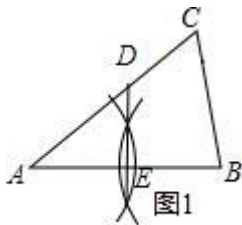


考点： 作图—基本作图；线段垂直平分线的性质.

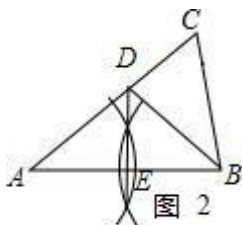
分析： (1) 分别以 A、B 两点为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 长度为半径画弧，在 AB 两边分别相交于两点，然后过这两点作直线即为 AB 的垂直平分线；

(2) 根据线段垂直平分线的性质和三角形的内角和证明即可.

解答： 解：(1) 如图 1 所示：



(2) 连接 BD，如图 2 所示：



$$\because \angle C=60^{\circ}, \angle A=40^{\circ},$$

$$\therefore \angle CBA=80^{\circ},$$

$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore \angle A=\angle DBA=40^{\circ},$$

$$\therefore \angle DBA=\frac{1}{2}\angle CBA,$$

$\therefore BD$ 平分 $\angle CBA$.

点评： 本题考查了线段的垂直平分线的性质及三角形的内角和及基本作图，解题的关键是了解垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等.

23. (8分) (2015•庆阳) 已知关于 x 的一元二次方程 $\frac{1}{2}mx^2+mx+m-1=0$ 有两个相等的实数根.

(1) 求 m 的值;

(2) 解原方程.

考点： 根的判别式.

分析： (1) 根据题意得到: $\Delta=0$, 由此列出关于 m 的方程并解答;

(2) 利用直接开平方法解方程.

解答： 解: (1) $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $\frac{1}{2}mx^2+mx+m-1=0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = m^2 - 4 \times \frac{1}{2}m \times (m-1) = 0, \text{ 且 } m \neq 0,$$

解得 $m=2$;

(2) 由 (1) 知, $m=2$, 则该方程为: $x^2+2x+1=0$,

即 $(x+1)^2=0$,

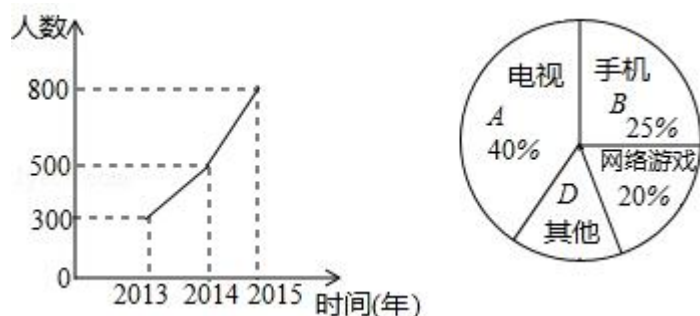
解得 $x_1=x_2=-1$.

点评： 本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$:

当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta=0$, 方程有两个相等的实数根; 当

$\Delta < 0$, 方程没有实数根.

24. (10 分) (2015•庆阳) 现在的青少年由于沉迷电视、手机、网络游戏等，视力日渐减退，某市为了解学生的视力变化情况，从全市九年级随机抽取了 1500 名学生，统计了每个人连续三年视力检查的结果，根据视力在 4.9 以下的人数变化制成折线统计图，并对视力下降的主要因素进行调查，制成扇形统计图.



解答下列问题:

- (1) 图中 D 所在扇形的圆心角度数为 54° ;
- (2) 若 2015 年全市共有 30000 名九年级学生，请你估计视力在 4.9 以下的学生约有多少名?
- (3) 根据扇形统计图信息，你觉得中学生应该如何保护视力?

考点： 折线统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

专题： 计算题.

分析： (1) 根据扇形统计图中的数据求出 D 占的百分比，乘以 360 即可得到结果；

(2) 根据样本中视力在 4.9 以下的人数占的百分比，乘以 30000 即可得到结果；

(3) 由扇形统计图中影响视力的因素，提出合理化建议即可.

解答： 解：(1) 根据题意得： $360^\circ \times (1 - 40\% - 25\% - 20\%) = 54^\circ$ ；

故答案为： 54° ；

(2) 根据题意得： $30000 \times \frac{800}{1500} = 16000$ (名)，

则估计视力在 4.9 以下的学生约有 16000 名；

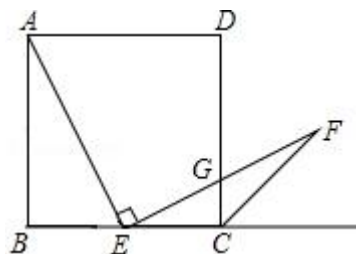
(3) 建议中学生应少看电视，少玩游戏，少看手机，才能保护视力.

点评： 此题考查了折线统计图，扇形统计图，以及用样本估计总体，弄清题中统计图中的数据是解本题的关键.

25. (10 分) (2015•庆阳) 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 是边 BC 的中点，直线 EF 交正方形外角的平分线于点 F ，交 DC 于点 G ，且 $AE \perp EF$.

(1) 当 $AB=2$ 时，求 $\triangle GEC$ 的面积；

(2) 求证： $AE=EF$.



考点： 全等三角形的判定与性质；正方形的性质.

分析： (1) 首先根据 $\triangle ABE \sim \triangle ECG$ 得到 $AB: EC=BE: GC$ ，从而求得 $GC=\frac{1}{2}$

即可求得 $S_{\triangle GEC}$ ；

(2) 取 AB 的中点 H ，连接 EH ，根据已知及正方形的性质利用 ASA 判定

$\triangle AHE \cong \triangle ECF$ ，从而得到 $AE=EF$ ；

解答： 解：(1) $\because AB=BC=2$ ，点 E 为 BC 的中点，

$$\therefore BE=EC=1,$$

$$\because AE \perp EF,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ECG,$$

$$\therefore AB: EC=BE: GC,$$

$$\text{即： } 2: 1=1: GC,$$

解得： $GC = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore S_{\triangle GEC} = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot CG = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

(2) 证明：取 AB 的中点 H，连接 EH；

$\because$ ABCD 是正方形，

$AE \perp EF$ ；

$$\therefore \angle 1 + \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\angle 2 + \angle AEB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

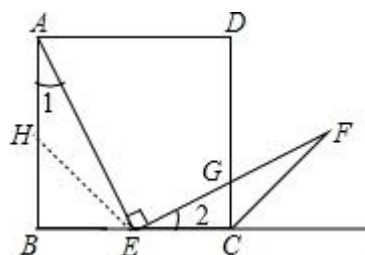
$$\because BH = BE, \angle BHE = 45^\circ,$$

且 $\angle FCG = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle AHE = \angle ECF = 135^\circ, AH = CE,$$

$$\therefore \triangle AHE \cong \triangle ECF,$$

$$\therefore AE = EF;$$



点评： 此题考查了正方形的性质和全等三角形的判定与性质，解 (2) 题的关键是取 AB 的中点 H，得出 $AH = EC$ ，再根据全等三角形的判定得出 $\triangle AHE \cong \triangle ECF$ 。

26. (10 分) (2015•庆阳) 某体育用品专卖店销售 7 个篮球和 9 个排球的总利润为 355 元，销售 10 个篮球和 20 个排球的总利润为 650 元。

(1) 求每个篮球和每个排球的销售利润；

(2) 已知每个篮球的进价为 200 元, 每个排球的进价为 160 元, 若该专卖店计划用不超过 17400 元购进篮球和排球共 100 个, 且要求篮球数量不少于排球数量的一半, 请你为专卖店设计符合要求的进货方案.

考点: 一元一次不等式的应用; 二元一次方程组的应用.

分析: (1) 设每个篮球和每个排球的销售利润分别为 x 元, y 元, 根据题意得到方程组; 即可解得结果;

(2) 设购进篮球 m 个, 排球 $(100 - m)$ 个, 根据题意得不等式组即可得到结果.

解答: 解: (1) 设每个篮球和每个排球的销售利润分别为 x 元, y 元,

根据题意得:
$$\begin{cases} 7x+9y=355 \\ 10x+20y=650 \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} x=25 \\ y=20 \end{cases},$$

答: 每个篮球和每个排球的销售利润分别为 25 元, 20 元;

(2) 设购进篮球 m 个, 排球 $(100 - m)$ 个,

根据题意得:
$$\begin{cases} 200m+160(100-m) \leq 17400 \\ m \geq \frac{100-m}{2} \end{cases},$$

解得: $\frac{100}{3} \leq m \leq 35$,

$\therefore m=34$ 或 $m=35$,

$\therefore$ 购进篮球 34 个排球 66 个, 或购进篮球 35 个排球 65 个两种购买方案.

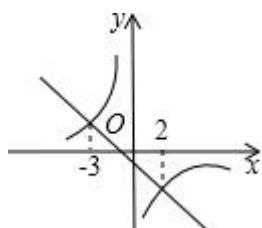
点评: 本题考查了一元一次不等式的应用, 二元一次方程组的应用, 找准数量关系是解题的关键.

27. (12 分) (2015•庆阳) 定义运算 $\max\{a, b\}$: 当 $a \geq b$ 时, $\max\{a, b\}=a$; 当 $a < b$ 时, $\max\{a, b\}=b$. 如 $\max\{-3, 2\}=2$.

(1) $\max\{\sqrt{7}, 3\} = \underline{3}$;

(2) 已知 $y_1 = \frac{k_1}{x}$ 和 $y_2 = k_2x + b$ 在同一坐标系中的图象如图所示，若 $\max\{\frac{k_1}{x}, k_2x + b\} = \frac{k_1}{x}$ ，结合图象，直接写出 x 的取值范围；

(3) 用分类讨论的方法，求 $\max\{2x+1, x-2\}$ 的值.



考点： 反比例函数与一次函数的交点问题.

专题： 新定义.

分析： (1) 根据 $3 > \sqrt{7}$ 和已知求出即可；

(2) 根据题意得出 $\frac{k_1}{x} \geq k_2x + b$ ，结合图象求出即可；

(3) 分为两种情况：当 $2x+1 \geq x-2$ 时，当 $2x+1 < x-2$ 时，结合已知求出即可.

解答： 解：(1) $\max\{\sqrt{7}, 3\} = 3$.

故答案为：3；

$$(2) \because \max\{\frac{k_1}{x}, k_2x + b\} = \frac{k_1}{x},$$

$$\therefore \frac{k_1}{x} \geq k_2x + b,$$

$\therefore$ 从图象可知： x 的取值范围为 $-3 \leq x < 0$ 或 $x \geq 2$ ；

(3) 当 $2x+1 \geq x-2$ 时， $\max\{2x+1, x-2\} = 2x+1$ ，

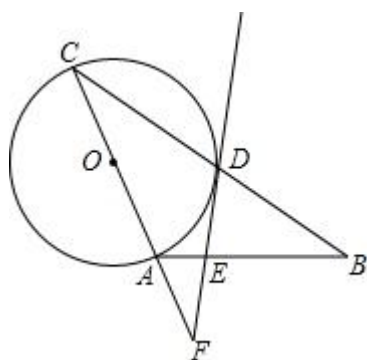
当 $2x+1 < x-2$ 时， $\max\{2x+1, x-2\} = x-2$.

点评： 本题考查了一次函数和反比例函数的交点问题的应用，能读懂题意是解此题的关键.

28. (12 分) (2015•庆阳) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，以 AC 为直径作 $\odot O$ 交 BC 于点 D ，过点 D 作 $\odot O$ 的切线，交 AB 于点 E ，交 CA 的延长线于点 F .

(1) 求证： $FE \perp AB$;

(2) 当 $EF=6$ ， $\frac{OA}{OF}=\frac{3}{5}$ 时，求 DE 的长.



考点： 切线的性质；相似三角形的判定与性质.

分析： (1) 连接 AD 、 OD ，根据直径所对的圆周角是直角求出 $\angle ADC=90^\circ$ ，根据等腰三角形的性质证明 D 是 BC 的中点，得到 OD 是 $\triangle ABC$ 的中位线，根据切线的性质证明结论；

(2) 根据平行线分线段成比例定理，列出比例式计算得到答案.

解答： (1) 证明：连接 AD 、 OD ，

$\because AC$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ADC=90^\circ$ ，

又 $\because AB=AC$ ，

$\therefore CD=DB$ ，又 $CO=AO$ ，

$\therefore OD \parallel AB$ ，

$\therefore FD$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OD \perp EF$,

$\therefore FE \perp AB$;

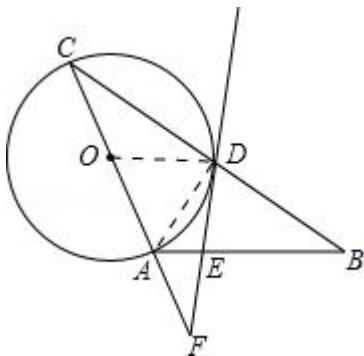
$$(2) \because \frac{OA}{OF} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{OA}{AF} = \frac{3}{2},$$

$\therefore OD \parallel AB$,

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{OA}{AF} = \frac{3}{2}, \text{ 又 } EF=6,$$

$\therefore DE=9$.



点评： 本题考查的是切线的性质和平行线分线段成比例定理，掌握圆的切线垂直于过切点的半径和等腰三角形的三线合一解题的关键。

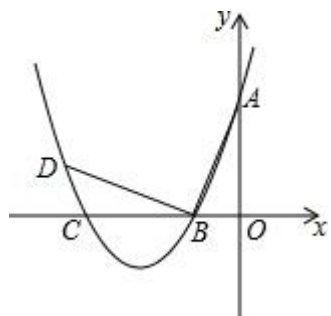
29. (12 分) (2015•庆阳) 如图，在平面直角坐标系中，顶点为 $(-4, -1)$

的抛物线交 y 轴于点 $A(0, 3)$ ，交 x 轴于 B, C 两点。

(1) 求此抛物线的解析式；

(2) 已知点 P 是抛物线上位于 B, C 两点之间的一个动点，问：当点 P 运动到什么位置时，四边形 $ABPC$ 的面积最大？并求出此时四边形 $ABPC$ 的面积。

(3) 过点 B 作 AB 的垂线交抛物线于点 D，是否存在以点 C 为圆心且与线段 BD 和抛物线的对称轴 l 同时相切的圆？若存在，求出圆的半径；若不存在，请说明理由.



考点： 二次函数综合题.

分析： (1) 利用待定系数法求函数的解析式即可；

(2) 由题意可知当 P 点移动到抛物线的顶点是 $\triangle PBC$ 的面积最大，根据四边形 ABPC 的面积的最大值为： $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle PBC}$ 求得即可；

(3) 已知 $\angle ABD$ 是直角，若连接圆心和切点（暂定为 E），不难看出 $Rt\triangle OAB$ 、 $Rt\triangle EBC$ 相似，可据此求出 $\odot C$ 的半径，再将该半径与点 C 到对称轴 l 的距离进行比较即可.

解答： 解：(1) 根据题意，可设抛物线的解析式为 $y = a(x+4)^2 - 1$,

把点 A (0, 3) 代入得： $3 = 16a - 1$,

解得 $a = \frac{1}{4}$,

所以此抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 1$;

(2) 令 $y=0$, 则 $0 = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 1$;

解得 $x_1 = -2$, $x_2 = -6$,

$\therefore B(-2, 0)$, $C(-6, 0)$,

$\therefore BC=4$,

$$\because S_{\text{四边形ABPC}} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle PBC}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot OA = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6,$$

$\therefore$ 要使四边形 ABPC 的面积最大, 则 $\triangle PBC$ 的面积最大,

$\therefore$ 当 P 点移动到抛物线的顶点是 $\triangle PBC$ 的面积最大,

$$\therefore \text{四边形 ABPC 的面积的最大值为: } S_{\triangle ABC} + S_{\triangle PBC} = 6 + \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 6 + 2 = 8;$$

(3) 如图, 设 $\odot C$ 与 BD 相切于点 E, 连接 CE, 则 $\angle BEC = \angle AOB = 90^\circ$.

$$\because A(0, 3), B(-2, 0), C(-6, 0),$$

$$\therefore OA=3, OB=2, OC=6, BC=4;$$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{13},$$

$$\because AB \perp BD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle EBC + 90^\circ = \angle OAB + 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle OAB,$$

$$\therefore \triangle OAB \sim \triangle EBC,$$

$$\therefore \frac{CE}{OB} = \frac{BC}{AB}, \text{ 即 } \frac{CE}{2} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

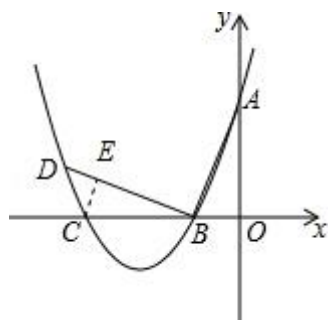
$$\therefore EC = \frac{8\sqrt{13}}{13}.$$

设抛物线对称轴交 x 轴于 F.

$$\because \text{抛物线的对称轴 } x = -4,$$

$$\therefore CF = 2 \neq \frac{8\sqrt{13}}{13},$$

$\therefore$ 不存在以点 C 为圆心且与线段 BD 和抛物线的对称轴 l 同时相切的圆.



点评: 此题是二次函数的综合题, 主要考查的是利用待定系数法确定函数解析式、相似三角形的判定和性质、直线与圆的位置关系以及四边形的面积等重要知识点.