

2021 年湖南省长沙市中考数学试卷

一、选择题（在下列各题的四个选项中，只有一项是符合题意的。请在答题卡中填涂符合题意的选项。本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列四个实数中，最大的数是（ ）

- A. -3 B. -1 C. π D. 4

2. 2021 年 5 月 11 日，第七次全国人口普查结果发布，长沙市人口总数首次突破千万，约为 10040000 人，将数据 10040000 用科学记数法表示为（ ）

- A. 1.004×10^6 B. 1.004×10^7 C. 0.1004×10^8 D. 10.04×10^6

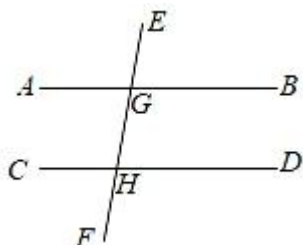
3. 下列几何图形中，是中心对称图形的是（ ）



4. 下列计算正确的是（ ）

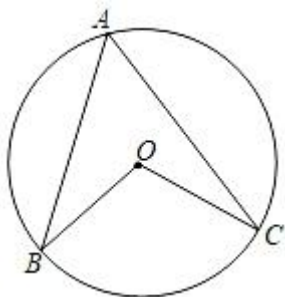
- A. $a^3 \cdot a^2 = a^5$ B. $2a + 3a = 6a$ C. $a^8 \div a^2 = a^4$ D. $(a^2)^3 = a^5$

5. 如图， $AB \parallel CD$ ， EF 分别与 AB ， CD 交于点 G ， H ， $\angle AGE = 100^\circ$ ，则 $\angle DHF$ 的度数为（ ）



- A. 100° B. 80° C. 50° D. 40°

6. 如图，点 A ， B ， C 在 $\odot O$ 上， $\angle BAC = 54^\circ$ ，则 $\angle BOC$ 的度数为（ ）



- A. 27° B. 108° C. 116° D. 128°

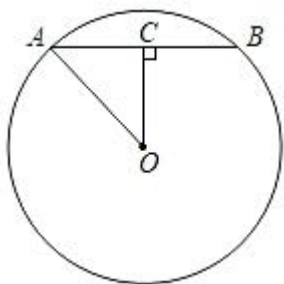
7. 下列函数图象中，表示直线 $y = 2x + 1$ 的是（ ）



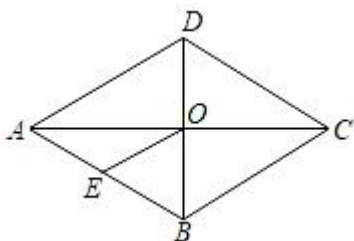
8. “杂交水稻之父”袁隆平培育的超级杂交稻在全世界推广种植. 某种植户为了考察所种植的杂交水稻苗的长势, 从稻田中随机抽取 9 株水稻苗, 测得苗高 (单位: cm) 分别是: 22, 23, 24, 23, 24, 25, 26, 23, 25. 则这组数据的众数和中位数分别是 ()
- A. 24, 25 B. 23, 23 C. 23, 24 D. 24, 24
9. 有一枚质地均匀的正方体骰子, 六个面上分别刻有 1 到 6 的点数. 将它投掷两次, 则两次掷得骰子朝上一面的点数之和为 5 的概率是 ()
- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$
10. 在一次数学活动课上, 某数学老师将 1~10 共十个整数依次写在十张不透明的卡片上 (每张卡片上只写一个数字, 每一个数字只写在一张卡片上, 而且把写有数字的那一面朝下). 他先像洗扑克牌一样打乱这些卡片的顺序, 然后把甲, 乙, 丙, 丁, 戊五位同学叫到讲台上, 随机地发给每位同学两张卡片, 并要求他们把自己手里拿的两张卡片上的数字之和写在黑板上, 写出的结果依次是: 甲: 11; 乙: 4; 丙: 16; 丁: 7; 戊: 17. 根据以上信息, 下列判断正确的是 ()
- A. 戊同学手里拿的两张卡片上的数字是 8 和 9
- B. 丙同学手里拿的两张卡片上的数字是 9 和 7
- C. 丁同学手里拿的两张卡片上的数字是 3 和 4
- D. 甲同学手里拿的两张卡片上的数字是 2 和 9

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

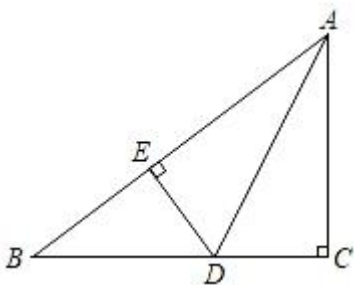
11. 分解因式: $x^2 - 2021x =$ _____.
12. 如图, 在 $\odot O$ 中, 弦 AB 的长为 4, 圆心到弦 AB 的距离为 2, 则 $\angle AOC$ 的度数为 _____.



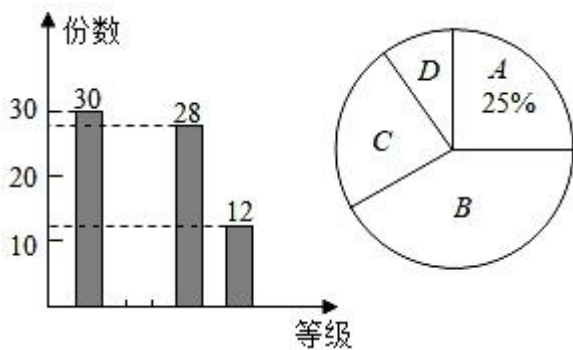
13. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E 是边 AB 的中点，若 $OE = 6$ ，
则 BC 的长为 _____.



14. 若关于 x 的方程 $x^2 - kx - 12 = 0$ 的一个根为 3，则 k 的值为 _____.
15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ， $DE \perp AB$ ，垂足为 E ，
若 $BC = 4$ ， $DE = 1.6$ ，则 BD 的长为 _____.



16. 某学校组织了主题为“保护湘江，爱护家园”的手抄报作品征集活动．先从中随机抽取了部分作品，按 A ， B ， C ， D 四个等级进行评价，然后根据统计结果绘制了如图两幅不完整的统计图．那么，此次抽取的作品中，等级为 B 等的作品份数为 _____.



- 三、解答题（本大题共 9 个小题，第 17、18、19 题每小题 6 分，第 20、21 题每小题 6 分，
第 22、23 题每小题 6 分，第 24、25 题每小题 6 分，共 72 分。解答应写出必要的文字说明、

证明过程或演算步骤)

17. 计算: $|\sqrt{2}| - 2\sin 45^\circ + (1 - \sqrt{3})^0 + \sqrt{2} \times \sqrt{8}$.

18. 先化简, 再求值: $(x-3)^2 + (x+3)(x-3) + 2x(2-x)$, 其中 $x = -\frac{1}{2}$.

19. 人教版初中数学教科书八年级上册第 35 - 36 页告诉我们作一个三角形与已知三角形全等的方法:

已知: $\triangle ABC$.

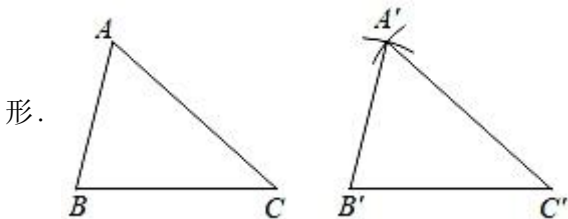
求作: $\triangle A' B' C'$, 使得 $\triangle A' B' C' \cong \triangle ABC$.

作法: 如图.

(1) 画 $B'C' = BC$;

(2) 分别以点 B' , C' 为圆心, 线段 AB , AC 长为半径画弧, 两弧相交于点 A' ;

(3) 连接线段 $A' B'$, $A' C'$, 则 $\triangle A' B' C'$ 即为所求作的三角形.



请你根据以上材料完成下列问题:

(1) 完成下面证明过程 (将正确答案填在相应的空上):

证明: 由作图可知, 在 $\triangle A' B' C'$ 和 $\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases} B' C' = BC \\ A' B' = () \\ A' C' = () \end{cases}$$

$\therefore \triangle A' B' C' \cong$ _____.

(2) 这种作一个三角形与已知三角形全等的依据是 _____. (填序号)

① AAS

② ASA

③ SAS

④ SSS

20. “网红”长沙入选 2021 年“五一”假期热门旅游城市. 本市某景点为吸引游客, 设置了一种游戏, 其规则如下: 凡参与游戏的游客从一个装有 12 个红球和若干个白球 (每个球除颜色外, 其他都相同) 的不透明纸箱中, 随机摸出一个球, 摸到红球就可免费得到

一个景点吉祥物. 据统计参与这种游戏的游客共有 60000 人, 景点一共为参与该游戏的游客免费发放了景点吉祥物 15000 个.

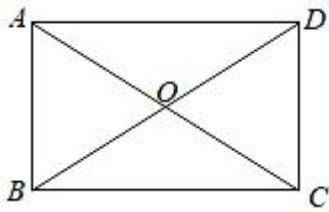
(1) 求参与该游戏可免费得到景点吉祥物的频率;

(2) 请你估计纸箱中白球的数量接近多少?

21. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , $\triangle OAB$ 是等边三角形, $AB = 4$.

(1) 求证: $\square ABCD$ 是矩形;

(2) 求 AD 的长.



22. 为庆祝伟大的中国共产党成立 100 周年, 发扬红色传统, 传承红色精神, 某学校举行了主题为“学史明理, 学史增信, 学史崇德, 学史力行”的党史知识竞赛, 一共有 25 道题, 满分 100 分, 每一题答对得 4 分, 答错扣 1 分, 不答得 0 分.

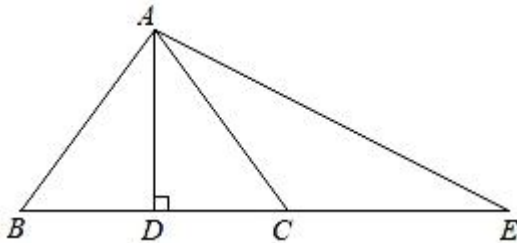
(1) 若某参赛同学只有一道题没有作答, 最后他的总得分为 86 分, 则该参赛同学一共答对了多少道题?

(2) 若规定参赛者每道题都必须作答且总得分大于或等于 90 分才可以被评为“学党史小达人”, 则参赛者至少需答对多少道题才能被评为“学党史小达人”?

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, 垂足为 D , $BD = CD$, 延长 BC 至 E , 使得 $CE = CA$, 连接 AE .

(1) 求证: $\angle B = \angle ACB$;

(2) 若 $AB = 5$, $AD = 4$, 求 $\triangle ABE$ 的周长和面积.



24. 我们不妨约定: 在平面直角坐标系中, 若某函数图象上至少存在不同的两点关于 y 轴对称, 则把该函数称之为“ T 函数”, 其图象上关于 y 轴对称的不同两点叫做一对“ T 点”. 根据该约定, 完成下列各题.

(1) 若点 $A(1, r)$ 与点 $B(s, 4)$ 是关于 x 的“ T 函数” $y = \begin{cases} -\frac{4}{x} (x < 0) \\ tx^2 (x \geq 0, t \neq 0, t \text{ 是常数}) \end{cases}$

的图象上的一对“ T 点”，则 $r = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $s = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $t = \underline{\hspace{2cm}}$ （将正确答案填在相应的横线上）；

(2) 关于 x 的函数 $y = kx + p$ (k, p 是常数) 是“ T 函数”吗？如果是，指出它有多少对“ T 点”；如果不是，请说明理由；

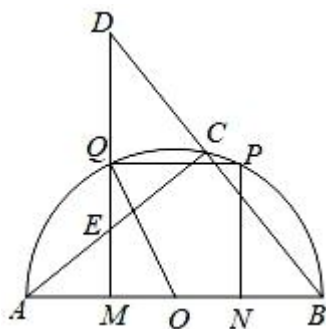
(3) 若关于 x 的“ T 函数” $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$ ，且 a, b, c 是常数) 经过坐标原点 O ，且与直线 $l: y = mx + n$ ($m \neq 0, n > 0$ ，且 m, n 是常数) 交于 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ 两点，当 x_1, x_2 满足 $(1 - x_1)^{-1} + x_2 = 1$ 时，直线 l 是否总经过某一定点？若经过某一定点，求出该定点的坐标；否则，请说明理由。

25. 如图，点 O 为以 AB 为直径的半圆的圆心，点 M, N 在直径 AB 上，点 P, Q 在 $\widehat{AB}$ 上，四边形 $MNPQ$ 为正方形，点 C 在 $\widehat{QP}$ 上运动（点 C 与点 P, Q 不重合），连接 BC 并延长交 MQ 的延长线于点 D ，连接 AC 交 MQ 于点 E ，连接 OQ 。

(1) 求 $\sin \angle AOQ$ 的值；

(2) 求 $\frac{AM}{MN}$ 的值；

(3) 令 $ME = x$ ， $QD = y$ ，直径 $AB = 2R$ ($R > 0$ ， R 是常数)，求 y 关于 x 的函数解析式，并指明自变量 x 的取值范围。



参考答案解析

一、选择题（在下列各题的四个选项中，只有一项是符合题意的。请在答题卡中填涂符合题意的选项。本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列四个实数中，最大的数是（ ）

- A. -3 B. -1 C. π D. 4

解： $\because -3 < -1 < \pi < 4$,

$\therefore$ 最大的数是 4 ,

故选：D.

2. 2021 年 5 月 11 日，第七次全国人口普查结果发布，长沙市人口总数首次突破千万，约为 10040000 人，将数据 10040000 用科学记数法表示为（ ）

- A. 1.004×10^6 B. 1.004×10^7 C. 0.1004×10^8 D. 10.04×10^6

解： $10040000 = 1.004 \times 10^7$.

故选：B.

3. 下列几何图形中，是中心对称图形的是（ ）



解：A. 不是中心对称图形，故本选项不合题意；

B. 不是中心对称图形，故本选项不合题意；

C. 是中心对称图形，故本选项符合题意；

D. 不是中心对称图形，故本选项不合题意；

故选：C.

4. 下列计算正确的是（ ）

- A. $a^3 \cdot a^2 = a^5$ B. $2a + 3a = 6a$ C. $a^8 \div a^2 = a^4$ D. $(a^2)^3 = a^5$

解：A. $a^3 \cdot a^2 = a^5$, 故此选项符合题意；

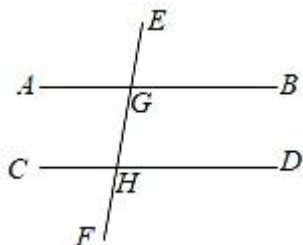
B. $2a + 3a = 5a$, 故此选项不合题意；

C. $a^8 \div a^2 = a^6$, 故此选项不合题意；

D. $(a^2)^3 = a^6$, 故此选项不合题意；

故选：A.

5. 如图, $AB \parallel CD$, EF 分别与 AB , CD 交于点 G , H , $\angle AGE = 100^\circ$, 则 $\angle DHF$ 的度数为 ()

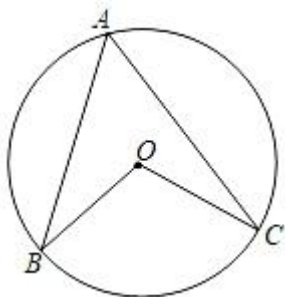


- A. 100° B. 80° C. 50° D. 40°

解: $\because AB \parallel CD$,
 $\therefore \angle CHG = \angle AGE = 100^\circ$,
 $\therefore \angle DHF = \angle CHG = 100^\circ$.

故选：A.

6. 如图, 点 A , B , C 在 $\odot O$ 上, $\angle BAC = 54^\circ$, 则 $\angle BOC$ 的度数为 ()

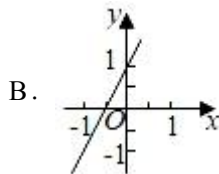
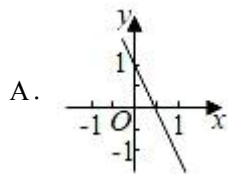


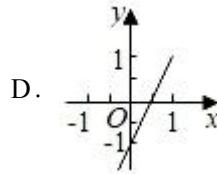
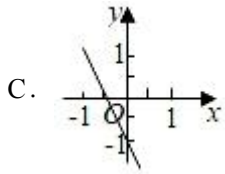
- A. 27° B. 108° C. 116° D. 128°

解: $\because \angle A = 54^\circ$,
 $\therefore \angle BOC = 2\angle A = 108^\circ$,

故选：B.

7. 下列函数图象中, 表示直线 $y = 2x + 1$ 的是 ()





解：∵ $k = 2 > 0$, $b = 1 > 0$ 时，

∴ 直线经过一、二、三象限．

故选：B．

8. “杂交水稻之父”袁隆平培育的超级杂交稻在全世界推广种植．某种植户为了考察所种植的杂交水稻苗的长势，从稻田中随机抽取 9 株水稻苗，测得苗高（单位：cm）分别是：22，23，24，23，24，25，26，23，25．则这组数据的众数和中位数分别是（ ）

A. 24，25 B. 23，23 C. 23，24 D. 24，24

解：将这组数据从小到大重新排列为 22，23，23，23，24，24，25，25，26，

∴ 这组数据的众数为 23cm，中位数为 24cm，

故选：C．

9. 有一枚质地均匀的正方体骰子，六个面上分别刻有 1 到 6 的点数．将它投掷两次，则两次掷得骰子朝上一面的点数之和为 5 的概率是（ ）

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$

解：列表如下：

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

由表可知共有 36 种等可能的情况，两次掷得骰子朝上一面的点数之和为 5 的情况有 4 种，

∴ 两次掷得骰子朝上一面的点数之和为 5 的概率为 $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ ，

故选：A．

10. 在一次数学活动课上，某数学老师将 1~10 共十个整数依次写在十张不透明的卡片上（每

张卡片上只写一个数字，每一个数字只写在一张卡片上，而且把写有数字的那一面朝下）。他先像洗扑克牌一样打乱这些卡片的顺序，然后把甲，乙，丙，丁，戊五位同学叫到讲台上，随机地发给每位同学两张卡片，并要求他们把自己手里拿的两张卡片上的数字之和写在黑板上，写出的结果依次是：甲：11；乙：4；丙：16；丁：7；戊：17。根据以上信息，下列判断正确的是（ ）

- A. 戊同学手里拿的两张卡片上的数字是 8 和 9
- B. 丙同学手里拿的两张卡片上的数字是 9 和 7
- C. 丁同学手里拿的两张卡片上的数字是 3 和 4
- D. 甲同学手里拿的两张卡片上的数字是 2 和 9

解：由题意可知，一共十张卡片十个数，五个人每人两张卡片，
 $\therefore$ 每人手里的数字不重复。

由甲：11，可知甲手中的数字可能是 1 和 10，2 和 9，3 和 8，4 和 7，5 和 6；

由乙：4，可知乙手中的数字只有 1 和 3；

由丙：16，可知丙手中的数字可能是 6 和 10，7 和 9；

由丁：7，可知丁手中的数字可能是 1 和 6，2 和 5，3 和 4；

由戊：17，可知戊手中的数字可能是 7 和 10，8 和 9；

$\therefore$ 丁只能是 2 和 5，甲只能是 4 和 7，丙只能是 6 和 10，戊只能是 8 和 9。

$\therefore$ 各选项中，只有 A 是正确的，

故选：A。

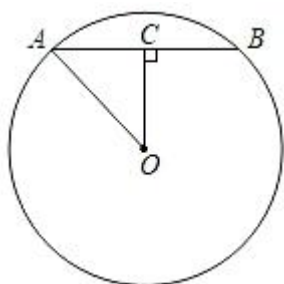
二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分）

11. 分解因式： $x^2 - 2021x = \underline{x(x - 2021)}$ 。

解： $x^2 - 2021x = x(x - 2021)$ 。

故答案为： $x(x - 2021)$ 。

12. 如图，在 $\odot O$ 中，弦 AB 的长为 4，圆心到弦 AB 的距离为 2，则 $\angle AOC$ 的度数为 45
°。



解：∵ $OC \perp AB$,

$$\therefore AC = BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

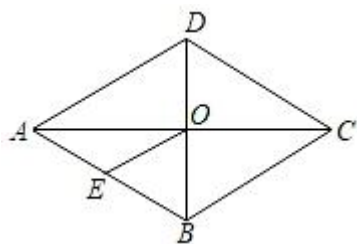
$$\therefore OC = 2,$$

∴ $\triangle AOC$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle AOC = 45^\circ,$$

故答案为: 45° .

13. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 E 是边 AB 的中点, 若 $OE = 6$, 则 BC 的长为 12 .



解：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB = BC = CD = AD, \text{ 且 } BD \perp AC,$$

又∵ 点 E 是边 AB 的中点,

$$\therefore OE = AE = EB = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore BC = AB = 2OE = 6 \times 2 = 12,$$

故答案为: 12.

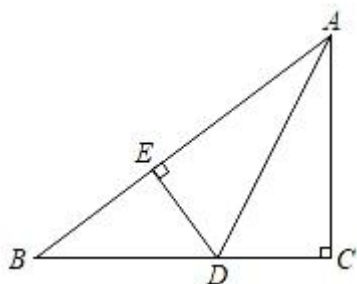
14. 若关于 x 的方程 $x^2 - kx - 12 = 0$ 的一个根为 3, 则 k 的值为 -1 .

解: 把 $x = 3$ 代入方程 $x^2 - kx - 12 = 0$ 得: $9 - 3k - 12 = 0$,

解得: $k = -1$,

故答案为: -1.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D , $DE \perp AB$, 垂足为 E , 若 $BC = 4$, $DE = 1.6$, 则 BD 的长为 2.4 .



解：∵ AD 平分 $\angle BAC$ ， $DE \perp AB$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore CD = DE,$$

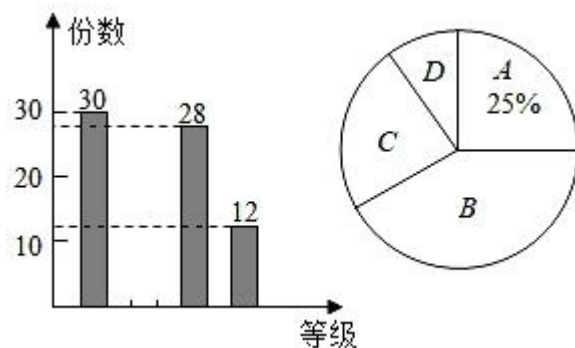
$$\therefore DE = 1.6,$$

$$\therefore CD = 1.6,$$

$$\therefore BD = BC - CD = 4 - 1.6 = 2.4.$$

故答案为：2.4

16. 某学校组织了主题为“保护湘江，爱护家园”的手抄报作品征集活动．先从中随机抽取了部分作品，按 A ， B ， C ， D 四个等级进行评价，然后根据统计结果绘制了如图两幅不完整的统计图．那么，此次抽取的作品中，等级为 B 等的作品份数为 50．



解：∵ $30 \div 25\% = 120$ （份），

∴ 一共抽取了 120 份作品，

∴ 此次抽取的作品中，等级为 B 等的作品份数为： $120 - 30 - 28 - 12 = 50$ （份），

故答案为：50.

- 三、解答题（本大题共 9 个小题，第 17、18、19 题每小题 6 分，第 20、21 题每小题 6 分，第 22、23 题每小题 6 分，第 24、25 题每小题 6 分，共 72 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17. 计算： $|\sqrt{2}| - 2\sin 45^\circ + (1 - \sqrt{3})^0 + \sqrt{2} \times \sqrt{8}$.

$$\text{解：原式} = \sqrt{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \sqrt{16}$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 + 4$$

$$= 5.$$

18. 先化简，再求值： $(x - 3)^2 + (x + 3)(x - 3) + 2x(2 - x)$ ，其中 $x = -\frac{1}{2}$.

$$\text{解：原式} = x^2 - 6x + 9 + x^2 - 9 + 4x - 2x^2$$

$$= -2x,$$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时,

$$\text{原式} = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1.$$

19. 人教版初中数学教科书八年级上册第 35 - 36 页告诉我们作一个三角形与已知三角形全等的方法:

已知: $\triangle ABC$.

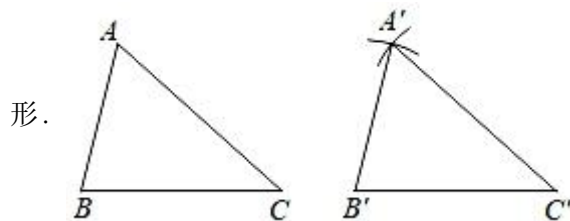
求作: $\triangle A' B' C'$, 使得 $\triangle A' B' C' \cong \triangle ABC$.

作法: 如图.

(1) 画 $B'C' = BC$;

(2) 分别以点 B' , C' 为圆心, 线段 AB , AC 长为半径画弧, 两弧相交于点 A' ;

(3) 连接线段 $A' B'$, $A' C'$, 则 $\triangle A' B' C'$ 即为所求作的三角



请你根据以上材料完成下列问题:

(1) 完成下面证明过程 (将正确答案填在相应的空上):

证明: 由作图可知, 在 $\triangle A' B' C'$ 和 $\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases} B' C' = BC \\ A' B' = () \\ A' C' = () \end{cases}$$

$\therefore \triangle A' B' C' \cong \underline{\triangle ABC (SSS)}$.

(2) 这种作一个三角形与已知三角形全等的方法的依据是 ④. (填序号)

① AAS

② ASA

③ SAS

④ SSS

解: (1) 由作图可知, 在 $\triangle A' B' C'$ 和 $\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases} B' C' = BC \\ A' B' = AB, \\ A' C' = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle A'B'C' \cong \triangle ABC(SSS).$$

故答案为: $\triangle ABC(SSS)$.

(2) 这种作一个三角形与已知三角形全等的方法的依据是 SSS ,

故答案为: ④.

20. “网红”长沙入选 2021 年“五一”假期热门旅游城市. 本市某景点为吸引游客, 设置了一种游戏, 其规则如下: 凡参与游戏的游客从一个装有 12 个红球和若干个白球(每个球除颜色外, 其他都相同)的不透明纸箱中, 随机摸出一个球, 摸到红球就可免费得到一个景点吉祥物. 据统计参与这种游戏的游客共有 60000 人, 景点一共为参与该游戏的游客免费发放了景点吉祥物 15000 个.

(1) 求参与该游戏可免费得到景点吉祥物的频率;

(2) 请你估计纸箱中白球的数量接近多少?

解: (1) 参与该游戏可免费得到景点吉祥物的频率为 $\frac{15000}{60000} = 0.25$;

(2) 设袋子中白球的数量为 x ,

$$\text{则 } \frac{12}{12+x} = 0.25,$$

解得 $x = 36$,

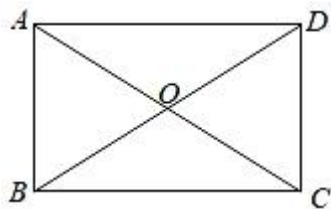
经检验 $x = 36$ 是分式方程的解且符合实际,

所以估计纸箱中白球的数量接近 36.

21. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , $\triangle OAB$ 是等边三角形, $AB = 4$.

(1) 求证: $\square ABCD$ 是矩形;

(2) 求 AD 的长.



【解答】(1) 证明: $\because \triangle AOB$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle BAO = \angle AOB = 60^\circ, \quad OA = OB,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore OB = OD = \frac{1}{2}BD, \quad OA = OC = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore BD = AC,$$

$\therefore \square ABCD$ 是矩形;

(2) 解: $\because \square ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$,

$\because \angle ABO = 60^\circ$,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$\therefore AD = \sqrt{3}AB = 4\sqrt{3}$.

22. 为庆祝伟大的中国共产党成立 100 周年, 发扬红色传统, 传承红色精神, 某学校举行了主题为“学史明理, 学史增信, 学史崇德, 学史力行”的党史知识竞赛, 一共有 25 道题, 满分 100 分, 每一题答对得 4 分, 答错扣 1 分, 不答得 0 分.

(1) 若某参赛同学只有一道题没有作答, 最后他的总得分为 86 分, 则该参赛同学一共答对了多少道题?

(2) 若规定参赛者每道题都必须作答且总得分大于或等于 90 分才可以被评为“学党史小达人”, 则参赛者至少需答对多少道题才能被评为“学党史小达人”?

解: (1) 设该参赛同学一共答对了 x 道题, 则答错了 $(25 - 1 - x)$ 道题,

依题意得: $4x - (25 - 1 - x) = 86$,

解得: $x = 22$.

答: 该参赛同学一共答对了 22 道题.

(2) 设参赛者需答对 y 道题才能被评为“学党史小达人”, 则答错了 $(25 - y)$ 道题,

依题意得: $4y - (25 - y) \geq 90$,

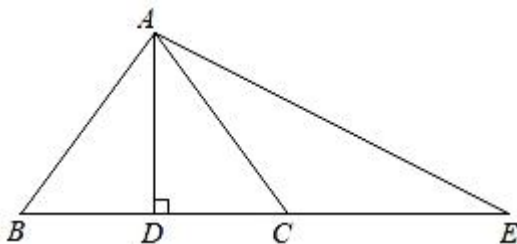
解得: $y \geq 23$.

答: 参赛者至少需答对 23 道题才能被评为“学党史小达人”.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, 垂足为 D , $BD = CD$, 延长 BC 至 E , 使得 $CE = CA$, 连接 AE .

(1) 求证: $\angle B = \angle ACB$;

(2) 若 $AB = 5$, $AD = 4$, 求 $\triangle ABE$ 的周长和面积.



解: (1) 证明: 在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$ 中:

$$\begin{cases} AD=AD \\ \angle ADB=\angle ADC, \\ BD=CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle ADC (SAS)$,

$\therefore \angle B = \angle ACB$;

(2) 在 $Rt\triangle ADB$ 中, $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$\therefore BD = CD = 3, AC = AB = CE = 5$,

$\therefore BE = 2BD + CE = 2 \times 3 + 5 = 11$,

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$,

$\therefore C_{\triangle ABE} = AB + BE + AE = 5 + 11 + 4\sqrt{5} = 16 + 4\sqrt{5}$,

$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times BE \times AD = \frac{1}{2} \times 11 \times 4 = 22$.

24. 我们不妨约定: 在平面直角坐标系中, 若某函数图象上至少存在不同的两点关于 y 轴对称, 则把该函数称之为“ T 函数”, 其图象上关于 y 轴对称的不同两点叫做一对“ T 点”. 根据该约定, 完成下列各题.

(1) 若点 $A(1, r)$ 与点 $B(s, 4)$ 是关于 x 的“ T 函数” $y = \begin{cases} -\frac{4}{x} (x < 0) \\ tx^2 (x \geq 0, t \neq 0, t \text{ 是常数}) \end{cases}$

的图象上的一对“ T 点”, 则 $r = \underline{4}$, $s = \underline{-1}$, $t = \underline{4}$ (将正确答案填在相应的横线上);

(2) 关于 x 的函数 $y = kx + p$ (k, p 是常数) 是“ T 函数”吗? 如果是, 指出它有多少对“ T 点” 如果不是, 请说明理由;

(3) 若关于 x 的“ T 函数” $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$, 且 a, b, c 是常数) 经过坐标原点 O , 且与直线 $l: y = mx + n$ ($m \neq 0, n > 0$, 且 m, n 是常数) 交于 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 两点, 当 x_1, x_2 满足 $(1 - x_1)^{-1} + x_2 = 1$ 时, 直线 l 是否总经过某一定点? 若经过某一定点, 求出该定点的坐标; 否则, 请说明理由.

解: (1) $\because A, B$ 关于 y 轴对称,

$\therefore s = -1, r = 4$,

$\therefore A$ 的坐标为 $(1, 4)$,

把 $A(1, 4)$ 代入是关于 x 的“ T 函数”中, 得: $t = 4$,

故答案为 $r = 4, s = -1, t = 4$;

(2) 当 $k=0$ 时, 有 $y=p$,

此时存在关于 y 轴对称得点,

$\therefore y=kx+p$ 是 “ T 函数”,

当 $k \neq 0$ 时, 不存在关于 y 轴对称的点,

$\therefore y=kx+p$ 不是 “ T 函数”;

(3) $\because y=ax^2+bx+c$ 过原点,

$\therefore c=0$,

$\because y=ax^2+bx+c$ 是 “ T 函数”,

$\therefore b=0$,

$\therefore y=ax^2$,

联立直线 l 和抛物线得:

$$\begin{cases} y=ax^2 \\ y=mx+n \end{cases},$$

即: $ax^2 - mx - n = 0$,

$$x_1 + x_2 = \frac{m}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{-n}{a},$$

$$\text{又} \because (1-x_1)^{-1} + x_2 = 1,$$

化简得: $x_1 = x_2$,

$$\therefore \frac{m}{a} = \frac{-n}{a}, \text{ 即 } m = -n,$$

$$\therefore y = mx + n = mx - m,$$

当 $x=1$ 时, $y=0$,

$\therefore$ 直线 l 必过定点 $(1, 0)$.

25. 如图, 点 O 为以 AB 为直径的半圆的圆心, 点 M, N 在直径 AB 上, 点 P, Q 在 $\widehat{AB}$ 上, 四边形 $MNPQ$ 为正方形, 点 C 在 $\widehat{QP}$ 上运动 (点 C 与点 P, Q 不重合), 连接 BC 并延长交 MQ 的延长线于点 D , 连接 AC 交 MQ 于点 E , 连接 OQ .

(1) 求 $\sin \angle AOQ$ 的值;

(2) 求 $\frac{AM}{MN}$ 的值;

(3) 令 $ME=x$, $QD=y$, 直径 $AB=2R$ ($R>0$, R 是常数), 求 y 关于 x 的函数解析式, 并指明自变量 x 的取值范围.

$$\therefore \frac{AM}{DM} = \frac{EM}{BM},$$

$$\therefore \frac{R - \frac{\sqrt{5}R}{5}}{\frac{2\sqrt{5}R}{5}} = \frac{x}{R + \frac{\sqrt{5}R}{5}},$$

$$\therefore y = \frac{4R^2}{5x} - \frac{2\sqrt{5}R}{5},$$

当点 C 与 P 重合时, $\frac{AM}{AN} = \frac{EM}{PN}$,

$$\therefore \frac{R - \frac{\sqrt{5}R}{5}}{R + \frac{\sqrt{5}R}{5}} = \frac{\frac{x}{2\sqrt{5}R}}{\frac{5}{5}},$$

$$\therefore x = \frac{3\sqrt{5}-5}{5}R,$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{5}-5}{5}R < x < \frac{2\sqrt{5}}{5}R.$$

