

2012 年兰州市中考数学试题

一、单项选择题 (每小题 4 分, 共 60 分)

1. $\sin 60^\circ$ 的相反数是【 】

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 近视眼镜的度数 y (度)与镜片焦距 x (m)成反比例, 已知 400 度近视眼镜镜片的焦距为 0.25m, 则 y 与 x 的函数关系式为【 】

- A. $y = \frac{400}{x}$ B. $y = \frac{1}{4x}$ C. $y = \frac{100}{x}$ D. $y = \frac{1}{400x}$

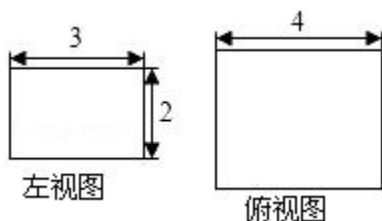
3. 已知两圆的直径分别为 2cm 和 4cm, 圆心距为 3cm, 则这两个圆的位置关系是【 】

- A. 相交 B. 外切 C. 外离 D. 内含

4. 抛物线 $y = -2x^2 + 1$ 的对称轴是【 】

- A. 直线 $x = \frac{1}{2}$ B. 直线 $x = -\frac{1}{2}$ C. y 轴 D. 直线 $x = 2$

5. 一个长方体的左视图、俯视图及相关数据如图所示, 则其主视图的面积为【 】



- A. 6 B. 8 C. 12 D. 24

6. 如果一个扇形的弧长等于它的半径, 那么此扇形称为“等边扇形”, 则半径为 2 的“等边扇形”的面积为【 】

- A. π B. 1 C. 2 D. $\frac{2\pi}{3}$

7. 抛物线 $y = (x + 2)^2 - 3$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 平移得到, 则下列平移过程正确的是【 】

- A. 先向左平移 2 个单位, 再向上平移 3 个单位
B. 先向左平移 2 个单位, 再向下平移 3 个单位
C. 先向右平移 2 个单位, 再向下平移 3 个单位
D. 先向右平移 2 个单位, 再向上平移 3 个单位

8. 用扇形统计图反应地球上陆地面积与海洋面积所占比例时, 陆地面积所对应的圆心角是 108° , 当宇宙中一块陨石落在地球上, 则落在陆地上的概率是【 】

- A. 0.2 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.5

9. 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图象上有两点 $(-1, y_1)$, $(-\frac{1}{4}, y_2)$, 则 $y_1 - y_2$ 的值是【 】

- A. 负数 B. 非正数 C. 正数 D. 不能确定

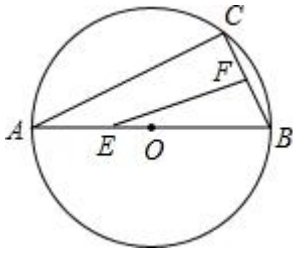
10. 某学校准备修建一个面积为 200m^2 的矩形花圃, 它的长比宽多 10m, 设花圃的宽为 $x\text{m}$, 则可列方程为【 】

- A. $x(x - 10) = 200$ B. $2x + 2(x - 10) = 200$
C. $x(x + 10) = 200$ D. $2x + 2(x + 10) = 200$

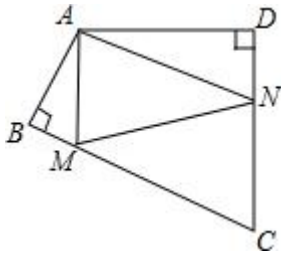
11. 已知二次函数 $y = a(x + 1)^2 - b (a \neq 0)$ 有最小值, 则 a 、 b 的大小关系为【 】

- A. $a > b$ B. $a < b$ C. $a = b$ D. 不能确定

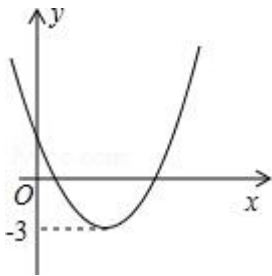
12. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $BC = 2\text{cm}$, F 是弦 BC 的中点, $\angle ABC = 60^\circ$. 若动点 E 以 2cm/s 的速度从 A 点出发沿着 $A \rightarrow B \rightarrow A$ 方向运动, 设运动时间为 $t(\text{s}) (0 \leq t < 3)$, 连接 EF , 当 $\triangle BEF$ 是直角三角形时, $t(\text{s})$ 的值为 【 】



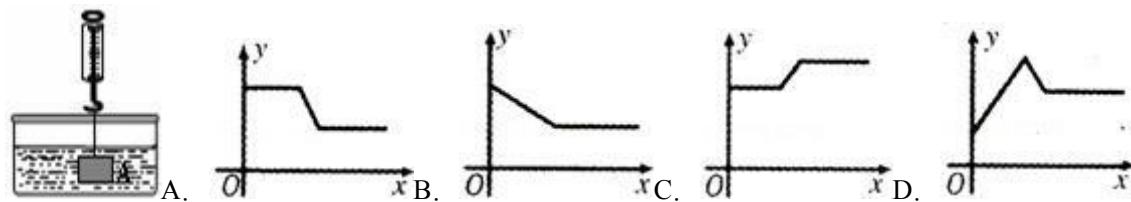
- A. $\frac{7}{4}$ B. 1 C. $\frac{7}{4}$ 或 1 D. $\frac{7}{4}$ 或 1 或 $\frac{9}{4}$
13. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 120^\circ$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, 在 BC 、 CD 上分别找一点 M 、 N , 使 $\triangle AMN$ 周长最小时, 则 $\angle AMN + \angle ANM$ 的度数为 【 】



- A. 130° B. 120° C. 110° D. 100°
14. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示, 若 $|ax^2 + bx + c| = k (k \neq 0)$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是 【 】

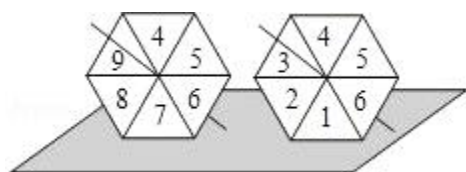


- A. $k < -3$ B. $k > -3$ C. $k < 3$ D. $k > 3$
15. 在物理实验课上, 小明用弹簧称将铁块 A 悬于盛有水的水槽中, 然后匀速向上提起, 直至铁块完全露出水面一定高度, 则下图能反映弹簧称的读数 y (单位: N) 与铁块被提起的高度 x (单位: cm) 之间的函数关系的大致图象是 【 】

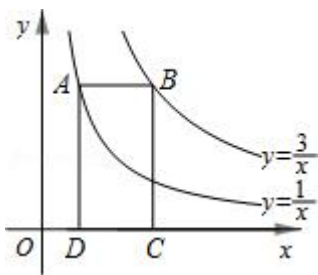


二、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

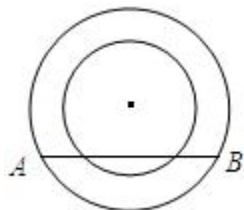
16. 如图所示, 小明和小龙做转陀螺游戏, 他们同时分别转动一个陀螺, 当两个陀螺都停下来时, 与桌面相接触的边上的数字都是奇数的概率是_____.



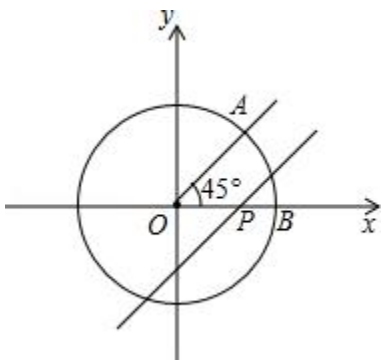
17. 如图, 点 A 在双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上, 点 B 在双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上, 且 $AB \parallel x$ 轴, C, D 在 x 轴上, 若四边形 $ABCD$ 为矩形, 则它的面积为_____.



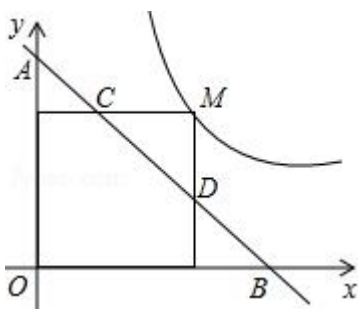
18. 如图, 两个同心圆, 大圆半径为 5cm, 小圆的半径为 3cm, 若大圆的弦 AB 与小圆相交, 则弦 AB 的取值范围是_____.



19. 如图, 已知 $\odot O$ 是以坐标原点 O 为圆心, 1 为半径的圆, $\angle AOB = 45^\circ$, 点 P 在 x 轴上运动, 若过点 P 且与 OA 平行的直线与 $\odot O$ 有公共点, 设 $P(x, 0)$, 则 x 的取值范围是_____.



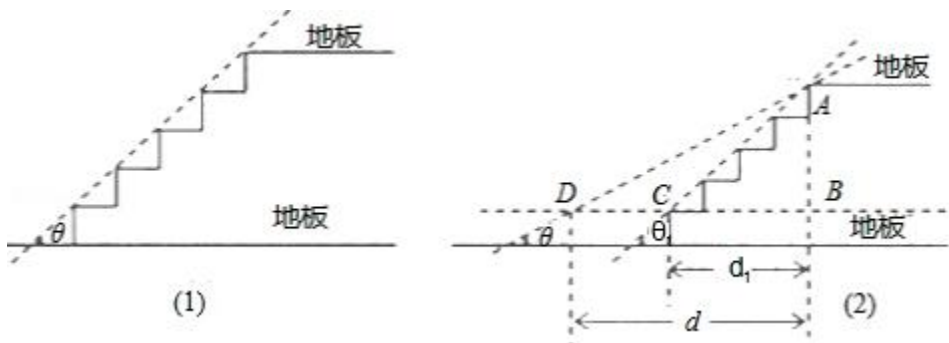
20. 如图, M 为双曲线 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$ 上的一点, 过点 M 作 x 轴、 y 轴的垂线, 分别交直线 $y = -x + m$ 于点 D, C 两点, 若直线 $y = -x + m$ 与 y 轴交于点 A , 与 x 轴相交于点 B , 则 $AD \cdot BC$ 的值为_____.



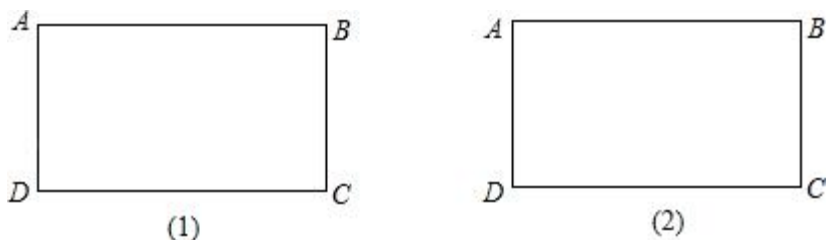
三、解答题 (本大题 8 小题, 共 70 分)

21. 已知 x 是一元二次方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的根, 求代数式 $\frac{x-3}{3x^2-6x} \div \left[x+2 - \frac{5}{x-2} \right]$ 的值.

22. 在建筑楼梯时, 设计者要考虑楼梯的安全程度, 如图(1), 虚线为楼梯的倾斜度, 斜度线与地面的夹角为倾角 θ , 一般情况下, 倾角越小, 楼梯的安全程度越高; 如图(2)设计者为了提高楼梯的安全程度, 要把楼梯的倾角 θ_1 减至 θ_2 , 这样楼梯所占地板的长度由 d_1 增加到 d_2 , 已知 $d_1 = 4\text{m}$, $\angle \theta_1 = 40^\circ$, $\angle \theta_2 = 36^\circ$, 求楼梯占用地板增加的长度(计算结果精确到 0.01m , 参考数据: $\tan 40^\circ = 0.839$, $\tan 36^\circ = 0.727$).

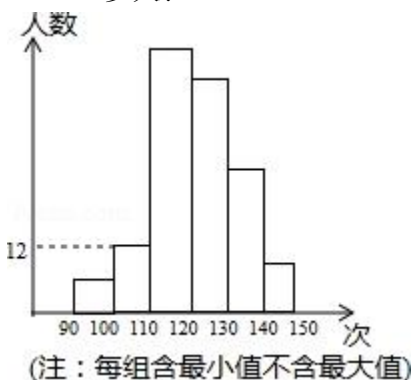


23. 如图(1), 矩形纸片 $ABCD$, 把它沿对角线 BD 向上折叠,
 (1)在图(2)中用实线画出折叠后得到的图形(要求尺规作图, 保留作图痕迹, 不写作法);
 (2)折叠后重合部分是什么图形? 说明理由.



24. 5月23、24日, 兰州市九年级学生进行了中考体育测试, 某校抽取了部分学生的一分钟跳绳测试成绩, 将测试成绩整理后作出统计图. 甲同学计算出前两组的频率和是 0.12 , 乙同学计算出第一组的频率为 0.04 , 丙同学计算出从左至右第二、三、四组的频数比为 $4:17:15$. 结合统计图回答下列问题:

- (1)这次共抽取了多少名学生的一分钟跳绳测试成绩?
 (2)若跳绳次数不少于 130 次为优秀, 则这次测试成绩的优秀率是多少?
 (3)如果这次测试成绩中的中位数是 120 次, 那么这次测试中, 成绩为 120 次的学生至少有多少人?



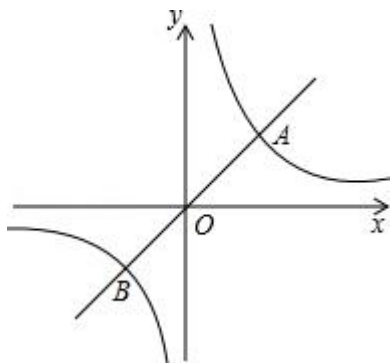
25. 如图, 定义: 若双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 与它的其中一条对称轴 $y = x$ 相交于 A 、 B 两点, 则线段

AB 的长度为双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的对径.

(1) 求双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的对径;

(2) 若双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的对径是 $10\sqrt{2}$, 求 k 的值;

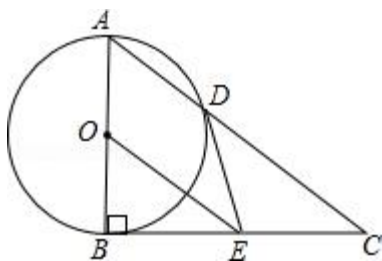
(3) 仿照上述定义, 定义双曲线 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的对径.



26. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 AC 于点 D , E 是 BC 的中点, 连接 DE 、 OE .

(1) 判断 DE 与 $\odot O$ 的位置关系并说明理由;

(2) 若 $\tan C = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $DE = 2$, 求 AD 的长.



27. 若 x_1, x_2 是关于一元二次方程 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的两个根, 则方程的两个根 x_1, x_2 和系数 a 、

b 、 c 有如下关系: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. 把它称为一元二次方程根与系数关系定理. 如

果设二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 x 轴的两个交点为 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$. 利用根与系数关系定理可以得到 A 、 B 两个交点间的距离为:

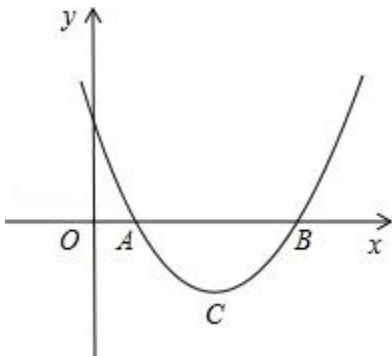
$$AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}.$$

参考以上定理和结论, 解答下列问题:

设二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象与 x 轴的两个交点 $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$, 抛物线的顶点为 C , 显然 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

(1) 当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时, 求 $b^2 - 4ac$ 的值;

(2) 当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时, 求 $b^2 - 4ac$ 的值.



28. 如图, $\text{Rt}\triangle ABO$ 的两直角边 OA 、 OB 分别在 x 轴的负半轴和 y 轴的正半轴上, O 为坐标原点,

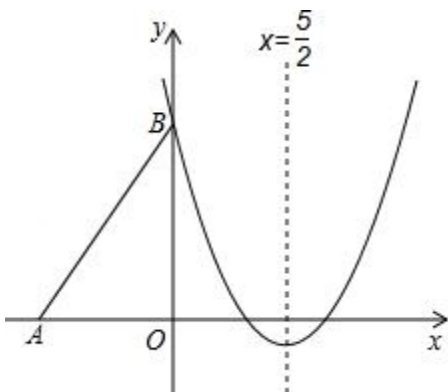
A 、 B 两点的坐标分别为 $(-3, 0)$ 、 $(0, 4)$, 抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 B , 且顶点在直线 $x = \frac{5}{2}$ 上.

(1) 求抛物线对应的函数关系式;

(2) 若把 $\triangle ABO$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle DCE$, 点 A 、 B 、 O 的对应点分别是 D 、 C 、 E , 当四边形 $ABCD$ 是菱形时, 试判断点 C 和点 D 是否在该抛物线上, 并说明理由;

(3) 在(2)的条件下, 连接 BD , 已知对称轴上存在一点 P 使得 $\triangle PBD$ 的周长最小, 求出 P 点的坐标;

(4) 在(2)、(3)的条件下, 若点 M 是线段 OB 上的一个动点(点 M 与点 O 、 B 不重合), 过点 M 作 $\parallel BD$ 交 x 轴于点 N , 连接 PM 、 PN , 设 OM 的长为 t , $\triangle PMN$ 的面积为 S , 求 S 和 t 的函数关系式, 并写出自变量 t 的取值范围, S 是否存在最大值? 若存在, 求出最大值和此时 M 点的坐标; 若不存在, 说明理由.



2012年甘肃省兰州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题(每小题4分,共60分).

1. $\sin 60^\circ$ 的相反数是()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

考点: 特殊角的三角函数值.

分析: 根据特殊角的三角函数值和相反数的定义解答即可.

解答:

解: $\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \sin 60^\circ$ 的相反数是 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

故选 C.

点评: 本题考查特殊角的三角函数值和相反数的定义, 要求学生牢记并熟练运用.

2. 近视眼镜的度数 y (度)与镜片焦距 x (m)成反比例, 已知 400 度近视眼镜镜片的焦距为 0.25m, 则 y 与 x 的函数关系式为()

A. $y = \frac{400}{x}$

B. $y = \frac{1}{4x}$

C. $y = \frac{100}{x}$

D. $y = \frac{1}{400x}$

考点: 根据实际问题列反比例函数关系式.

专题: 应用题.

分析: 设出反比例函数解析式, 把(0.25, 400)代入即可求解.

解答:

解: 设 $y = \frac{k}{x}$,

400 度近视眼镜镜片的焦距为 0.25m,

$\therefore k = 0.25 \times 400 = 100$,

$\therefore y = \frac{100}{x}$.

故选 C.

点评:

反比例函数的一般形式为 $y = \frac{k}{x}$ (k 是常数, 且 $k \neq 0$), 常用待定系数法求解函数解析式.

3. 已知两圆的直径分别为 2cm 和 4cm, 圆心距为 3cm, 则这两个圆的位置关系是()

A. 相交

B. 外切

C. 外离

D. 内含

考点: 圆与圆的位置关系.

分析: 本题直接告诉了两圆的半径及圆心距, 根据数量关系与两圆位置关系的对应情况便可直接得出答案.

解答: 解: 由题意知,

两圆圆心距 $d = 3 > R - r = 2$ 且 $d = 3 < R + r = 6$,

故两圆相交.

故选 A.

点评: 本题主要考查两圆之间的位置关系, 两圆外离, 则 $P > R + r$; 外切, 则 $P = R + r$; 相交, 则 $R - r < P < R + r$; 内切, 则 $P = R - r$; 内含, 则 $P < R - r$. (P 表示圆心距, R, r 分别表示两圆的半径).

4. 抛物线 $y = -2x^2 + 1$ 的对称轴是()

A. 直线 $x = \frac{1}{2}$

B. 直线 $x = -\frac{1}{2}$

C. y 轴

D. 直线 $x = 2$

考点: 二次函数的性质.

分析: 已知抛物线解析式为顶点式, 可直接写出顶点坐标及对称轴.

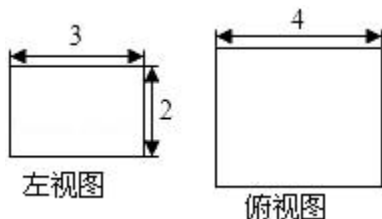
解答: 解: $\because$ 抛物线 $y = -2x^2 + 1$ 的顶点坐标为 $(0, 1)$,

$\therefore$ 对称轴是直线 $x = 0$ (y 轴),

故选 C.

点评: 主要考查了求抛物线的顶点坐标与对称轴的方法.

5. 一个长方体的左视图、俯视图及相关数据如图所示, 则其主视图的面积为()



A. 6

B. 8

C. 12

D. 24

考点: 由三视图判断几何体.

分析: 找到主视图中原几何体的长与高让它们相乘即可.

解答: 解: 主视图反映物体的长和高, 左视图反映物体的宽和高, 俯视图反映物体的长和宽. 结合三者之间的关系从而确定主视图的长和高分别为 4, 2, 所以面积为 8, 故选 B.

点评: 解决本题的关键是根据所给的左视图和俯视图得到主视图的各边长.

6. 如果一个扇形的弧长等于它的半径, 那么此扇形称为“等边扇形”, 则半径为 2 的“等边扇形”的面积为()

A. π

B. 1

C. 2

D. $\frac{2}{3}\pi$

考点: 扇形面积的计算; 弧长的计算.

专题: 新定义.

分析: 根据扇形的面积公式计算.

解答: 解: 设扇形的半径为 r ,

$$\text{根据弧长公式得 } S = \frac{1}{2}r_1 = \frac{1}{2}r_2 = 2$$

故选 C.

点评: 本题主要考查了扇形的面积公式.

7. 抛物线 $y = (x + 2)^2 - 3$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 平移得到, 则下列平移过程正确的是()

A. 先向左平移 2 个单位, 再向上平移 3 个单位

B. 先向左平移 2 个单位, 再向下平移 3 个单位

C. 先向右平移 2 个单位, 再向下平移 3 个单位

D. 先向右平移 2 个单位, 再向上平移 3 个单位

考点: 二次函数图象与几何变换.

分析: 根据“左加右减, 上加下减”的原则进行解答即可.

解答: 解: 抛物线 $y = x^2$ 向左平移 2 个单位可得到抛物线 $y = (x + 2)^2$,

抛物线 $y = (x + 2)^2$ ，再向下平移 3 个单位即可得到抛物线 $y = (x + 2)^2 - 3$ 。

故平移过程为：先向左平移 2 个单位，再向下平移 3 个单位。

故选 B。

点评：本题考查的是二次函数的图象与几何变换，要求熟练掌握平移的规律：左加右减，上加下减。

8. (2012•兰州)用扇形统计图反应地球上陆地面积与海洋面积所占比例时，陆地面积所对应的圆心角是 108° ，当宇宙中一块陨石落在地球上，则落在陆地上的概率是()

A. 0.2

B. 0.3

C. 0.4

D. 0.5

考点：几何概率；扇形统计图。

分析：根据扇形统计图可以得出“陆地”部分占地球总面积的比例，根据这个比例即可求出落在陆地的概率。

解答：解： $\because$ “陆地”部分对应的圆心角是 108° ，

$$\therefore \text{“陆地”部分占地球总面积的比例为：} 108 \div 360 = \frac{3}{10},$$

$$\therefore \text{宇宙中一块陨石落在地球上，落在陆地的概率是 } \frac{3}{10} = 0.3,$$

故选 B。

点评：此题主要考查了几何概率，以及扇形统计图。用到的知识点为：概率 = 相应的面积与总面积之比。

9. 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图象上有两点 $(-1, y_1)$, $(-\frac{1}{4}, y_2)$ ，则 $y_1 - y_2$ 的值是()

A. 负数

B. 非正数

C. 正数

D. 不能确定

考点：反比例函数图象上点的坐标特征。

分析：

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ：当 $k < 0$ 时，该函数图象位于第二、四象限，且在每一象限内， y 随 x 的增大而增大。

解答：

解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中的 $k < 0$ ，

$\therefore$ 函数图象位于第二、四象限，且在每一象限内， y 随 x 的增大而增大；

又 $\because$ 点 $(-1, y_1)$ 和 $(-\frac{1}{4}, y_2)$ 均位于第二象限， $-1 < -\frac{1}{4}$ ，

$$\therefore y_1 < y_2,$$

$$\therefore y_1 - y_2 < 0, \text{ 即 } y_1 - y_2 \text{ 的值是负数,}$$

故选 A。

点评：本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征。注意：反比例函数的增减性只指在同一象限内。

10. 某学校准备修建一个面积为 200 平方米的矩形花圃，它的长比宽多 10 米，设花圃的宽为 x 米，则可列方程为()

A. $x(x - 10) = 200$

B. $2x + 2(x - 10) = 200$

C. $x(x + 10) = 200$

D. $2x + 2(x + 10) = 200$

考点：由实际问题抽象出一元二次方程。

专题：几何图形问题。

分析：根据花圃的面积为 200 列出方程即可。

解答：解：∵花圃的长比宽多 10 米，花圃的宽为 x 米，
 ∴长为 $(x+10)$ 米，
 ∴花圃的面积为 200，
 ∴可列方程为 $x(x+10)=200$ 。
 故选 C。

点评：考查列一元二次方程；根据长方形的面积公式得到方程是解决本题的基本思路。

11. (2012•兰州)已知二次函数 $y=a(x+1)^2-b(a \neq 0)$ 有最小值，则 a, b 的大小关系为()
 A. $a > b$ B. $a < b$ C. $a = b$ D. 不能确定

考点：二次函数的最值。

专题：探究型。

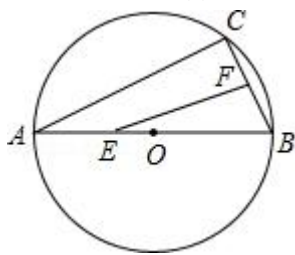
分析：根据函数有最小值判断出 a 的符号，进而可得出结论。

解答：解：∵二次函数 $y=a(x+1)^2-b(a \neq 0)$ 有最小值，
 ∴ $a > 0$ ，
 ∴无论 b 为何值，此函数均有最小值，
 ∴ a, b 的大小无法确定。

故选 D。

点评：本题考查的是二次函数的最值，求二次函数的最大(小)值有三种方法，第一种可由图象直接得出，第二种是配方法，第三种是公式法。

12. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $BC=2\text{cm}$ ， F 是弦 BC 的中点， $\angle ABC=60^\circ$ 。若动点 E 以 2cm/s 的速度从 A 点出发沿着 $A \rightarrow B \rightarrow A$ 方向运动，设运动时间为 $t(\text{s}) (0 \leq t < 3)$ ，连接 EF ，当 $\triangle BEF$ 是直角三角形时， $t(\text{s})$ 的值为()



A. $\frac{7}{4}$

B. 1

C. $\frac{7}{4}$ 或 1

D. $\frac{7}{4}$ 或 1 或 $\frac{9}{4}$

考点：圆周角定理；含 30° 度角的直角三角形；三角形中位线定理。

专题：分类讨论。

分析：若 $\triangle BEF$ 是直角三角形，则有两种情况：① $\angle BFE = 90^\circ$ ，② $\angle BEF = 90^\circ$ ；在上述两种情况所得到的直角三角形中，已知了 BC 边和 $\angle B$ 的度数，即可求得 BE 的长； AB 的长易求得，由 $AE = AB - BE$ 即可求出 AE 的长，也就能得出 E 点运动的距离(有两种情况)，根据时间 = 路程 ÷ 速度即可求得 t 的值。

解答：解：∵ AB 是 $\odot O$ 的直径，
 ∴ $\angle ACB = 90^\circ$ ；
 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC = 2$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ；
 ∴ $AB = 2BC = 4\text{cm}$ ；
 ①当 $\angle BFE = 90^\circ$ 时；
 在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ，则 $BE = 2BF = 2\text{cm}$ ；
 故此时 $AE = AB - BE = 2\text{cm}$ ；
 ∴ E 点运动的距离为：2cm 或 6cm，故 $t = 1\text{s}$ 或 3s ；
 由于 $0 \leq t < 3$ ，故 $t = 3\text{s}$ 不合题意，舍去；
 所以当 $\angle BFE = 90^\circ$ 时， $t = 1\text{s}$ ；

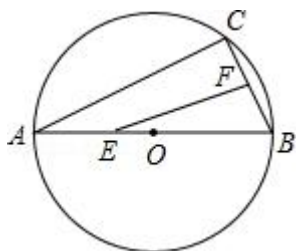
②当 $\angle BEF = 90^\circ$ 时;

同①可求得 $BE = 0.5\text{cm}$, 此时 $AE = AB - BE = 3.5\text{cm}$;

$\therefore E$ 点运动的距离为: 3.5cm 或 4.5cm , 故 $t = 1.75\text{s}$ 或 2.25s ;

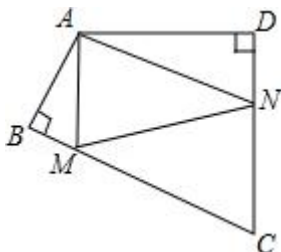
综上所述, 当 t 的值为 1 、 1.75 或 2.25s 时, $\triangle BEF$ 是直角三角形.

故选 D .



点评: 此题主要考查了圆周角定理以及直角三角形的判定和性质, 同时还考查了分类讨论的数学思想.

13. (2012•兰州)如图, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 120^\circ$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, 在 BC 、 CD 上分别找一点 M 、 N , 使 $\triangle AMN$ 周长最小时, 则 $\angle AMN + \angle ANM$ 的度数为()



A. 130°

B. 120°

C. 110°

D. 100°

考点: 轴对称-最短路线问题.

分析: 根据要使 $\triangle AMN$ 的周长最小, 即利用点的对称, 让三角形的三边在同一直线上, 作出 A 关于 BC 和 ED 的对称点 A' , A'' , 即可得出 $\angle AA'M + \angle A'' = \angle HAA' = 60^\circ$, 进而得出 $\angle AMN + \angle ANM = 2(\angle AA'M + \angle A'')$ 即可得出答案.

解答: 解: 作 A 关于 BC 和 ED 的对称点 A' , A'' , 连接 $A'A''$, 交 BC 于 M , 交 CD 于 N , 则 $A'A''$ 即为 $\triangle AMN$ 的周长最小值. 作 DA 延长线 AH ,

$$\because \angle EAB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle HAA' = 60^\circ,$$

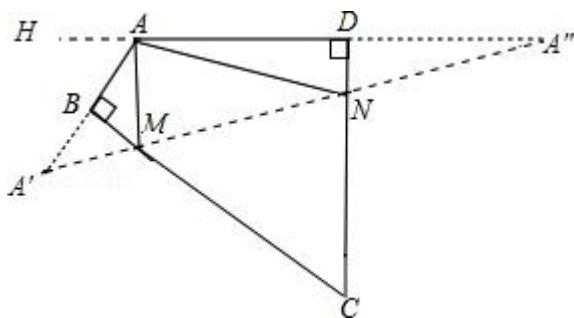
$$\therefore \angle AA'M + \angle A'' = \angle HAA' = 60^\circ,$$

$$\because \angle MA'A = \angle MAA', \quad \angle NAD = \angle A'',$$

$$\text{且 } \angle MA'A + \angle MAA' = \angle AMN, \quad \angle NAD + \angle A'' = \angle ANM,$$

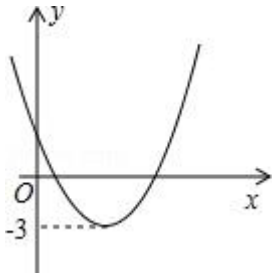
$$\therefore \angle AMN + \angle ANM = \angle MA'A + \angle MAA' + \angle NAD + \angle A'' = 2(\angle AA'M + \angle A'') = 2 \times 60^\circ = 120^\circ,$$

故选: B .



点评: 此题主要考查了平面内最短路线问题求法以及三角形的外角的性质和垂直平分线的性质等知识, 根据已知得出 M , N 的位置是解题关键.

14. (2012·兰州)二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示, 若 $|ax^2 + bx + c| = k (k \neq 0)$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是()



A. $k < -3$

B. $k > -3$

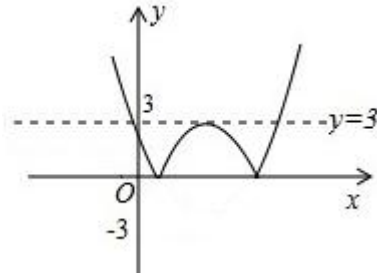
C. $k < 3$

D. $k > 3$

考点: 二次函数的图象; 二次函数的性质.

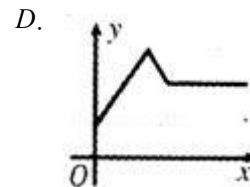
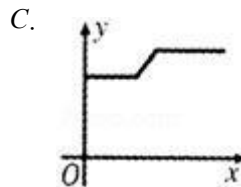
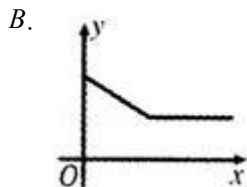
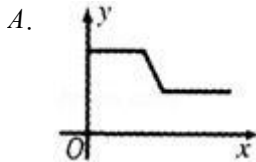
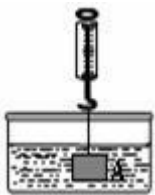
分析: 先根据题意画出 $y = |ax^2 + bx + c|$ 的图象, 即可得出 $|ax^2 + bx + c| = k (k \neq 0)$ 有两个不相等的实数根时, k 的取值范围.

解答: 解: 根据题意得: $y = |ax^2 + bx + c|$ 的图象如右图:
所以若 $|ax^2 + bx + c| = k (k \neq 0)$ 有两个不相等的实数根,
则 $k > 3$,
故选 D.



点评: 本题考查了二次函数的图象, 解题的关键是根据题意画出 $y = |ax^2 + bx + c|$ 的图象, 根据图象得出 k 的取值范围.

15. 在物理实验课上, 小明用弹簧称将铁块 A 悬于盛有水的水槽中, 然后匀速向上提起, 直至铁块完全露出水面一定高度, 则下图能反映弹簧称的读数 y (单位 N) 与铁块被提起的高度 x (单位 cm) 之间的函数关系的大致图象是()



考点: 函数的图象.

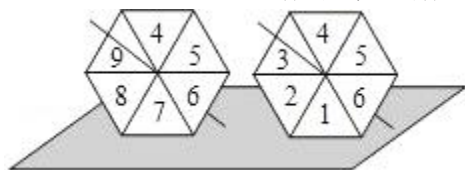
分析: 露出水面前读数 y 不变, 出水面后 y 逐渐增大, 离开水面后 y 不变.

解答: 解: 因为小明用弹簧称将铁块 A 悬于盛有水的水槽中, 然后匀速向上提起, 直至铁块完全露出水面一定高度.
故选 C.

点评: 本题考查函数值随时间的变化问题. 注意分析 y 随 x 的变化而变化的趋势, 而不一定要通过求解析式来解决.

二、填空题：每小题 4 分，共 20 分.

16. 如图所示，小明和小龙做转陀螺游戏，他们同时分别转动一个陀螺，当两个陀螺都停下来时，与桌面相接触的边上的数字都是奇数的概率是 $\frac{1}{4}$.



考点：列表法与树状图法。

分析：列举出所有情况，让桌面相接触的边上的数字都是奇数的情况数除以总情况数即为所求的概率。

解答：解：列表得：

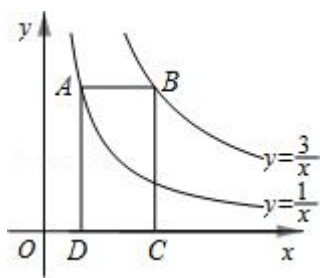
(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)	(7, 6)	(8, 6)	(9, 6)
(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)	(7, 5)	(8, 5)	(9, 5)
(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)	(7, 4)	(8, 4)	(9, 4)
(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)	(7, 3)	(8, 3)	(9, 3)
(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)	(7, 2)	(8, 2)	(9, 2)
(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)	(7, 1)	(8, 1)	(9, 1)

$\therefore$ 与桌面相接触的边上的数字都是奇数的概率是 $\frac{1}{4}$,

所以答案： $\frac{1}{4}$.

点评：列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比。

17. 如图，点 A 在双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上，点 B 在双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上，且 $AB \parallel x$ 轴， C 、 D 在 x 轴上，若四边形 $ABCD$ 为矩形，则它的面积为 2 .



考点：反比例函数系数 k 的几何意义。

分析：根据双曲线的图象上的点与原点所连的线段、坐标轴、向坐标轴作垂线所围成的矩形的面积 S 的关系 $S = |k|$ 即可判断。

解答：解：过 A 点作 $AE \perp y$ 轴，垂足为 E ,

$\because$ 点 A 在双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上,

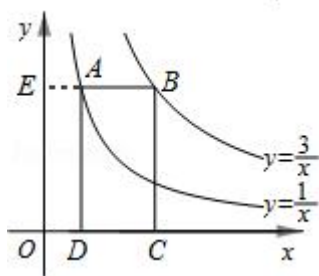
$\therefore$ 四边形 $AEOD$ 的面积为 1,

$\because$ 点 B 在双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上, 且 $AB \parallel x$ 轴,

$\therefore$ 四边形 $BEOC$ 的面积为 3,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，则它的面积为 $3 - 1 = 2$.

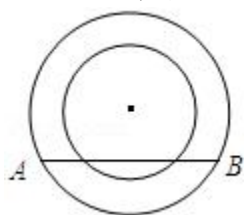
故答案为：2.



点评：

本题主要考查了反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义，即过双曲线上任意一点引 x 轴、 y 轴垂线，所得矩形面积为 $|k|$ ，是经常考查的一个知识点；这里体现了数形结合的思想，做此类题一定要正确理解 k 的几何意义.

18. 如图，两个同心圆，大圆半径为 5cm，小圆的半径为 3cm，若大圆的弦 AB 与小圆相交，则弦 AB 的取值范围是 $8 < AB \leq 10$.

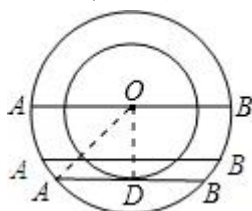


考点：直线与圆的位置关系；勾股定理；垂径定理。

专题：计算题。

分析：解决此题首先要弄清楚 AB 在什么时候最大，什么时候最小. 当 AB 与小圆相切时有一个公共点，此时可知 AB 最小；当 AB 经过同心圆的圆心时，弦 AB 最大且与小圆相交有两个公共点，此时 AB 最大，由此可以确定所以 AB 的取值范围.

解答：



解：如图，当 AB 与小圆相切时有一个公共点 D ,

连接 OA , OD , 可得 $OD \perp AB$,

$\therefore D$ 为 AB 的中点, 即 $AD = BD$,

在 $Rt\triangle ADO$ 中, $OD = 3$, $OA = 5$,

$\therefore AD = 4$,

$\therefore AB = 2AD = 8$;

当 AB 经过同心圆的圆心时, 弦 AB 最大且与小圆相交有两个公共点,

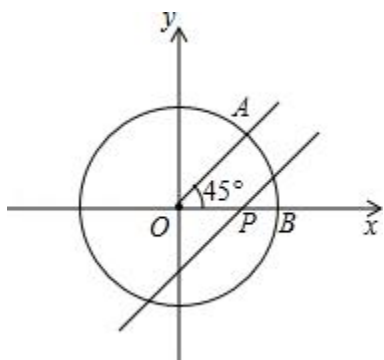
此时 $AB = 10$,

所以 AB 的取值范围是 $8 < AB \leq 10$.

故答案为: $8 < AB \leq 10$

点评：此题考查了直线与圆的位置关系，涉及的知识有：垂径定理，勾股定理，以及切线的性质，其中解题的关键是抓住两个关键点：1、当弦 AB 与小圆相切时最短；2、当 AB 过圆心 O 时最长.

19. (2012•兰州)如图, 已知 $\odot O$ 是以坐标原点 O 为圆心, 1 为半径的圆, $\angle AOB = 45^\circ$, 点 P 在 x 轴上运动, 若过点 P 且与 OA 平行的直线与 $\odot O$ 有公共点, 设 $P(x, 0)$, 则 x 的取值范围是 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.



考点: 直线与圆的位置关系; 坐标与图形性质。

专题: 数形结合。

分析: 由题意得 x 有两个极值点, 过点 P 与 $\odot O$ 相切时, x 取得极值, 作出切线, 利用切线的性质求解即可。

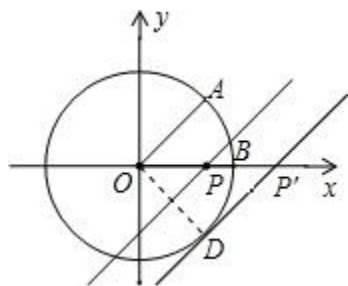
解答: 解: 连接 OD , 由题意得, $OD = 1$, $\angle DOP' = 45^\circ$, $\angle ODP' = 90^\circ$,

故可得 $OP' = \sqrt{2}$, 即 x 的极大值为 $\sqrt{2}$,

同理当点 P 在 x 轴左边时也有一个极值点, 此时 x 取得极小值, $x = -\sqrt{2}$,

综上所述可得 x 的范围为: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

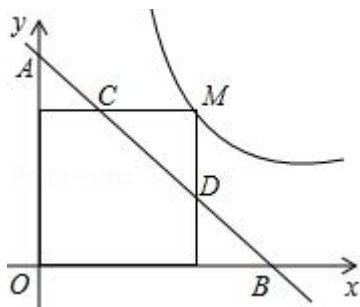
故答案为: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.



点评: 此题主要考查了直线与圆的位置关系, 分别得出两圆与圆相切时求出 OP 的长是解决问题的关键, 难度一般, 注意两个极值点的寻找。

$$\frac{\sqrt{3}}{x}$$

20. (2012•兰州)如图, M 为双曲线 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$ 上的一点, 过点 M 作 x 轴、 y 轴的垂线, 分别交直线 $y = -x + m$ 于点 D 、 C 两点, 若直线 $y = -x + m$ 与 y 轴交于点 A , 与 x 轴相交于点 B , 则 $AD \cdot BC$ 的值为 $2\sqrt{3}$.



考点: 反比例函数综合题.

专题: 综合题.

分析: 作 $CE \perp x$ 轴于 E , $DF \perp y$ 轴于 F , 由直线的解析式为 $y = -x + m$, 易得 $A(0, m)$, $B(m, 0)$, 得到 $\triangle OAB$ 等腰直角三角形, 则 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CEB$ 都是等腰直角三角形, 设 M 的坐标为 (a, b) , 则 $ab = \sqrt{3}$,

并且 $CE = b$, $DF = a$, 则 $AD = \sqrt{2}DF = \sqrt{2}a$, $BC = \sqrt{2}CE = \sqrt{2}b$, 于是得到 $AD \cdot BC = \sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}b = 2ab = 2\sqrt{3}$.

解答: 解: 作 $CE \perp x$ 轴于 E , $DF \perp y$ 轴于 F , 如图,

对于 $y = -x + m$,

令 $x = 0$, 则 $y = m$; 令 $y = 0$, $-x + m = 0$, 解得 $x = m$,

$\therefore A(0, m)$, $B(m, 0)$,

$\therefore \triangle OAB$ 等腰直角三角形,

$\therefore \triangle ADF$ 和 $\triangle CEB$ 都是等腰直角三角形,

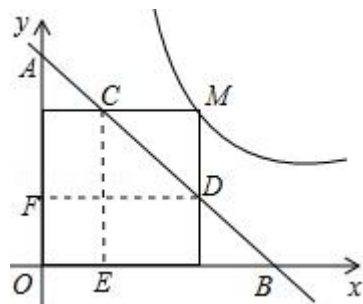
设 M 的坐标为 (a, b) , 则 $ab = \sqrt{3}$,

$CE = b$, $DF = a$,

$\therefore AD = \sqrt{2}DF = \sqrt{2}a$, $BC = \sqrt{2}CE = \sqrt{2}b$,

$\therefore AD \cdot BC = \sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}b = 2ab = 2\sqrt{3}$.

故答案为 $2\sqrt{3}$.



点评: 本题考查了反比例函数综合题: 点在反比例函数图象上, 点的横纵坐标满足其解析式; 会求一次函数与坐标轴的交点坐标以及灵活运用等腰直角三角形的性质.

三、解答题：本大题 8 小题，共 70 分，解答时写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。

21. (2012•兰州) 已知 x 是一元二次方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的根，求代数式

$$\frac{x-3}{3x^2-6x} \div \left(x+2-\frac{5}{x-2}\right)$$

的值.

考点：分式的化简求值；一元二次方程的解。

专题：计算题。

分析：解一元二次方程，求出 x 的值，再将分式化简，将 x 的值代入分式即可求解。

解答：解：∵ $x^2 - 2x + 1 = 0$,

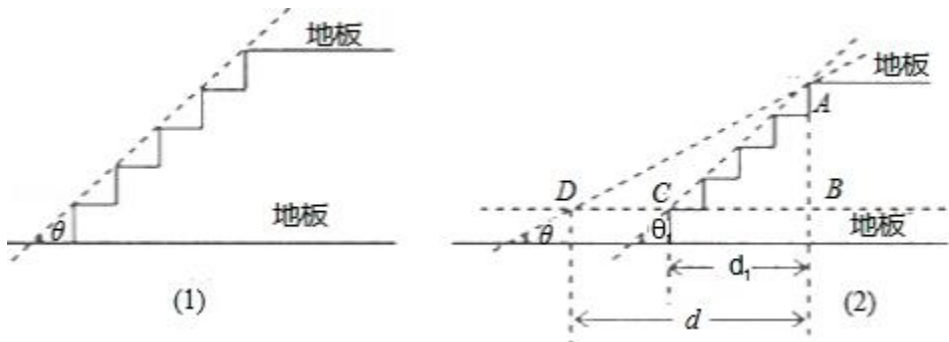
$$\therefore x_1 = x_2 = 1,$$

$$\text{原式} = \frac{x-3}{3x(x-2)} \div \frac{x^2-9}{x-2} = \frac{x-3}{3x(x-2)} \cdot \frac{x-2}{(x+3)(x-2)} = \frac{1}{3x(x+3)},$$

$$\therefore \text{当 } x=1 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{12}.$$

点评：本题考查了分式的化简求值、一元二次方程的解，会解一元二次方程及能将分式的除法转化为分式的乘法是解题的关键。

22. (2012•兰州) 在建筑楼梯时，设计者要考虑楼梯的安全程度，如图(1)，虚线为楼梯的倾斜度，斜度线与地面的夹角为倾角 θ ，一般情况下，倾角越小，楼梯的安全程度越高；如图(2)设计者为了提高楼梯的安全程度，要把楼梯的倾角 θ_1 减至 θ_2 ，这样楼梯所占地板的长度由 d_1 增加到 d_2 ，已知 $d_1 = 4$ 米， $\angle \theta_1 = 40^\circ$ ， $\angle \theta_2 = 36^\circ$ ，楼梯占地板的长度增加率多少米？(计算结果精确到 0.01 米，参考数据： $\tan 40^\circ = 0.839$ ， $\tan 36^\circ = 0.727$)



考点：解直角三角形的应用-坡度坡角问题。

分析：根据在 $Rt\triangle ACB$ 中， $AB = d_1 \tan \theta_1 = 4 \tan 40^\circ$ ，在 $Rt\triangle ADB$ 中， $AB = d_2 \tan \theta_2 = d_2 \tan 36^\circ$ ，即可得出 d_2 的值，进而求出裸体用地板增加的长度。

解答：解：由题意可知可得， $\angle ACB = \angle \theta_1$ ， $\angle ADB = \angle \theta_2$ 在 $Rt\triangle ACB$ 中， $AB = d_1 \tan \theta_1 = 4 \tan 40^\circ$ ，

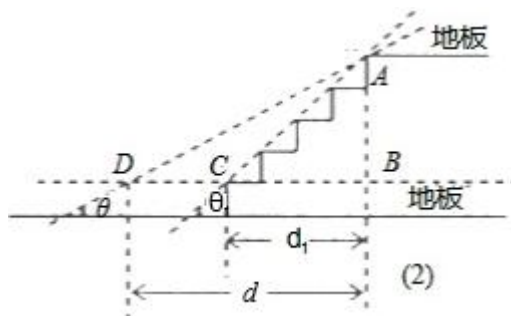
在 $Rt\triangle ADB$ 中， $AB = d_2 \tan \theta_2 = d_2 \tan 36^\circ$ ，

$$\text{得 } 4 \tan 40^\circ = d_2 \tan 36^\circ,$$

$$\therefore d_2 = \frac{4 \tan 40^\circ}{\tan 36^\circ} \approx 4.616,$$

$$\therefore d_2 - d_1 = 4.616 - 4 = 0.616 \approx 0.62,$$

答：裸体用地板的长度增加了 0.62 米。

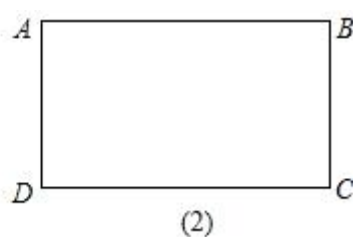
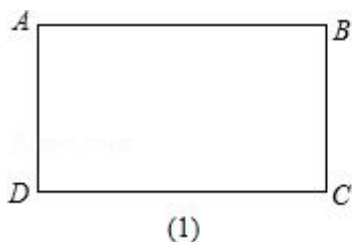


点评：此题主要考查了解直角三角形中坡角问题，根据图象构建直角三角形，进而利用锐角三角函数得出 d_2 的值是解题关键.

23. (2012•兰州)如图(1), 矩形纸片 $ABCD$, 把它沿对角线 BD 向上折叠,

(1)在图(2)中用实线画出折叠后得到的图形(要求尺规作图, 保留作图痕迹, 不写作法)

(2)折叠后重合部分是什么图形? 说明理由.



考点：翻折变换(折叠问题).

分析：(1)根据折叠的性质，可以作 $\angle BDF = \angle BDC$, $\angle EBD = \angle CBD$, 则可求得折叠后的图形.

(2)由折叠的性质，易得 $\angle FDB = \angle CDB$, 又由四边形 $ABCD$ 是矩形，可得 $AB \parallel CD$, 即可证得 $\angle FDB = \angle FBD$, 即可证得 $\triangle FBD$ 是等腰三角形.

解答：解：(1)做法参考：

方法 1：作 $\angle BDG = \angle BDC$, 在射线 DG 上截取 $DE = DC$, 连接 BE ;

方法 2：作 $\angle DBH = \angle DBC$, 在射线 BH 上截取 $BE = BC$, 连接 DE ;

方法 3：作 $\angle BDG = \angle BDC$, 过 B 点作 $BH \perp DG$, 垂足为 E

方法 4：作 $\angle DBH = \angle DBC$, 过 D 点作 $DG \perp BH$, 垂足为 E ;

方法 5：分别以 D 、 B 为圆心， DC 、 BC 的长为半径画弧，两弧交于点 E , 连接 DE 、 BE ...2 分

(做法合理均可得分)

$\therefore \triangle DEB$ 为所求做的图形...3 分.

(2)等腰三角形. ...4 分

证明： $\because \triangle BDE$ 是 $\triangle BDC$ 沿 BD 折叠而成，

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle BDC$,

$\therefore \angle FDB = \angle CDB$, ...5 分

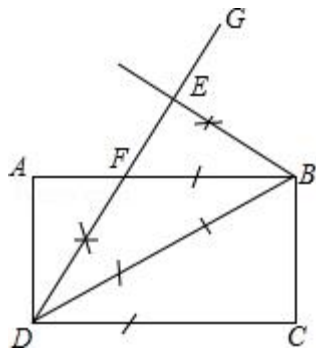
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABD = \angle BDC$, ...6 分

$\therefore \angle FDB = \angle BDC$, ...7 分

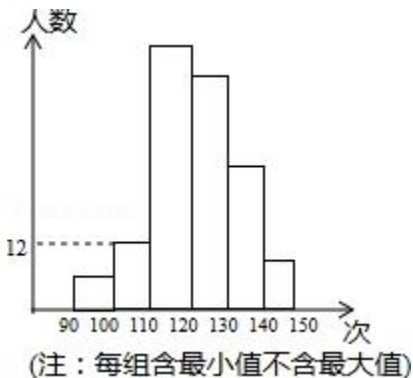
$\therefore \triangle BDF$ 是等腰三角形. ...8 分



点评：此题考查了矩形的性质、等腰三角形的判定，折叠的性质以及尺规作图．此题难度不大，注意掌握数形结合思想的应用．

24. (2012•兰州)5月23、24日，兰州市九年级学生进行了中考体育测试，某校抽取了部分学生的一分钟跳绳测试成绩，将测试成绩整理后作出统计图．甲同学计算出前两组的频率和是0.12，乙同学计算出第一组的频率为0.04，丙同学计算出从左至右第二、三、四组的频数比为4:17:15．结合统计图回答下列问题：

- (1)这次共抽取了多少名学生的一分钟跳绳测试成绩？
- (2)若跳绳次数不少于130次为优秀，则这次测试成绩的优秀率是多少？
- (3)如果这次测试成绩中的中位数是120次，那么这次测试中，成绩为120次的学生至少有多少人？



考点：频数(率)分布直方图；中位数。

专题：数形结合。

分析：(1)根据题意：结合各小组频数之和等于数据总和，各小组频率之和等于1；易得第二组的

频率0.08；再由频率、频数的关系 $\text{频率} = \frac{\text{频数}}{\text{数据总和}}$ 可得总人数。

(2)根据题意：从左至右第二、三、四组的频数比为4:17:15，和(1)的结论；容易求得各组的人数，这样就能求出优秀率。

(3)由中位数的意义，作答即可。

解答：解：(1)第二组的频率为 $0.12 - 0.04 = 0.08$,

又第二组的人数为12人，故总人数为： $\frac{12}{0.08} = 150$ (人)，
即这次共抽取了150名学生的一分钟跳绳测试成绩。

(2)第一组人数为 $150 \times 0.04 = 6$ (人)，

第三组人数为51人，

第四组人数为45人，

这次测试的优秀率为 $\frac{150 - 6 - 12 - 51 - 45}{150} \times 100\% = 24\%$.

(3)前三组的人数为 69, 而中位数是第 75 和第 76 个数的平均数, 所以成绩为 120 次的学生至少有 7 人.

点评: 本题考查频率分布直方图, 关键是要掌握各小组频率之和等于 1, 频率、频数的关系为:

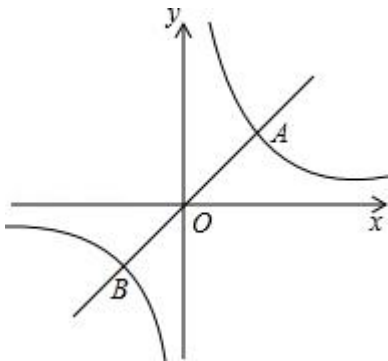
$$\text{频率} = \frac{\text{频数}}{\text{数据总和}}, \text{难度一般.}$$

25. (2012•兰州)如图, 定义: 若双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 与它的其中一条对称轴 $y = x$ 相交于 A 、 B 两点, 则线段 AB 的长度为双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的对径.

(1)求双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的对径.

(2)若双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的对径是 $10\sqrt{2}$, 求 k 的值.

(3)仿照上述定义, 定义双曲线 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的对径.



考点: 反比例函数综合题.

专题: 综合题.

分析: 过 A 点作 $AC \perp x$ 轴于 C ,

(1)先解方程组 $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = x \end{cases}$, 可得到 A 点坐标为 $(1, 1)$, B 点坐标为 $(-1, -1)$, 即 $OC = AC = 1$,

则 $\triangle OAC$ 为等腰直角三角形, 得到 $OA = \sqrt{2}OC = \sqrt{2}$, 则 $AB = 2OA = 2\sqrt{2}$, 于是得到双

曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的对径;

(2)根据双曲线的对径的定义得到当双曲线的对径为 $10\sqrt{2}$, 即 $AB = 10\sqrt{2}$, $OA = 5\sqrt{2}$, 根

据 $OA = \sqrt{2}OC = \sqrt{2}AC$, 则 $OC = AC = 5$, 得到点 A 坐标为 $(5, 5)$, 把 $A(5, 5)$ 代入双曲线

$y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 即可得到 k 的值;

(3)双曲线 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的一条对称轴与双曲线有两个交点, 根据题目中的定义易得到双曲线

$y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的对径.

解答：解：过 A 点作 $AC \perp x$ 轴于 C ，如图，

$$(1) \text{解方程组 } \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = x \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -1 \end{cases},$$

$\therefore A$ 点坐标为 $(1, 1)$, B 点坐标为 $(-1, -1)$,

$\therefore OC = AC = 1$,

$\therefore OA = \sqrt{2}OC = \sqrt{2}$,

$\therefore AB = 2OA = 2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的对径是 $2\sqrt{2}$;

(2) $\because$ 双曲线的对径为 $10\sqrt{2}$, 即 $AB = 10\sqrt{2}$, $OA = 5\sqrt{2}$,

$\therefore OA = \sqrt{2}OC = \sqrt{2}AC$,

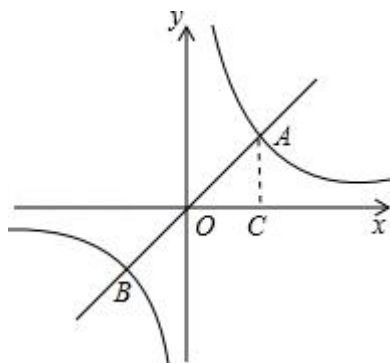
$\therefore OC = AC = 5$,

$\therefore$ 点 A 坐标为 $(5, 5)$,

把 $A(5, 5)$ 代入双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 得 $k = 5 \times 5 = 25$,
即 k 的值为 25;

(3) 若双曲线 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 与它的其中一条对称轴 $y = -x$ 相交于 A 、 B 两点,

则线段 AB 的长称为双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的对径.

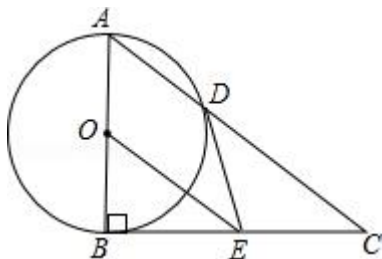


点评：本题考查了反比例函数综合题：点在反比例函数图象上，点的横纵坐标满足其解析式；等腰直角三角形的斜边是直角边的 $\sqrt{2}$ 倍；强化理解能力.

26. (2012•兰州)如图, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 AC 于点 D , E 是 BC 的中点, 连接 DE 、 OE .

(1) 判断 DE 与 $\odot O$ 的位置关系并说明理由;

(2) 若 $\tan C = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $DE = 2$, 求 AD 的长.



考点: 切线的判定; 全等三角形的判定与性质; 等腰三角形的性质; 直角三角形斜边上的中线; 解直角三角形.

专题: 计算题; 证明题.

分析: (1) 连接 OD , BD , 求出 $\angle ADB = \angle BDC = 90^\circ$, 推出 $DE = BE = CE$, 推出 $\angle EDB = \angle EBD$, $\angle OBD = \angle ODB$, 推出 $\angle EDO = \angle EBO = 90^\circ$ 即可;

(2) $BD = \sqrt{5}x$, $CD = 2x$, 在 $Rt\triangle BCD$ 中, 由勾股定理得出 $(\sqrt{5}x)^2 + (2x)^2 = 16$, 求出 x , 求出

BD , 根据 $\tan \angle ABD = \tan C$ 求出 $AD = \frac{\sqrt{5}}{2} BD$, 代入求出即可.

解答: 解: (1) DE 与 $\odot O$ 相切,

理由如下: 连接 OD , BD ,

$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle ADB = \angle BDC = 90^\circ$,

$\because E$ 是 BC 的中点,

$\therefore DE = BE = CE$,

$\therefore \angle EDB = \angle EBD$,

$\because OD = OB$,

$\therefore \angle OBD = \angle ODB$.

$\therefore \angle EDO = \angle EBO = 90^\circ$, (用三角形全等也可得到)

$\therefore DE$ 与 $\odot O$ 相切.

(2) $\because \tan C = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 可设 $BD = \sqrt{5}x$, $CD = 2x$,
 $\because$ 在 $Rt\triangle BCD$ 中, $BC = 2DE = 4$, $BD^2 + CD^2 = BC^2$

$$\therefore (\sqrt{5}x)^2 + (2x)^2 = 16,$$

解得: $x = \pm \frac{4}{3}$ (负值舍去)

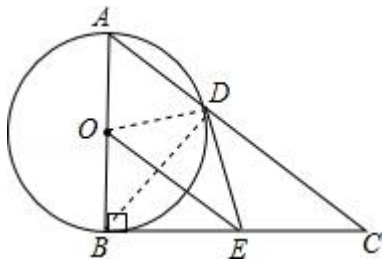
$$\therefore BD = \sqrt{5}x = \frac{4\sqrt{5}}{3},$$

$\because \angle ABD = \angle C$,

$\therefore \tan \angle ABD = \tan C$

$$AD = \frac{\sqrt{5}}{2} BD = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{4\sqrt{5}}{3} = \frac{10}{3}.$$

答: AD 的长是 $\frac{10}{3}$.



点评: 本题综合考查了解直角三角形, 等腰三角形的性质, 直角三角形斜边上中线性, 切线的判定等知识点, 主要培养学生分析问题和解决问题的能力, 注意: ①证切线的方法, ②方程思想的运用.

27. (2012·兰州)若 x_1, x_2 是关于一元二次方程 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的两个根, 则方程的两个根 x_1, x_2

和系数 a, b, c 有如下关系: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. 把它称为一元二次方程根与系数关系定理. 如果设二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 x 轴的两个交点为 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$. 利用根与系数

关系定理可以得到 A, B 两个交点间的距离为: $AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} =$

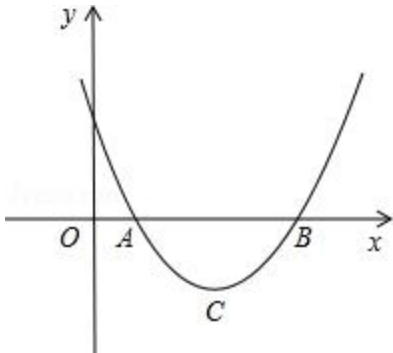
$$\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|};$$

参考以上定理和结论, 解答下列问题:

设二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象与 x 轴的两个交点 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$, 抛物线的顶点为 C , 显然 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

(1) 当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时, 求 $b^2 - 4ac$ 的值;

(2) 当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时, 求 $b^2 - 4ac$ 的值.



考点: 抛物线与 x 轴的交点; 根与系数的关系; 等腰三角形的性质; 等边三角形的性质.

分析: (1) 当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时, 由于 $AC = BC$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 过 C 作

$CE \perp AB$ 于 E , 则 $AB = 2CE$. 根据本题定理和结论, 得到 $AB = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$, 根据顶点坐

标公式, 得到 $CE = \left| \frac{4ac - b^2}{4a} \right| = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, 列出方程, 解方程即可求出 $b^2 - 4ac$ 的值;

(2) 当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时, 解直角 $\triangle ACE$, 得 $CE = \sqrt{3}AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, 据此列出方程, 解方程即可求出 $b^2 - 4ac$ 的值.

解答: 解: (1) 当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时, 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E , 则 $AB = 2CE$.

$\because$ 抛物线与 x 轴有两个交点, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 则 $|b^2 - 4ac| = b^2 - 4ac$.

$$\because a > 0, \therefore AB = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a},$$

$$\text{又} \because CE = \left| \frac{4ac - b^2}{4a} \right| = \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = 2 \times \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

$$\therefore \sqrt{b^2 - 4ac} = \frac{b^2 - 4ac}{2},$$

$$\therefore b^2 - 4ac = \frac{(b^2 - 4ac)^2}{4},$$

$$\because b^2 - 4ac > 0,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = 4;$$

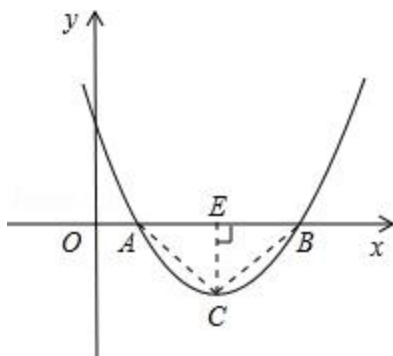
(2) 当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时,

$$\text{由(1)可知 } CE = \frac{\sqrt{3}}{2} AB,$$

$$\therefore \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a},$$

$$\because b^2 - 4ac > 0,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = 12.$$



点评: 本题考查了等腰直角三角形、等边三角形的性质, 抛物线与 x 轴的交点及根与系数的关系定理, 综合性较强, 难度中等.

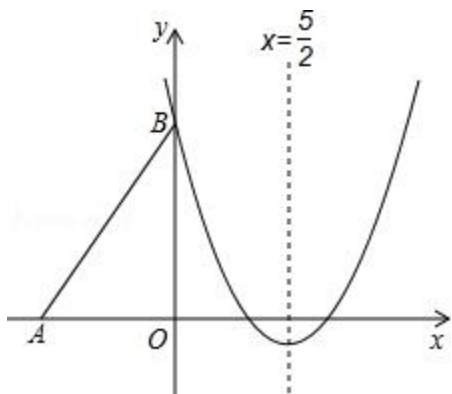
28. (2012•兰州)如图, $Rt\triangle ABO$ 的两直角边 OA 、 OB 分别在 x 轴的负半轴和 y 轴的正半轴上, O 为坐标原点, A 、 B 两点的坐标分别为 $(-3, 0)$ 、 $(0, 4)$, 抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 B , 且顶点在直线 $x = \frac{5}{2}$ 上.

(1)求抛物线对应的函数关系式;

(2)若把 $\triangle ABO$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle DCE$, 点 A 、 B 、 O 的对应点分别是 D 、 C 、 E , 当四边形 $ABCD$ 是菱形时, 试判断点 C 和点 D 是否在该抛物线上, 并说明理由;

(3)在(2)的条件下, 连接 BD , 已知对称轴上存在一点 P 使得 $\triangle PBD$ 的周长最小, 求出 P 点的坐标;

(4)在(2)、(3)的条件下, 若点 M 是线段 OB 上的一个动点(点 M 与点 O 、 B 不重合), 过点 M 作 $\parallel BD$ 交 x 轴于点 N , 连接 PM 、 PN , 设 OM 的长为 t , $\triangle PMN$ 的面积为 S , 求 S 和 t 的函数关系式, 并写出自变量 t 的取值范围, S 是否存在最大值? 若存在, 求出最大值和此时 M 点的坐标; 若不存在, 说明理由.



考点: 二次函数综合题.

分析:

(1)根据抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 $B(0, 4)$, 以及顶点在直线 $x = \frac{5}{2}$ 上, 得出 b , c 即可;
 (2)根据菱形的性质得出 C 、 D 两点的坐标分别是 $(5, 4)$ 、 $(2, 0)$, 利用图象上点的性质得出 $x = 5$ 或 2 时, y 的值即可.

(3)首先设直线 CD 对应的函数关系式为 $y = kx + b$, 求出解析式, 当 $x = \frac{5}{2}$ 时, 求出 y 即可;

(4)利用 $MN \parallel BD$, 得出 $\triangle OMN \sim \triangle OBD$, 进而得出 $\frac{OM}{OB} = \frac{ON}{OD}$, 得到 $ON = \frac{1}{2}t$, 进而表示出 $\triangle PMN$ 的面积, 利用二次函数最值求出即可.

解答:

解: (1) $\because$ 抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 $B(0, 4)$
 $\therefore c = 4$,

$\because$ 顶点在直线 $x = \frac{5}{2}$ 上,
 $-\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} \Rightarrow b = -\frac{10}{3}$;

$\therefore$ 所求函数关系式为 $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 4$;

(2)在 $Rt\triangle ABO$ 中, $OA = 3$, $OB = 4$,

$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore BC = CD = DA = AB = 5,$$

$\therefore C、D$ 两点的坐标分别是 $(5, 4)、(2, 0)$,

$$\text{当 } x=5 \text{ 时, } y = \frac{2}{3} \times 5^2 - \frac{10}{3} \times 5 + 4 = 4,$$

$$\text{当 } x=2 \text{ 时, } y = \frac{2}{3} \times 2^2 - \frac{10}{3} \times 2 + 4 = 0,$$

$\therefore$ 点 C 和点 D 都在所求抛物线上;

(3) 设 CD 与对称轴交于点 P , 则 P 为所求的点,

设直线 CD 对应的函数关系式为 $y = kx + b$,

$$\text{则 } \begin{cases} 5k + b = 4 \\ 2k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3},$$

$$\text{当 } x = \frac{5}{2} \text{ 时, } y = \frac{4}{3} \times \frac{5}{2} - \frac{8}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{2}, \frac{2}{3}\right),$$

(4) $\because MN \parallel BD$,

$$\therefore \triangle OMN \sim \triangle OBD,$$

$$\frac{OM}{OB} = \frac{ON}{OD} \text{ 即 } \frac{t}{4} = \frac{ON}{2} \text{ 得 } ON = \frac{1}{2}t,$$

设对称轴交 x 于点 F ,

$$\text{则 } S_{\text{梯形PFOM}} = \frac{1}{2}(PF + OM) \cdot OF = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + t \right) \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4}t + \frac{5}{6},$$

$$\therefore S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2}OM \cdot ON = \frac{1}{2}t \cdot \frac{1}{2}t = \frac{1}{4}t^2,$$

$$S_{\triangle PME} = \frac{1}{2}NF \cdot PF = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t \right) \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}t + \frac{5}{6},$$

$$S = \frac{5}{4}t + \frac{5}{6} - \frac{1}{4}t^2 - \left(-\frac{1}{6}t + \frac{5}{6} \right),$$

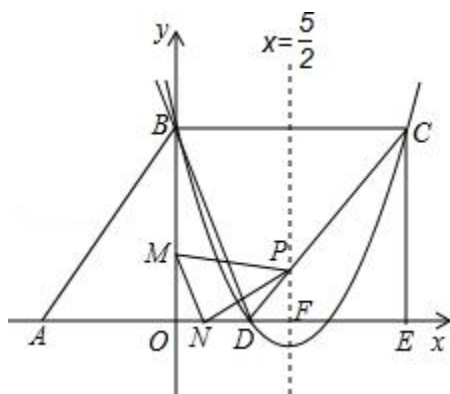
$$= -\frac{1}{4}t^2 + \frac{17}{12}t \quad (0 < t < 4),$$

S 存在最大值.

$$\text{由 } S = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{17}{12}t = \frac{1}{4} \left(t - \frac{17}{6} \right)^2 + \frac{289}{144},$$

$$\therefore \text{当 } S = \frac{17}{6} \text{ 时, } S \text{ 取最大值是 } \frac{289}{144},$$

$$\text{此时, 点 } M \text{ 的坐标为 } \left(0, \frac{17}{6} \right).$$



点评: 此题主要考查了二次函数的综合应用, 以及菱形性质和待定系数法求解析式, 求图形面积最值, 利用二次函数的最值求出是解题关键.