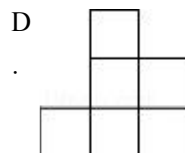
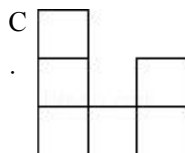
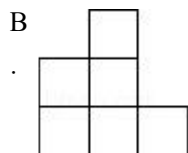
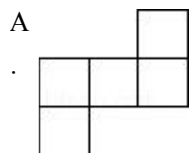
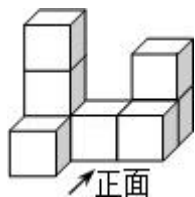


2013 年甘肃省兰州市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 15 小题，每小题 4 分，共 60 分）

1. (4 分) (2009•仙桃天门潜江江汉) 如图是由八个相同小正方体组合而成的几何体，则其左视图是 ()



2. (4 分) (2013•兰州) “兰州市明天降水概率是 30%”，对此消息下列说法中正确的是 ()

A 兰州市明天将有 30%的地区降水

B 兰州市明天将有 30%的时间降水

C 兰州市明天降水的可能性较小

D 兰州市明天肯定不降水

3. (4 分) (2013•兰州) 二次函数 $y=2(x-1)^2+3$ 的图象的顶点坐标是 ()

A (1, 3)

B (-1, 3)

C (1, -3)

D (-1, -3)

4. (4 分) (2013•兰州) $\odot O_1$ 的半径为 1cm, $\odot O_2$ 的半径为 4cm, 圆心距 $O_1O_2=3$ cm, 这两圆的位置关系是 ()

A 相交

B 内切

C 外切

D 内含

5. (4 分) (2013•兰州) 当 $x > 0$ 时, 函数 $y = -\frac{5}{x}$ 的图象在 ()

A 第四象限

B 第三象限

C 第二象限

D 第一象限

6. (4 分) (2013•兰州) 下列命题中是假命题的是 ()

A 平行四边形的对边相等

B 菱形的四条边相等

C 矩形的对边平行且相等

D 等腰梯形的对边相等

7. (4 分) (2013•兰州) 某校九年级开展“光盘行动”宣传活动, 各班级参加该活动的人数统计结果如下表, 对于这组统计数据, 下列说法中正确的是 ()

班级	1 班	2 班	3 班	4 班	5 班	6 班
人数	52	60	62	54	58	62

A 平均数是 58

B 中位数是 58

C 极差是 40

D 众数是 60

8. (4分) (2013•兰州) 用配方法解方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 时, 配方后得的方程为 ()

- A $(x+1)^2 = 0$ B $(x-1)^2 = 0$ C $(x+1)^2 = 2$ D $(x-1)^2 = 2$

9. (4分) (2013•兰州) $\triangle ABC$ 中, a 、 b 、 c 分别是 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边, 如果 $a^2 + b^2 = c^2$, 那么下列结论正确的是 ()

- A $c \sin A = a$ B $b \cos B = c$ C $a \tan A = b$ D $c \tan B = b$

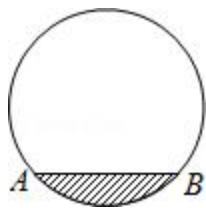
10. (4分) (2013•兰州) 据调查, 2011年5月兰州市的房价均价为 $7600/\text{m}^2$, 2013年同期将达到 $8200/\text{m}^2$, 假设这两年兰州市房价的平均增长率为 x , 根据题意, 所列方程为 ()

- A $7600(1+x\%)^2 = 8200$ B $7600(1-x\%)^2 = 8200$ C $7600(1+x)^2 = 8200$ D $7600(1-x)^2 = 8200$

11. (4分) (2012•南通) 已知 $A(-1, y_1)$, $B(2, y_2)$ 两点在双曲线 $y = \frac{3+2m}{x}$ 上, 且 $y_1 > y_2$, 则 m 的取值范围是 ()

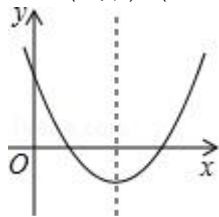
- A $m < 0$ B $m > 0$ C $m > -\frac{3}{2}$ D $m < -\frac{3}{2}$

12. (4分) (2008•黔南州) 如图是一圆柱形输水管的横截面, 阴影部分为有水部分, 如果水面 AB 宽为 8cm , 水面最深地方的高度为 2cm , 则该输水管的半径为 ()



- A 3cm B 4cm C 5cm D 6cm

13. (4分) (2008•巴中) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 则下列说法不正确的是 ()

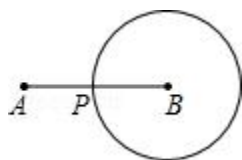


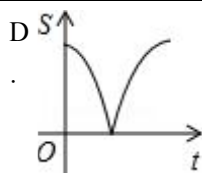
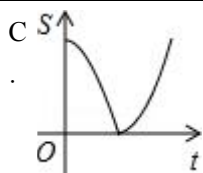
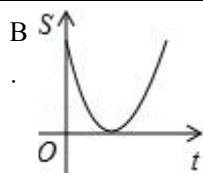
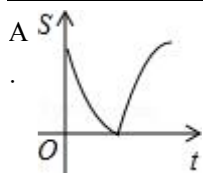
- A $b^2 - 4ac > 0$ B $a > 0$ C $c > 0$ D $-\frac{b}{2a} < 0$

14. (4分) (2013•兰州) 圆锥底面圆的半径为 3m , 其侧面展开图是半圆, 则圆锥母线长为 ()

- A 3m B 6m C 9m D 12m

15. (4分) (2013•兰州) 如图, 动点 P 从点 A 出发, 沿线段 AB 运动至点 B 后, 立即按原路返回, 点 P 在运动过程中速度不变, 则以点 B 为圆心, 线段 BP 长为半径的圆的面积 S 与点 P 的运动时间 t 的函数图象大致为 ()



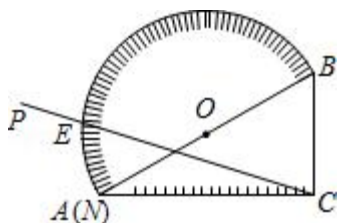


二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

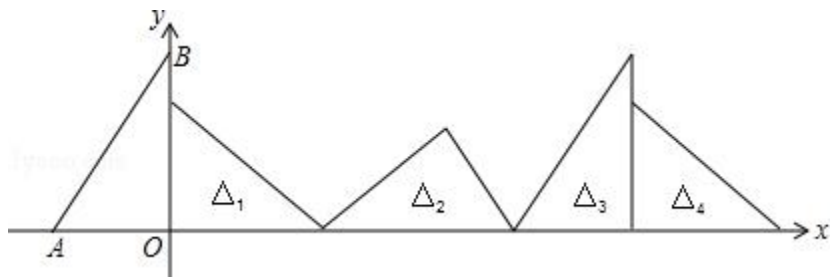
16. (4 分) (2013•兰州) 某校决定从两名男生和三名女生中选出两名同学作为兰州国际马拉松赛的志愿者, 则选出一男一女的概率是_____.

17. (4 分) (2013•兰州) 若 $|b-1| + \sqrt{a-4} = 0$, 且一元二次方程 $kx^2 + ax + b = 0$ 有两个实数根, 则 k 的取值范围是_____.

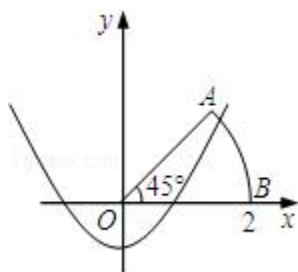
18. (4 分) (2013•兰州) 如图, 量角器的直径与直角三角板 ABC 的斜边 AB 重合, 其中量角器 0 刻度线的端点 N 与点 A 重合, 射线 CP 从 CA 处出发沿顺时针方向以每秒 3 度的速度旋转, CP 与量角器的半圆弧交于点 E , 第 24 秒, 点 E 在量角器上对应的读数是_____度.



19. (4 分) (2013•兰州) 如图, 在直角坐标系中, 已知点 $A(-3, 0)$ 、 $B(0, 4)$, 对 $\triangle OAB$ 连续作旋转变换, 依次得到 $\triangle_1$ 、 $\triangle_2$ 、 $\triangle_3$ 、 $\triangle_4$..., 则 $\triangle_{2013}$ 的直角顶点的坐标为_____.



20. (4 分) (2013•兰州) 如图, 以扇形 OAB 的顶点 O 为原点, 半径 OB 所在的直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系, 点 B 的坐标为 $(2, 0)$, 若抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + k$ 与扇形 OAB 的边界总有两个公共点, 则实数 k 的取值范围是_____.

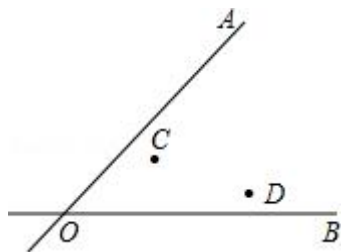


三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 70 分)

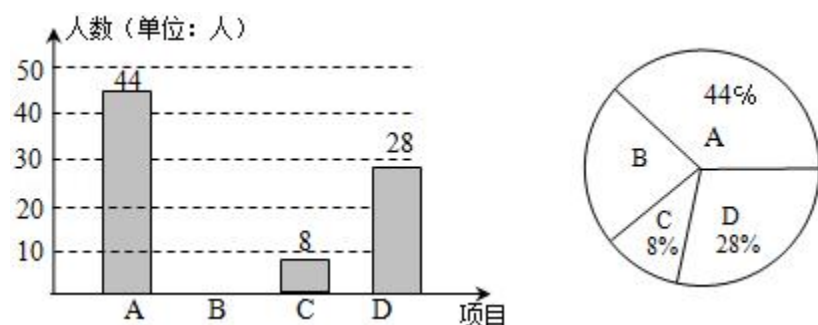
21. (10 分) (2013•兰州) (1) 计算: $(-1)^{2013} - 2^{-1} + \sin 30^\circ + (\pi - 3.14)^0$

(2) 解方程: $x^2 - 3x - 1 = 0$.

22. (5分) (2013•兰州) 如图, 两条公路 OA 和 OB 相交于 O 点, 在 $\angle AOB$ 的内部有工厂 C 和 D, 现要修建一个货站 P, 使货站 P 到两条公路 OA、OB 的距离相等, 且到两工厂 C、D 的距离相等, 用尺规作出货站 P 的位置. (要求: 不写作法, 保留作图痕迹, 写出结论)

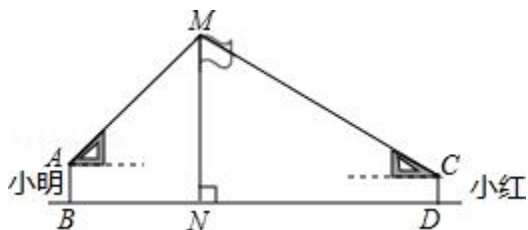


23. (6分) (2013•兰州) 在兰州市开展的“体育、艺术 2+1”活动中, 某校根据实际情况, 决定主要开设 A: 乒乓球, B: 篮球, C: 跑步, D: 跳绳这四种运动项目. 为了解学生喜欢哪一种项目, 随机抽取了部分学生进行调查, 并将调查结果绘制成如图甲、乙所示的条形统计图和扇形统计图. 请你结合图中的信息解答下列问题:



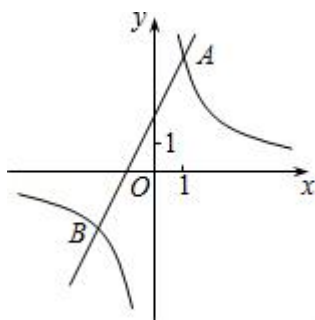
- (1) 样本中喜欢 B 项目的人数百分比是_____，其所在扇形统计图中的圆心角的度数是_____；
- (2) 把条形统计图补充完整；
- (3) 已知该校有 1000 人，根据样本估计全校喜欢乒乓球的人数是多少？

24. (8分) (2013•兰州) 如图, 在活动课上, 小明和小红合作用一副三角板来测量学校旗杆高度. 已知小明的眼睛与地面的距离 (AB) 是 1.7m, 他调整自己的位置, 设法使得三角板的一条直角边保持水平, 且斜边与旗杆顶端 M 在同一条直线上, 测得旗杆顶端 M 仰角为 45° ; 小红眼睛与地面的距离 (CD) 是 1.5m, 用同样的方法测得旗杆顶端 M 的仰角为 30° . 两人相距 28 米且位于旗杆两侧 (点 B、N、D 在同一条直线上). 求出旗杆 MN 的高度. (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.4$, $\sqrt{3} \approx 1.7$, 结果保留整数.)



25. (9分) (2011•来宾) 已知反比例函数 $y_1 = \frac{k}{x}$ 的图象与一次函数 $y_2 = ax + b$ 的图象交于点 A (1, 4) 和点 B (m, -2),

- (1) 求这两个函数的关系式;
- (2) 观察图象, 写出使得 $y_1 > y_2$ 成立的自变量 x 的取值范围;
- (3) 如果点 C 与点 A 关于 x 轴对称, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



26. (10 分) (2013•兰州) 如图 1, 在 $\triangle OAB$ 中, $\angle OAB=90^\circ$, $\angle AOB=30^\circ$, $OB=8$. 以 OB 为边, 在 $\triangle OAB$ 外作等边 $\triangle OBC$, D 是 OB 的中点, 连接 AD 并延长交 OC 于 E .

(1) 求证: 四边形 $ABCE$ 是平行四边形;

(2) 如图 2, 将图 1 中的四边形 $ABCO$ 折叠, 使点 C 与点 A 重合, 折痕为 FG , 求 OG 的长.

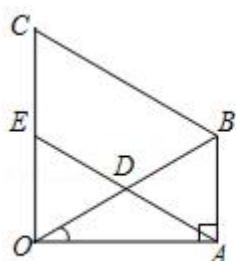


图1

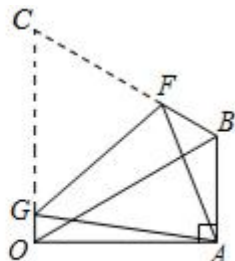
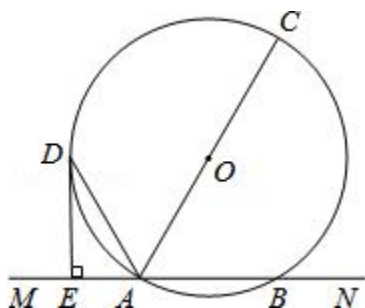


图2

27. (10 分) (2008•青海) 已知, 如图, 直线 MN 交 $\odot O$ 于 A, B 两点, AC 是直径, AD 平分 $\angle CAM$ 交 $\odot O$ 于 D , 过 D 作 $DE \perp MN$ 于 E .

(1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $DE=6\text{cm}$, $AE=3\text{cm}$, 求 $\odot O$ 的半径.

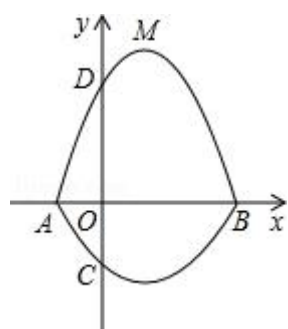


28. (12 分) (2013•兰州) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, A, B 为 x 轴上两点, C, D 为 y 轴上的两点, 经过点 A, C, B 的抛物线的一部分 C_1 与经过点 A, D, B 的抛物线的一部分 C_2 组合成一条封闭曲线, 我们把这条封闭曲线成为“蛋线”. 已知点 C 的坐标为 $(0, -\frac{3}{2})$, 点 M 是抛物线 $C_2: y=mx^2-2mx-3m$ ($m < 0$) 的顶点.

(1) 求 A, B 两点的坐标;

(2) “蛋线”在第四象限上是否存在一点 P , 使得 $\triangle PBC$ 的面积最大? 若存在, 求出 $\triangle PBC$ 面积的最大值; 若不存在, 请说明理由;

(3) 当 $\triangle BDM$ 为直角三角形时, 求 m 的值.

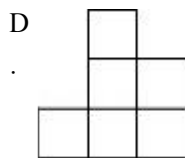
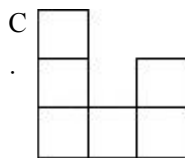
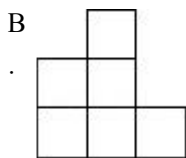
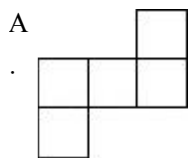
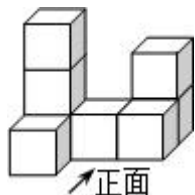


2013 年甘肃省兰州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (本大题共 15 小题, 每小题 4 分, 共 60 分)

1. (4 分) (2009•仙桃天门潜江江汉) 如图是由八个相同小正方体组合而成的几何体, 则其左视图是 ()



考点: 简单组合体的三视图.

分析: 找到从左面看所得到的图形即可.

解答: 解: 从左面可看到从左往右三列小正方形的个数为: 2, 3, 1.
故选 B.

点评: 本题考查了三视图的知识, 左视图是从物体的左面看得到的视图, 解答时学生易将三种视图混淆而错误的选其它选项.

2. (4 分) (2013•兰州) “兰州市明天降水概率是 30%”, 对此消息下列说法中正确的是 ()

A 兰州市明天将有 30%的地区降水

B 兰州市明天将有 30%的时间降水

C 兰州市明天降水的可能性较小

D 兰州市明天肯定不降水

考点: 概率的意义.

分析: 根据概率表示某事情发生的可能性的大小, 依此分析选项可得答案.

解答: 解: 根据概率表示某事情发生的可能性的大小, 分析可得:

A、兰州市明天降水概率是 30%, 并不是有 30%的地区降水, 故选项错误;

B、兰州市明天将有 30%的时间降水, 故选项错误;

C、兰州市明天降水概率是 30%, 即可能性比较小, 故选项正确;

D、兰州市明天降水概率是 30%, 明天有可能降水, 故选项错误.

故选 C.

点评: 本题考查概率的意义, 随机事件是指在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事件. 概率表示随机事件发生的可能性的.

3. (4 分) (2013•兰州) 二次函数 $y=2(x-1)^2+3$ 的图象的顶点坐标是 ()

A (1, 3)

B (-1, 3)

C (1, -3)

D (-1, -3)

考点: 二次函数的性质.

分析: 直接根据抛物线的顶点式的特点即可确定顶点坐标.

解答: 解: $\because y=2(x-1)^2+3$,

∴其顶点坐标是 (1, 3).

故选 A.

点评: 主要考查了求抛物线的顶点坐标的方法.

4. (4分) (2013•兰州) $\odot O_1$ 的半径为 1cm, $\odot O_2$ 的半径为 4cm, 圆心距 $O_1O_2=3\text{cm}$, 这两圆的位置关系是 ()
- A 相交 B 内切 C 外切 D 内含

考点: 圆与圆的位置关系.

分析: 两圆的位置关系有 5 种: ①外离; ②外切; ③相交; ④内切; ⑤内含.

若 $d > R+r$, 则两圆相离; 若 $d=R+r$, 则两圆外切; 若 $d=R-r$, 则两圆内切; 若 $R-r < d < R+r$, 则两圆相交. 本题可把半径的值代入, 看符合哪一种情况.

解答: 解: $\because R-r=4-1=3$, $O_1O_2=3\text{cm}$.

∴两圆内切.

故选 B.

点评: 本题主要考查两圆的位置关系与数量之间的联系.

5. (4分) (2013•兰州) 当 $x > 0$ 时, 函数 $y = -\frac{5}{x}$ 的图象在 ()

A 第四象限 B 第三象限 C 第二象限 D 第一象限

考点: 反比例函数的性质.

分析: 先根据反比例函数的性质判断出反比例函数的图象所在的象限, 再求出 $x > 0$ 时, 函数的图象所在的象限即可.

解答: 解: $\because$ 反比例函数 $y = -\frac{5}{x}$ 中, $k = -5 < 0$,

∴此函数的图象位于二、四象限,

$\because x > 0$,

∴当 $x > 0$ 时函数的图象位于第四象限.

故选 A

点评: 本题考查的是反比例函数的性质, 即反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象是双曲线; 当 $k < 0$ 时, 双曲线的两支分别位于第二、第四象限.

6. (4分) (2013•兰州) 下列命题中是假命题的是 ()

A 平行四边形的对边相等 B 菱形的四条边相等

C 矩形的对边平行且相等 D 等腰梯形的对边相等

考点: 命题与定理; 平行四边形的性质; 菱形的性质; 矩形的性质; 等腰梯形的性质.

分析: 根据平行四边形、矩形、菱形、等腰梯形的判定与性质分别判断得出答案即可.

解答: 解: A、根据平行四边形的性质得出平行四边形的对边相等, 此命题是真命题, 不符合题意;

B、根据菱形的性质得出菱形的四条边相等, 此命题是真命题, 不符合题意;

C、根据矩形的性质得出矩形的对边平行且相等, 此命题是真命题, 不符合题意;

D、根据等腰梯形的上下底边不相等, 此命题是假命题, 符合题意.

故选: D.

点评: 此题主要考查了平行四边形、矩形、菱形、以及等腰梯形的判定与性质等知识, 熟练掌握相关定理是解题关键.

7. (4 分) (2013•兰州) 某校九年级开展“光盘行动”宣传活动, 各班级参加该活动的人数统计结果如下表, 对于这组统计数据, 下列说法中正确的是 ()

班级	1 班	2 班	3 班	4 班	5 班	6 班
人数	52	60	62	54	58	62

- A 平均数是 58 B 中位数是 58 C 极差是 40 D 众数是 60

考点: 极差; 算术平均数; 中位数; 众数.

分析: 分别计算该组数据的众数、平均数、中位数及极差后, 选择正确的答案即可.

解答: 解: A. $\bar{x} = (52+60+62+54+58+62) \div 6 = 58$; 故此选项正确;
B. $\because$ 6 个数据按大小排列后为: 52, 54, 58, 60, 62, 62;
 $\therefore$ 中位数为: $(60+58) \div 2 = 59$; 故此选项错误;
C. 极差是 $62 - 52 = 10$, 故此选项错误;
D. 62 出现了 2 次, 最多, $\therefore$ 众数为 62, 故此选项错误;
故选: A.

点评: 此题主要考查了平均数、众数、中位数及极差的知识, 解题时分别计算出众数、中位数、平均数及极差后找到正确的选项即可.

8. (4 分) (2013•兰州) 用配方法解方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 时, 配方后得的方程为 ()

- A $(x+1)^2 = 0$ B $(x-1)^2 = 0$ C $(x+1)^2 = 2$ D $(x-1)^2 = 2$

考点: 解一元二次方程-配方法.

分析: 在本题中, 把常数项 -1 移项后, 应该在左右两边同时加上一次项系数 -2 的一半的平方.

解答: 解: 把方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的常数项移到等号的右边, 得到 $x^2 - 2x = 1$,
方程两边同时加上一次项系数一半的平方, 得到 $x^2 - 2x + 1 = 1 + 1$
配方得 $(x - 1)^2 = 2$.
故选 D.

点评: 考查了解一元二次方程 - 配方法, 配方法的一般步骤:

- (1) 把常数项移到等号的右边;
- (2) 把二次项的系数化为 1;
- (3) 等式两边同时加上一次项系数一半的平方.

选择用配方法解一元二次方程时, 最好使方程的二次项的系数为 1, 一次项的系数是 2 的倍数.

9. (4 分) (2013•兰州) $\triangle ABC$ 中, a、b、c 分别是 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边, 如果 $a^2 + b^2 = c^2$, 那么下列结论正确的是 ()

- A $c \sin A = a$ B $b \cos B = c$ C $a \tan A = b$ D $c \tan B = b$

考点: 勾股定理的逆定理; 锐角三角函数的定义.

分析: 由于 $a^2 + b^2 = c^2$, 根据勾股定理的逆定理得到 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle C = 90^\circ$, 再根据锐角三角函数的定义即可得到正确选项.

解答: 解: $\because a^2 + b^2 = c^2$,
 $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle C = 90^\circ$.

A、 $\sin A = \frac{a}{c}$, 则 $c \sin A = a$. 故本选项正确;

B、 $\cos B = \frac{a}{c}$, 则 $\cos B c = a$. 故本选项错误;

C、 $\tan A = \frac{a}{b}$, 则 $\frac{a}{\tan A} = b$. 故本选项错误;

D、 $\tan B = \frac{b}{a}$, 则 $a \tan B = b$. 故本选项错误.

故选 A.

点评: 本题考查了锐角三角函数的定义和勾股定理的逆定理. 判断三角形是否为直角三角形, 已知三角形三边的长, 只要利用勾股定理的逆定理加以判断即可.

10. (4分) (2013•兰州) 据调查, 2011年5月兰州市的房价均价为7600/m², 2013年同期将达到8200/m², 假设这两年兰州市房价的平均增长率为x, 根据题意, 所列方程为 ()

A $7600(1+x\%)^2=8200$ B $7600(1-x\%)^2=8200$ C $7600(1+x)^2=8200$ D $7600(1-x)^2=8200$

考点: 由实际问题抽象出一元二次方程.

专题: 增长率问题.

分析: 2013年的房价8200=2011年的房价7600×(1+年平均增长率)², 把相关数值代入即可.

解答: 解: 2012年同期的房价为7600×(1+x),
2013年的房价为7600(1+x)(1+x)=7600(1+x)²,
即所列的方程为7600(1+x)²=8200,
故选 C.

点评: 考查列一元二次方程; 得到2013年房价的等量关系是解决本题的关键.

11. (4分) (2012•南通) 已知A(-1, y₁), B(2, y₂) 两点在双曲线 $y = \frac{3+2m}{x}$ 上, 且 y₁ > y₂, 则 m 的取值范围是 ()

A m < 0

B m > 0

C $m > -\frac{3}{2}$

D $m < -\frac{3}{2}$

考点: 反比例函数图象上点的坐标特征.

专题: 计算题.

分析: 将A(-1, y₁), B(2, y₂) 两点分别代入双曲线 $y = \frac{3+2m}{x}$, 求出 y₁ 与 y₂ 的表达式, 再根据 y₁ > y₂ 则列不等式即可解答.

解答: 解: 将A(-1, y₁), B(2, y₂) 两点分别代入双曲线 $y = \frac{3+2m}{x}$ 得,

$$y_1 = -2m - 3,$$

$$y_2 = \frac{3+2m}{2},$$

$$\because y_1 > y_2,$$

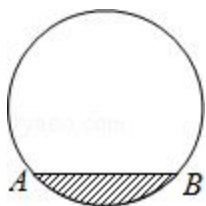
$$\therefore -2m - 3 > \frac{3+2m}{2},$$

$$\text{解得 } m < -\frac{3}{2},$$

故选 D.

点评: 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 要知道, 反比例函数图象上的点符合函数解析式.

12. (4分) (2008•黔南州) 如图是一圆柱形输水管的横截面, 阴影部分为有水部分, 如果水面 AB 宽为 8cm, 水面最深地方的高度为 2cm, 则该输水管的半径为 ()



A 3cm

B 4cm

C 5cm

D 6cm

考点: 垂径定理的应用; 勾股定理.

分析: 过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D, 连接 OA, 由垂径定理可知 $AD = \frac{1}{2}AB$, 设 $OA = r$, 则 $OD = r - 2$, 在 $Rt\triangle AOD$ 中, 利用勾股定理即可求 r 的值.

解答: 解: 如图所示: 过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D, 连接 OA,
 $\because OD \perp AB$,

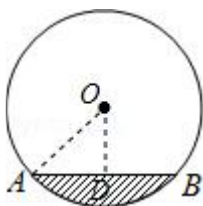
$$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4\text{cm},$$

设 $OA = r$, 则 $OD = r - 2$,

在 $Rt\triangle AOD$ 中, $OA^2 = OD^2 + AD^2$, 即 $r^2 = (r - 2)^2 + 4^2$,

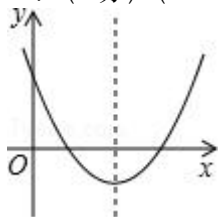
解得 $r = 5\text{cm}$.

故选 C.



点评: 本题考查的是垂径定理的应用及勾股定理, 根据题意作出辅助线, 构造出直角三角形是解答此题的关键.

13. (4分) (2008•巴中) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 则下列说法不正确的是 ()



A $b^2 - 4ac > 0$

B $a > 0$

C $c > 0$

D $-\frac{b}{2a} < 0$

考点: 二次函数图象与系数的关系.

分析: 由抛物线的开口方向判断 a 与 0 的关系, 由抛物线与 y 轴的交点判断 c 与 0 的关系, 然后根据对称轴及抛物线与 x 轴交点情况进行推理, 进而对所得结论进行判断.

解答: 解: A、正确, $\because$ 抛物线与 x 轴有两个交点, $\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0$;

B、正确, $\because$ 抛物线开口向上, $\therefore a > 0$;

C、正确, $\because$ 抛物线与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴, $\therefore c > 0$;

D、错误, $\because$ 抛物线的对称轴在 x 的正半轴上, $\therefore -\frac{b}{2a} > 0$.

故选 D.

点评: 主要考查二次函数图象与系数之间的关系, 以及二次函数与方程之间的转换, 根的判别式的熟练运用.

14. (4分) (2013•兰州) 圆锥底面圆的半径为 3m, 其侧面展开图是半圆, 则圆锥母线长为 ()

A 3cm

B 6cm

C 9cm

D 12cm

考点: 圆锥的计算.

分析: 首先求得圆锥的底面周长, 然后根据圆的周长公式即可求得母线长.

解答: 解: 圆锥的底面周长是: $6\pi\text{cm}$,

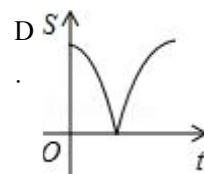
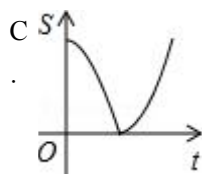
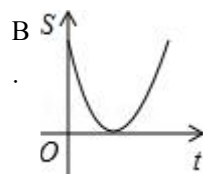
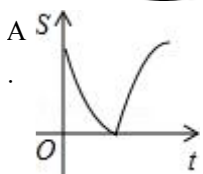
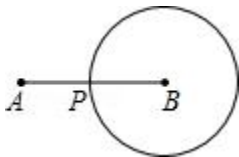
设母线长是 l , 则 $l\pi=6\pi$,

解得: $l=6$.

故选 B.

点评: 考查了圆锥的计算, 正确理解圆锥的侧面展开图与原来的扇形之间的关系是解决本题的关键, 理解圆锥的母线长是扇形的半径, 圆锥的底面圆周长是扇形的弧长.

15. (4分) (2013•兰州) 如图, 动点 P 从点 A 出发, 沿线段 AB 运动至点 B 后, 立即按原路返回, 点 P 在运动过程中速度不变, 则以点 B 为圆心, 线段 BP 长为半径的圆的面积 S 与点 P 的运动时间 t 的函数图象大致为 ()



考点: 动点问题的函数图象.

分析: 分析动点 P 的运动过程, 采用定量分析手段, 求出 S 与 t 的函数关系式, 根据关系式可以得出结论.

解答: 解: 不妨设线段 AB 长度为 1 个单位, 点 P 的运动速度为 1 个单位, 则:

(1) 当点 P 在 A→B 段运动时, $PB=1-t$, $S=\pi(1-t)^2$ ($0\leq t<1$);

(2) 当点 P 在 B→A 段运动时, $PB=t-1$, $S=\pi(t-1)^2$ ($1\leq t\leq 2$).

综上, 整个运动过程中, S 与 t 的函数关系式为: $S=\pi(t-1)^2$ ($0\leq t\leq 2$),

这是一个二次函数, 其图象为开口向上的一段抛物线. 结合题中各选项, 只有 B 符合要求.

故选 B.

点评: 本题结合动点问题考查了二次函数的图象. 解题过程中求出了函数关系式, 这是定量的分析方法, 适用于本题, 如果仅仅用定性分析方法则难以作出正确选择.

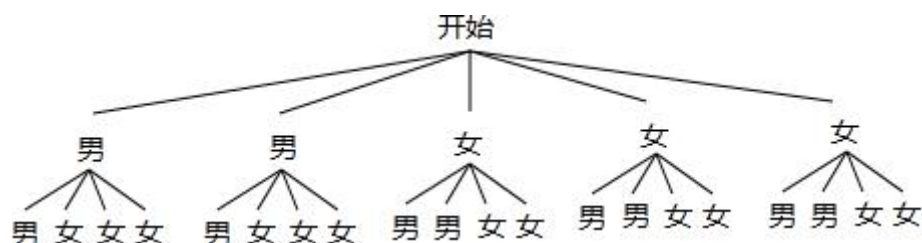
二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

16. (4分) (2013•兰州) 某校决定从两名男生和三名女生中选出两名同学作为兰州国际马拉松赛的志愿者, 则选出一男一女的概率是 $\frac{3}{5}$.

考点: 列表法与树状图法.

分析: 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与选出一男一女的情况, 再利用概率公式求解即可求得答案.

解答: 解: 画树状图得:



∴共有 20 种等可能的结果，选出一男一女的有 12 种情况，

∴选出一男一女的概率是： $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

故答案为： $\frac{3}{5}$.

点评： 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件．注意概率=所求情况数与总情况数之比．

17. (4 分) (2013•兰州) 若 $|b-1| + \sqrt{a-4} = 0$ ，且一元二次方程 $kx^2 + ax + b = 0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是 $k \leq 4$ 且 $k \neq 0$.

考点： 根的判别式；非负数的性质：绝对值；非负数的性质：算术平方根．

专题： 计算题．

分析： 首先根据非负数的性质求得 a 、 b 的值，再由二次函数的根的判别式来求 k 的取值范围．

解答： 解：∵ $|b-1| + \sqrt{a-4} = 0$ ，

$$\therefore b-1=0, \sqrt{a-4}=0,$$

解得， $b=1$ ， $a=4$ ；

又∵一元二次方程 $kx^2 + ax + b = 0$ 有两个实数根，

$$\therefore \Delta = a^2 - 4kb \geq 0 \text{ 且 } k \neq 0,$$

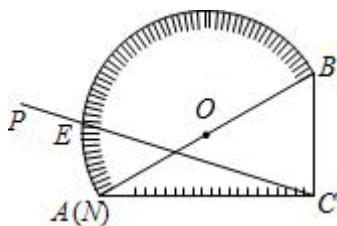
即 $16 - 4k \geq 0$ ，且 $k \neq 0$ ，

解得， $k \leq 4$ 且 $k \neq 0$ ；

故答案为： $k \leq 4$ 且 $k \neq 0$ ．

点评： 本题主要考查了非负数的性质、根的判别式．在解答此题时，注意关于 x 的一元二次方程的二次项系数不为零．

18. (4 分) (2013•兰州) 如图，量角器的直径与直角三角板 ABC 的斜边 AB 重合，其中量角器 0 刻度线的端点 N 与点 A 重合，射线 CP 从 CA 处出发沿顺时针方向以每秒 3 度的速度旋转， CP 与量角器的半圆弧交于点 E ，第 24 秒，点 E 在量角器上对应的读数是 144 度．

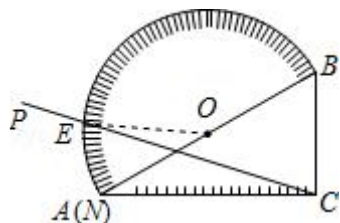


考点： 圆周角定理．

分析： 首先连接 OE ，由 $\angle ACB = 90^\circ$ ，易得点 E 、 A 、 B 、 C 共圆，然后由圆周角定理，求得点 E 在量角器上对应的读数．

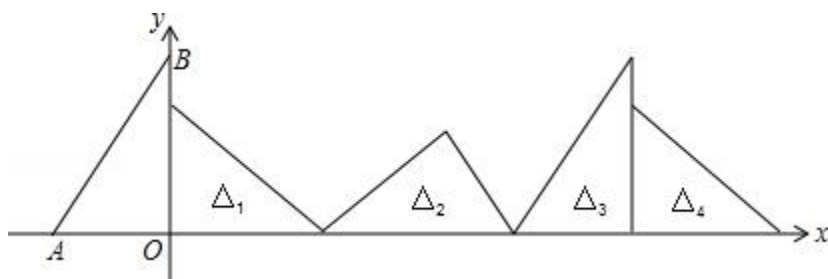
解答： 解：连接 OE ，

$\because \angle ACB=90^\circ$,
 $\therefore A, B, C$ 在以点 O 为圆心, AB 为直径的圆上,
 $\therefore$ 点 E, A, B, C 共圆,
 $\because \angle ACE=3 \times 24=72^\circ$,
 $\therefore \angle AOE=2 \angle ACE=144^\circ$.
 $\therefore$ 点 E 在量角器上对应的读数是: 144° .
 故答案为: 144 .



点评: 本题考查的是圆周角定理. 此题难度适中, 注意掌握辅助线的作法, 注意数形结合思想的应用.

19. (4 分) (2013•兰州) 如图, 在直角坐标系中, 已知点 $A(-3, 0)$ 、 $B(0, 4)$, 对 $\triangle OAB$ 连续作旋转变换, 依次得到 $\triangle_1$ 、 $\triangle_2$ 、 $\triangle_3$ 、 $\triangle_4 \dots$, 则 $\triangle_{2013}$ 的直角顶点的坐标为 $(8052, 0)$.



考点: 规律型: 点的坐标.

专题: 规律型.

分析: 根据勾股定理列出 AB 的长, 再根据第四个三角形与第一个三角形的位置相同可知每三个三角形为一个循环组依次循环, 然后求出一个循环组旋转前进的长度, 再用 2013 除以 3, 根据商为 671 可知第 2013 个三角形的直角顶点为循环组的最后一个三角形的顶点, 求出即可.

解答: 解: $\because$ 点 $A(-3, 0)$ 、 $B(0, 4)$,

$$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

由图可知, 每三个三角形为一个循环组依次循环, 一个循环组前进的长度为: $4+5+3=12$,

$$\because 2013 \div 3 = 671,$$

$\therefore \triangle_{2013}$ 的直角顶点是第 671 个循环组的最后一个三角形的直角顶点,

$$\because 671 \times 12 = 8052,$$

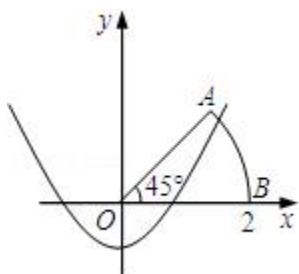
$\therefore \triangle_{2013}$ 的直角顶点的坐标为 $(8052, 0)$.

故答案为: $(8052, 0)$.

点评: 本题是对点的坐标变化规律的考查了, 难度不大, 仔细观察图形, 得到每三个三角形为一个循环组依次循环是解题的关键, 也是求解的难点.

20. (4 分) (2013•兰州) 如图, 以扇形 OAB 的顶点 O 为原点, 半径 OB 所在的直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系, 点 B 的坐标为 $(2, 0)$, 若抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + k$ 与扇形 OAB 的边界总有两个公共点, 则实数 k 的取值范围是 $-2 < k$

$$\leq \frac{1}{2}.$$



考点：二次函数的性质.

分析：根据 $\angle AOB=45^\circ$ 求出直线 OA 的解析式，然后与抛物线解析式联立求出有一个公共点时的 k 值，即为一个交点时的最大值，再求出抛物线经过点 B 时的 k 的值，即为一个交点时的最小值，然后写出 k 的取值范围即可.

解答：解：由图可知， $\angle AOB=45^\circ$ ，
 $\therefore$ 直线 OA 的解析式为 $y=x$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y=x \\ y=\frac{1}{2}x^2+k \end{cases} \text{消掉 } y \text{ 得,}$$

$$x^2 - 2x + 2k = 0,$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2k = 0,$$

即 $k = \frac{1}{2}$ 时，抛物线与 OA 有一个交点，

此交点的横坐标为 1，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 (2, 0)，

$\therefore OA=2$ ，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ，

$\therefore$ 交点在线段 AO 上；

当抛物线经过点 B (2, 0) 时， $\frac{1}{2} \times 4 + k = 0$ ，

解得 $k = -2$ ，

$\therefore$ 要使抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + k$ 与扇形 OAB 的边界总有两个公共点，实数 k 的取值范围是 $-2 < k < \frac{1}{2}$ 。

故答案为： $-2 < k < \frac{1}{2}$ 。

点评：本题考查了二次函数的性质，主要利用了联立两函数解析式确定交点个数的方法，根据图形求出有一个交点时的最大值与最小值是解题的关键。

三、解答题 (本大题共 8 小题，共 70 分)

21. (10 分) (2013·兰州) (1) 计算： $(-1)^{2013} - 2^{-1} + \sin 30^\circ + (\pi - 3.14)^0$

(2) 解方程： $x^2 - 3x - 1 = 0$ 。

考点：解一元二次方程-公式法；实数的运算；零指数幂；负整数指数幂；特殊角的三角函数值.

分析： (1) 先计算负整数指数幂、零指数幂以及特殊角的三角函数值，然后计算加减法；

(2) 利用求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 来解方程.

解答： 解：(1) 原式 $= -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 0$ ；

(2) 关于 x 的方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的二次项系数 $a=1$ ，一次项系数 $b=-3$ ，常数项 $c=-1$ ，则

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2},$$

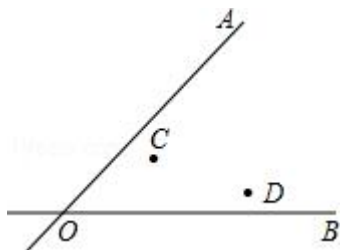
$$\text{解得, } x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

点评:

本题考查了解一元二次方程——公式法. 利用公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 来解方程时, 需要弄清楚公式中的

字母 a 、 b 、 c 所表示的含义.

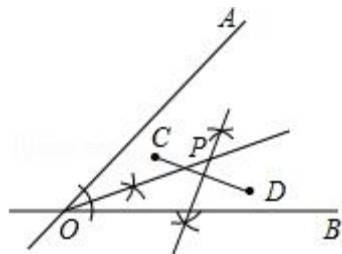
22. (5分) (2013•兰州) 如图, 两条公路 OA 和 OB 相交于 O 点, 在 $\angle AOB$ 的内部有工厂 C 和 D , 现要修建一个货站 P , 使货站 P 到两条公路 OA 、 OB 的距离相等, 且到两工厂 C 、 D 的距离相等, 用尺规作出货站 P 的位置. (要求: 不写作法, 保留作图痕迹, 写出结论)



考点: 作图—应用与设计作图.

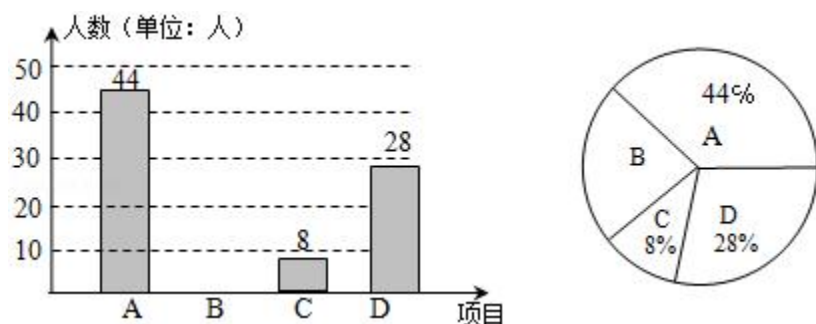
分析: 根据点 P 到 $\angle AOB$ 两边距离相等, 到点 C 、 D 的距离也相等, 点 P 既在 $\angle AOB$ 的角平分线上, 又在 CD 垂直平分线上, 即 $\angle AOB$ 的角平分线和 CD 垂直平分线的交点处即为点 P .

解答: 解: 如图所示: 作 CD 的垂直平分线, $\angle AOB$ 的角平分线的交点 P 即为所求.



点评: 此题主要考查了线段的垂直平分线和角平分线的作法. 这些基本作图要熟练掌握, 注意保留作图痕迹.

23. (6分) (2013•兰州) 在兰州市开展的“体育、艺术 2+1”活动中, 某校根据实际情况, 决定主要开设 A: 乒乓球, B: 篮球, C: 跑步, D: 跳绳这四种运动项目. 为了解学生喜欢哪一种项目, 随机抽取了部分学生进行调查, 并将调查结果绘制成如图甲、乙所示的条形统计图和扇形统计图. 请你结合图中的信息解答下列问题:



(1) 样本中喜欢 B 项目的人数百分比是 20%, 其所在扇形统计图中的圆心角的度数是 72°;

(2) 把条形统计图补充完整;

(3) 已知该校有 1000 人, 根据样本估计全校喜欢乒乓球的人数是多少?

考点：条形统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

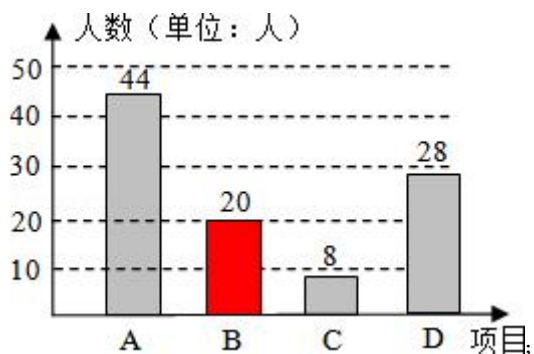
分析： (1) 利用 1 减去其它各组所占的比例即可求得喜欢 B 项目的人数百分比，利用百分比乘以 360 度即可求得扇形的圆心角的度数；

(2) 根据喜欢 A 的有 44 人，占 44% 即可求得调查的总人数，乘以对应的百分比即可求得喜欢 B 的人数，作出统计图；

(3) 总人数 1000 乘以喜欢乒乓球的人数所占的百分比即可求解.

解答： 解：(1) $1 - 44\% - 8\% - 28\% = 20\%$ ，所在扇形统计图中的圆心角的度数是： $360 \times 20\% = 72^\circ$ ；

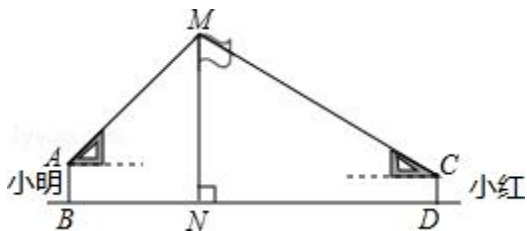
(2) 调查的总人数是： $44 \div 44\% = 100$ (人)，
则喜欢 B 的人数是： $100 \times 20\% = 20$ (人)，



(3) 全校喜欢乒乓球的人数是 $1000 \times 44\% = 440$ (人).

点评： 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

24. (8 分) (2013·兰州) 如图，在活动课上，小明和小红合作用一副三角板来测量学校旗杆高度. 已知小明的眼睛与地面的距离 (AB) 是 1.7m，他调整自己的位置，设法使得三角板的一条直角边保持水平，且斜边与旗杆顶端 M 在同一条直线上，测得旗杆顶端 M 仰角为 45° ；小红眼睛与地面的距离 (CD) 是 1.5m，用同样的方法测得旗杆顶端 M 的仰角为 30° . 两人相距 28 米且位于旗杆两侧 (点 B、N、D 在同一条直线上). 求出旗杆 MN 的高度. (参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.4$ ， $\sqrt{3} \approx 1.7$ ，结果保留整数.)



考点：解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

分析： 过点 A 作 $AE \perp MN$ 于 E，过点 C 作 $CF \perp MN$ 于 F，则 $EF = 0.2$ m. 由 $\triangle AEM$ 是等腰直角三角形得出 $AE = ME$ ，
设 $AE = ME = x$ m，则 $MF = (x + 0.2)$ m， $FC = (28 - x)$ m. 在 $Rt\triangle MFC$ 中，由 $\tan \angle MCF = \frac{MF}{FC}$ ，得出 $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x+0.2}{28-x}$ ，
解方程求出 x 的值，则 $MN = ME + EN$.

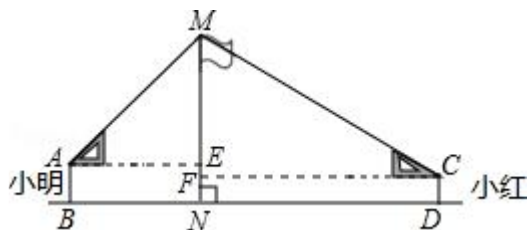
解答： 解：过点 A 作 $AE \perp MN$ 于 E，过点 C 作 $CF \perp MN$ 于 F，
则 $EF = AB - CD = 1.7 - 1.5 = 0.2$ (m)，
在 $Rt\triangle AEM$ 中， $\because \angle AEM = 90^\circ$ ， $\angle MAE = 45^\circ$ ，
 $\therefore AE = ME$.
设 $AE = ME = x$ m，则 $MF = (x + 0.2)$ m， $FC = (28 - x)$ m.
在 $Rt\triangle MFC$ 中， $\because \angle MFC = 90^\circ$ ， $\angle MCF = 30^\circ$ ，
 $\therefore MF = CF \cdot \tan \angle MCF$ ，

$$\therefore x+0.2=\frac{\sqrt{3}}{3}(28-x),$$

解得 $x \approx 10.0$,

$$\therefore MN=ME+EN \approx 10+1.7 \approx 12 \text{ 米}.$$

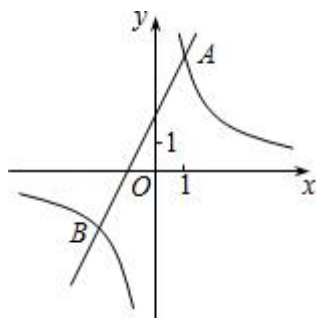
答：旗杆 MN 的高度约为 12 米.



点评： 本题考查了解直角三角形的问题. 该题是一个比较常规的解直角三角形问题，建立模型比较简单，但求解过程中涉及到根式和小数，算起来麻烦一些.

25. (9 分) (2011•来宾) 已知反比例函数 $y_1 = \frac{k}{x}$ 的图象与一次函数 $y_2 = ax + b$ 的图象交于点 A (1, 4) 和点 B (m, -2),

- (1) 求这两个函数的关系式;
- (2) 观察图象，写出使得 $y_1 > y_2$ 成立的自变量 x 的取值范围;
- (3) 如果点 C 与点 A 关于 x 轴对称，求 $\triangle ABC$ 的面积.



考点： 反比例函数与一次函数的交点问题.

专题： 计算题.

分析： (1) 先根据点 A 的坐标求出反比例函数的解析式为 $y_1 = \frac{4}{x}$ ，再求出 B 的坐标是 (-2, -2)，利用待定系数

法求一次函数的解析式;

(2) 当一次函数的值小于反比例函数的值时，直线在双曲线的下方，直接根据图象写出一一次函数的值小于反比例函数的值 x 的取值范围 $x < -2$ 或 $0 < x < 1$.

(3) 根据坐标与线段的转换可得出：AC、BD 的长，然后根据三角形的面积公式即可求出答案.

解答： 解：(1) $\because$ 函数 $y_1 = \frac{k}{x}$ 的图象过点 A (1, 4)，即 $4 = \frac{k}{1}$,

$$\therefore k=4, \text{ 即 } y_1 = \frac{4}{x},$$

$$\text{又 } \because \text{点 B (m, -2) 在 } y_1 = \frac{4}{x} \text{ 上,}$$

$$\therefore m = -2,$$

$$\therefore B (-2, -2),$$

又 $\because$ 一次函数 $y_2 = ax + b$ 过 A、B 两点,

$$\text{即 } \begin{cases} -2a+b=-2 \\ a+b=4 \end{cases},$$

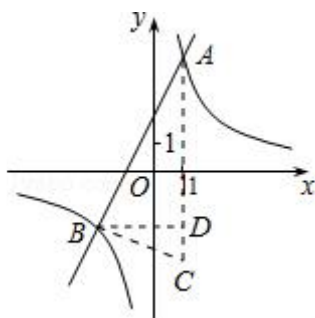
$$\text{解之得} \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}.$$

$$\therefore y_2 = 2x + 2.$$

$$\text{综上可得 } y_1 = \frac{4}{x}, \quad y_2 = 2x + 2.$$

(2) 要使 $y_1 > y_2$, 即函数 y_1 的图象总在函数 y_2 的图象上方,
 $\therefore x < -2$ 或 $0 < x < 1$.

(3)



由图形及题意可得: $AC=8$, $BD=3$,

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12.$$

点评: 本题主要考查了待定系数法求反比例函数与一次函数的解析式. 以及三角形面积的求法, 这里体现了数形结合的思想.

26. (10分) (2013·兰州) 如图1, 在 $\triangle OAB$ 中, $\angle OAB=90^\circ$, $\angle AOB=30^\circ$, $OB=8$. 以 OB 为边, 在 $\triangle OAB$ 外作等边 $\triangle OBC$, D 是 OB 的中点, 连接 AD 并延长交 OC 于 E .

(1) 求证: 四边形 $ABCE$ 是平行四边形;

(2) 如图2, 将图1中的四边形 $ABCO$ 折叠, 使点 C 与点 A 重合, 折痕为 FG , 求 OG 的长.

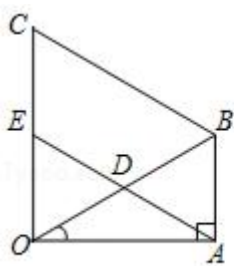


图1

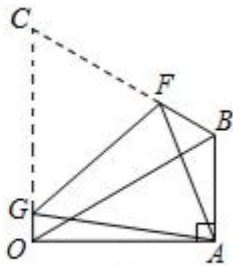


图2

考点: 平行四边形的判定与性质; 等边三角形的性质; 翻折变换 (折叠问题).

分析: (1) 首先根据直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半可得 $DO=DA$, 再根据等边对等角可得 $\angle DAO=\angle DOA=30^\circ$, 进而算出 $\angle AEO=60^\circ$, 再证明 $BC \parallel AE$, $CO \parallel AB$, 进而证出四边形 $ABCE$ 是平行四边形;

(2) 设 $OG=x$, 由折叠可得: $AG=GC=8-x$, 再利用三角函数可计算出 AO , 再利用勾股定理计算出 OG 的长即可.

解答: (1) 证明: $\because$ $\text{Rt}\triangle OAB$ 中, D 为 OB 的中点,

$$\therefore DO=DA,$$

$$\therefore \angle DAO=\angle DOA=30^\circ, \quad \angle EOA=90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEO=60^\circ,$$

又 $\because \triangle OBC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle BCO=\angle AEO=60^\circ,$$

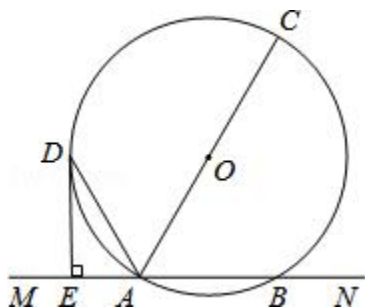
$\therefore BC \parallel AE$,
 $\because \angle BAO = \angle COA = 90^\circ$,
 $\therefore CO \parallel AB$,
 $\therefore$ 四边形 ABCE 是平行四边形;

(2) 解: 设 $OG = x$, 由折叠可得: $AG = GC = 8 - x$,
 在 $Rt\triangle ABO$ 中,
 $\because \angle OAB = 90^\circ$, $\angle AOB = 30^\circ$, $BO = 8$,
 $\therefore AO = BO \cdot \cos 30^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$,
 在 $Rt\triangle OAG$ 中, $OG^2 + OA^2 = AG^2$,
 $x^2 + (4\sqrt{3})^2 = (8 - x)^2$,
 解得: $x = 1$,
 $\therefore OG = 1$.

点评: 此题主要考查了平行四边形的判定与性质, 以及勾股定理的应用, 图形的翻折变换, 关键是掌握平行四边形的判定定理.

27. (10 分) (2008•青海) 已知, 如图, 直线 MN 交 $\odot O$ 于 A, B 两点, AC 是直径, AD 平分 $\angle CAM$ 交 $\odot O$ 于 D, 过 D 作 $DE \perp MN$ 于 E.

- (1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;
 (2) 若 $DE = 6\text{cm}$, $AE = 3\text{cm}$, 求 $\odot O$ 的半径.



考点: 切线的判定; 平行线的判定与性质; 圆周角定理; 相似三角形的判定与性质.

专题: 几何综合题.

分析: (1) 连接 OD, 根据平行线的判断方法与性质可得 $\angle ODE = \angle DEM = 90^\circ$, 且 D 在 $\odot O$ 上, 故 DE 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 由直角三角形的特殊性质, 可得 AD 的长, 又有 $\triangle ACD \sim \triangle ADE$. 根据相似三角形的性质列出比例式, 代入数据即可求得圆的半径.

解答: (1) 证明: 连接 OD.

$\because OA = OD$,
 $\therefore \angle OAD = \angle ODA$. (1 分)
 $\because \angle OAD = \angle DAE$,
 $\therefore \angle ODA = \angle DAE$. (2 分)
 $\therefore DO \parallel MN$. (3 分)
 $\because DE \perp MN$,
 $\therefore \angle ODE = \angle DEM = 90^\circ$.
 即 $OD \perp DE$. (4 分)
 $\because D$ 在 $\odot O$ 上,
 $\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线. (5 分)

(2) 解: $\because \angle AED = 90^\circ$, $DE = 6$, $AE = 3$,

$$\therefore AD = \sqrt{DE^2 + AE^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}. \quad (6 \text{ 分})$$

连接 CD.

$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADC = \angle AED = 90^\circ. \quad (7 \text{ 分})$$

$\therefore \angle CAD = \angle DAE,$

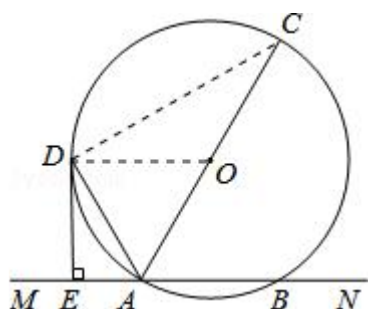
$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ADE. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD}.$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{5}}{3} = \frac{AC}{3\sqrt{5}}.$$

则 $AC = 15$ (cm). (9 分)

$\therefore \odot O$ 的半径是 7.5cm. (10 分)



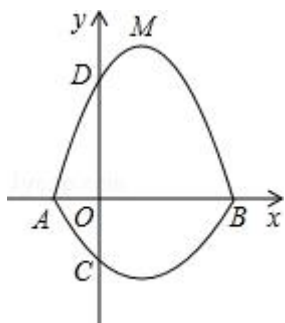
点评: 本题考查常见的几何题型, 包括切线的判定, 线段等量关系的证明及线段长度的求法, 要求学生掌握常见的解题方法, 并能结合图形选择简单的方法解题.

28. (12 分) (2013·兰州) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, A 、 B 为 x 轴上两点, C 、 D 为 y 轴上的两点, 经过点 A 、 C 、 B 的抛物线的一部分 C_1 与经过点 A 、 D 、 B 的抛物线的一部分 C_2 组合成一条封闭曲线, 我们把这条封闭曲线成为“蛋线”. 已知点 C 的坐标为 $(0, -\frac{3}{2})$, 点 M 是抛物线 $C_2: y = mx^2 - 2mx - 3m$ ($m < 0$) 的顶点.

(1) 求 A 、 B 两点的坐标;

(2) “蛋线”在第四象限上是否存在一点 P , 使得 $\triangle PBC$ 的面积最大? 若存在, 求出 $\triangle PBC$ 面积的最大值; 若不存在, 请说明理由;

(3) 当 $\triangle BDM$ 为直角三角形时, 求 m 的值.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 将 $y = mx^2 - 2mx - 3m$ 化为交点式, 即可得到 A 、 B 两点的坐标;

(2) 先用待定系数法得到抛物线 C_1 的解析式, 过点 P 作 $PQ \parallel y$ 轴, 交 BC 于 Q , 用待定系数法得到直线 BC 的解析式, 再根据三角形的面积公式和配方法得到 $\triangle PBC$ 面积的最大值;

(3) 先表示出 DM^2 , BD^2 , MB^2 , 再分两种情况: ① $DM^2 + BD^2 = MB^2$ 时; ② $DM^2 + MB^2 = BD^2$ 时, 讨论即可求得 m 的值.

解答: 解: (1) $y = mx^2 - 2mx - 3m = m(x - 3)(x + 1)$,
 $\therefore m \neq 0$,

∴ 当 $y=0$ 时, $x_1=-1$, $x_2=3$,
 ∴ $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$;

(2) 设 $C_1: y=ax^2+bx+c$, 将 A 、 B 、 C 三点的坐标代入得:

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \\ c=-\frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=-\frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\text{故 } C_1: y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}.$$

如图: 过点 P 作 $PQ \parallel y$ 轴, 交 BC 于 Q ,

由 B 、 C 的坐标可得直线 BC 的解析式为: $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$,

设 $P(x, \frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2})$, 则 $Q(x, \frac{1}{2}x-\frac{3}{2})$,

$$PQ=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x,$$

$$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}PQ \cdot OB=\frac{1}{2}x \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right) \times 3=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{16},$$

当 $x=\frac{3}{2}$ 时, $S_{\triangle PBC}$ 有最大值, $S_{\max}=\frac{27}{16}$,

$$\frac{1}{2}x \left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{15}{8},$$

$$P\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{8}\right);$$

$$(3) y=mx^2-2mx-3m=m(x-1)^2-4m,$$

顶点 M 坐标 $(1, -4m)$,

当 $x=0$ 时, $y=-3m$,

∴ $D(0, -3m)$, $B(3, 0)$,

$$\therefore DM^2=(0-1)^2+(-3m+4m)^2=m^2+1,$$

$$MB^2=(3-1)^2+(0+4m)^2=16m^2+4,$$

$$BD^2=(3-0)^2+(0+3m)^2=9m^2+9,$$

当 $\triangle BDM$ 为 $Rt\triangle$ 时有: $DM^2+BD^2=MB^2$ 或 $DM^2+MB^2=BD^2$.

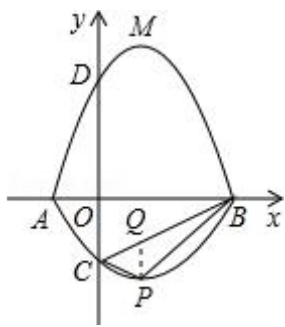
$$\text{① } DM^2+BD^2=MB^2 \text{ 时有: } m^2+1+9m^2+9=16m^2+4,$$

解得 $m=-1$ ($\because m < 0$, $\therefore m=1$ 舍去);

$$\text{② } DM^2+MB^2=BD^2 \text{ 时有: } m^2+1+16m^2+4=9m^2+9,$$

$$\text{解得 } m=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (} m=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 舍去).}$$

综上, $m=-1$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\triangle BDM$ 为直角三角形.



点评: 考查了二次函数综合题，涉及的知识点有：抛物线的交点式，待定系数法求抛物线的解析式，待定系数法求直线的解析式，三角形的面积公式，配方法的应用，勾股定理，分类思想的运用，综合性较强，有一定的难度.