

长沙市 2019 年初中学业水平考试数学试题卷

一、选择题（每小题有且只有一个正确答案，本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 下列个数中，比 -3 小的数是

A. -5 B. -1 C. 0 D. 1

2. 根据《长沙市电网供电能力提升三年行动计划》，明确到 2020 年，长沙电网建设改造投资规模达到 15000000000 元，确保安全供电需求数据 15000000000 用科学记数法表示为

A. 15×10^9 B. 1.5×10^9 C. 1.5×10^{10} D. 0.15×10^{11}

3. 下列计算正确的是

A. $3a + 2b = 5ab$ B. $(a^3)^2 = a^6$

C. $a^6 \div a^3 = a^2$ D. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

4. 下列事件中，是必然事件的是

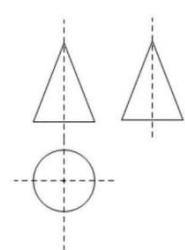
A. 购买一张彩票，中奖 B. 射击运动员射击一次，命中靶心

C. 经过有交通信号灯的路口，遇到红灯 D. 任意画一个三角形，其内角和是 180°

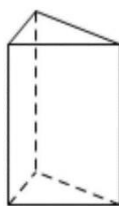
5. 如图，平行线 AB ， CD 被直线 AE 所截， $\angle 1 = 80^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是

A. 80° B. 90° C. 100° D. 110°

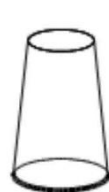
6. 某个几何体的三视图如图所示，该几何体是



A.



B.



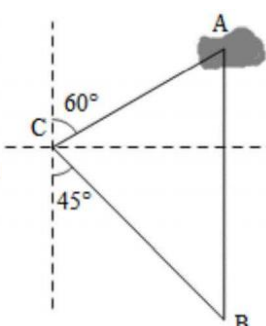
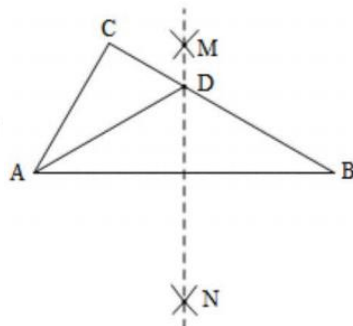
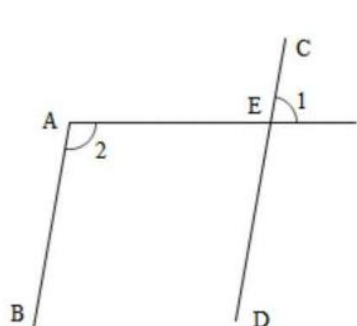
C.



D.

7. 在庆祝新中国成立 70 周年的校园歌唱比赛中，11 名参赛同学的成绩各不相同，按照成绩取前 5 名进入决赛。如果小明知道了自己的比赛成绩，要判断能否进入决赛，小明需要知道这 11 名同学成绩的

A. 平均数 B. 中位数 C. 众数 D. 方差



第 5 题第 9 题第 10 题

8. 一个扇形的半径为 6，圆心角为 120° ，则该扇形的面积是

A. 2π B. 4π C. 12π D. 24π

9. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 分别以点 A 和点 B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 的

长为半径作弧, 两弧相交于 M、N 两点, 作直线 MN, 交 BC 于点 D, 连接 AD, 则 $\angle CAD$ 的度数是

A. 20° B. 30° C. 45° D. 60°

10. 如图, 一艘轮船从位于灯塔 C 的北偏东 60° 方向, 距离灯塔 $60n$ mile 的小岛 A 出发, 沿正南方向航行一段时间后, 到达位于灯塔 C 的南偏东 45° 方向上的 B 处, 这时轮船 B 与小岛 A 的距离是

A. $30\sqrt{3}n$ mile B. $60n$ mile C. $120n$ mile D. $(30 + 30\sqrt{3})n$ mile

11. 《孙子算经》是中国传统数学的重要著作, 其中有一道题, 原文是: “今有木, 不知长短, 引绳度之, 余绳四尺五寸; 屈绳量之, 不足一尺. 木长几何?” 意思是: 用一根绳子去量一根木头的长, 绳子还剩余 4.5 尺; 将绳子对折再量木头, 则木头还剩余 1 尺, 问木头长多少尺? 可设木头长为 x 尺, 绳子长为 y 尺, 则所列方程组正确的是

A. $\begin{cases} y = x + 4.5 \\ 0.5y = x - 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = x + 4.5 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = x - 4.5 \\ 0.5y = x + 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = x - 4.5 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

12. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $\tan A = 2$, $BE \perp AC$ 于点 E, D 是线段 BE 上的一个动

点, 则 $CD + \frac{\sqrt{5}}{5}BD$ 的最小值是

A. $2\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{5}$ C. $5\sqrt{3}$ D. 10

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

13. 式子 $\sqrt{x-5}$ 在实数范围内有意义, 则实数 x 的取值范围是.

14. 分解因式: $am^2 - 9a =$.

15. 不等式组 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x-6 < 0 \end{cases}$ 的解集是.

16. 在一个不透明的袋子中有若干个小球, 这些球除颜色外无其他差别, 从袋中随机摸出一球, 记下其颜色, 这称为一次摸球试验, 然后把它重新放回袋中并摇匀, 不断重复上述过程. 以下是利用计算机模拟的摸球试验统计表:

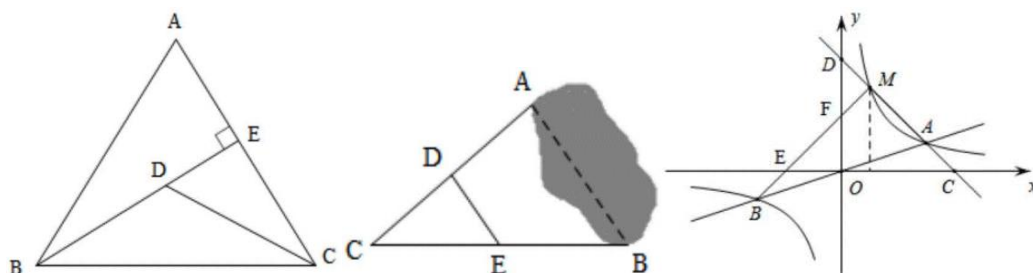
摸球试验次数	100	1000	5000	10000	50000	100000
“摸出黑球” 的次数	36	387	2019	4009	19970	40008
“摸出黑球” 的频率 (结果保留小数点后三位)	0.360	0.387	0.404	0.401	0.399	0.400

根据试验所得数据, 估计 “摸出黑球” 的概率是 (结果保留小数点后一位).

17. 如图, 要测量池塘两岸相对的 A, B 两点间的距离, 可以在池塘外选一点 C, 连接 AC,

BC, 分别取 AC, BC 的中点 D, E, 测得 $DE = 50\text{m}$, 则 AB 的长是 m .

18. 如图, 函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k > 0$) 的图象与过原点的 O 的直线相交于 A, B 两点, 点 M 是第一象限内双曲线上的动点 (点 M 在点 A 的左侧), 直线 AM 分别交 x 轴, y 轴于 C, D 两点, 连接 BM 分别交 x 轴, y 轴于点 E, F . 现有以下四个结论: ① $\triangle ODM$ 与 $\triangle OCA$ 的面积相等; ②若 $BM \perp AM$ 于点 M , 则 $\angle MBA = 30^\circ$; ③若 M 点的横坐标为 1, $\triangle OAM$ 为等边三角形, 则 $k = 2 + \sqrt{3}$; ④若 $MF = \frac{2}{5}MB$, 则 $MD = 2MA$. 其中正确的结论的序号是.



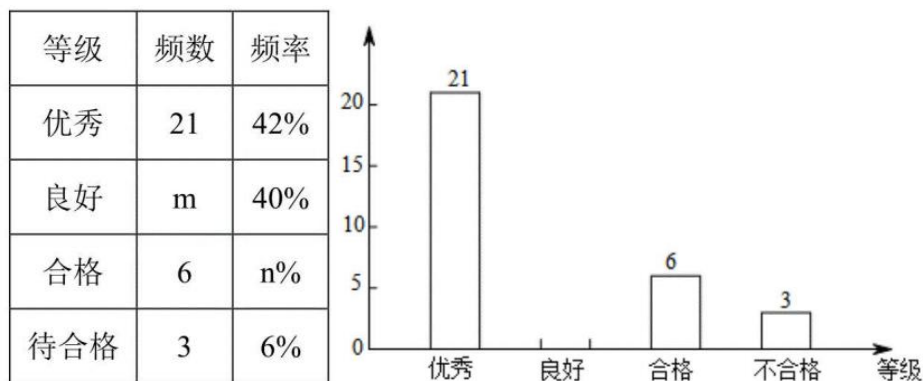
第 12 题第 9 题第 10 题

三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 66 分)

19. (6 分) 计算: $|\sqrt{2}| + (\frac{1}{2})^{-1} - \sqrt{6} \div \sqrt{3} - 2\cos 60^\circ$.

20. (6 分) 先化简, 再求值: $(\frac{a+3}{a-1} - \frac{1}{a-1}) \div \frac{a^2+4a+4}{a^2-a}$, 其中 $a=3$.

21. (8 分) 某学校开展了主题为“垃圾分类, 绿色生活新时尚”的宣传活动, 为了解学生对垃圾分类知识的掌握情况, 该校环保社团成员在校园内随机抽取了部分学生进行问卷调查, 将他们的得分按优秀、良好、合格、待合格四个等级进行统计, 并绘制了如下不完整的统计表和条形统计图.

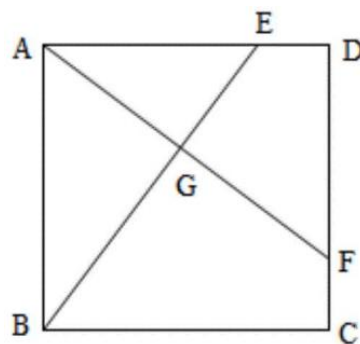


请根据以上信息, 解答下列问题:

- (1) 本次调查随机抽取了名学生；表中 $m=$, $n=$;
 (2) 补全条形统计图;
 (3) 若全校有 2000 名学生, 请你估计该校掌握垃圾分类知识达到“优秀”和“良好”等级的学生共有多少人.

22. (8 分) 如图, 正方形 ABCD, 点 E, F 分别在 AD, CD 上, 且 $DE=CF$, AF 与 BE 相交于点 G.

- (1) 求证: $BE=AF$;
 (2) 若 $AB=4$, $DE=1$, 求 AG 的长.



23. (9 分) 近日, 长沙市教育局出台《长沙市中小学教师志愿辅导工作实施意见》鼓励教师与志愿辅导, 某区率先示范, 推出名师公益大课堂, 为学生提供线上线下免费辅导, 据统计, 第一批公益课受益学生 2 万人次, 第三批公益课受益学生 2.42 万人次.

- (1) 如果第二批, 第三批公益课受益学生人次的增长率相同, 求这个增长率;
 (2) 按照这个增长率, 预计第四批公益课受益学生将达到多少万人次?

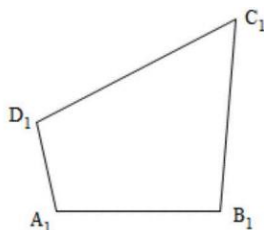
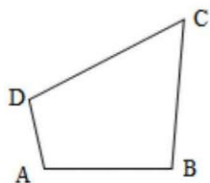
24. (9 分) 根据相似多边形的定义, 我们把四个角分别相等, 四条边成比例的两个凸四边形叫做相似四边形. 相似四边形对应边的比叫做相似比.

(1) 某同学在探究相似四边形的判定时, 得到如下三个命题, 请判断它们是否正确 (直接在横线上填写“真”或“假”).

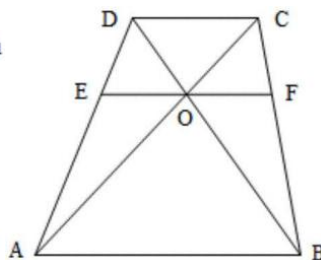
- ① 条边成比例的两个凸四边形相似; (命题)
 ② 三个角分别相等的两个凸四边形相似; (命题)
 ③ 两个大小不同的正方形相似. (命题)

(2) 如图 1, 在四边形 ABCD 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 中, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}, \text{ 求证: 四边形 ABCD 与四边形 } A_1B_1C_1D_1 \text{ 相似.}$$



第 24 题图 1



第 24 题图 2

(3) 如图 2, 四边形 ABCD 中, $AB \parallel CD$, AC 与 BD 相交于点 O, 过点 O 作 $EF \parallel AB$ 分别

交 AD, BC 于点 E, F. 记四边形 ABFE 的面积为 S_1 , 四边形 EFDE 的面积为 S_2 ,

若四边形 ABFE 与四边形 EFCD 相似, 求 $\frac{S_2}{S_1}$ 的值.

25. (10 分) 已知抛物线 $y = -2x^2 + (b-2)x + (c-2020)$ (b, c 为常数).

(1) 若抛物线的顶点坐标为(1, 1), 求 b, c 的值;

(2) 若抛物线上始终存在不重合的两点关于原点对称, 求 c 的取值范围;

(3) 在 (1) 的条件下, 存在正实数 m, n ($m < n$), 当 $m \leq x \leq n$ 时, 恰好有

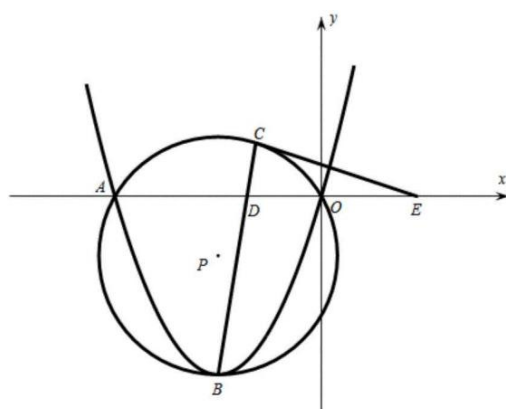
$$\frac{m}{2m+1} \leq \frac{1}{y+2} \leq \frac{n}{2n+1}, \text{ 求 } m, n \text{ 的值.}$$

26. (10 分) 如图, 抛物线 $y = ax^2 + 6ax$ (a 为常数, $a > 0$) 与 x 轴交于 O, A 两点, 点 B 为抛物线的顶点, 点 D 的坐标为 $(t, 0)$ ($-3 < t < 0$), 连接 BD 并延长与过 O, A, B 三点的 $\odot P$ 相交于点 C.

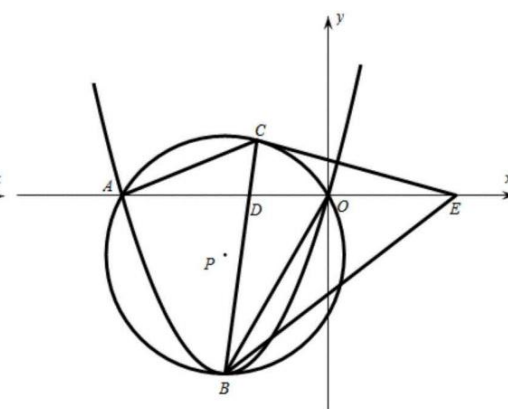
(1) 求点 A 的坐标;

(2) 过点 C 作 $\odot P$ 的切线 CE 交 x 轴于点 E. ①如图 1, 求证: $CE = DE$; ②如图 2, 连

接 AC, BE, BO, 当 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\angle CAE = \angle OBE$ 时, 求 $\frac{1}{OD} - \frac{1}{OE}$ 的值.



第 26 题图 1



第 26 题图 2

参考答案

一、单项选择题(本大题共 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	C	B	D	C	D	B	C	B	D	A	B

二、填空题(本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分)

13、 $x \geq 5$

14、 $a(m-3)(m+3)$

15、 $-1 \leq x < 2$

16、 0.4

17、 100

18、 ①③④

三、解答题

19.解：原式 $= \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} - 1$
 $= 1$

20.解：原式 $= \frac{a+2}{a-1} \times \frac{a(a-1)}{(a+2)^2}$
 $= \frac{a}{a+2}$
 $\because a = 3$
 $\therefore$ 原式 $= \frac{3}{5}$

21. (1) 50, 20, 12;

(2) 略

(3) $2000 \times (42\% + 40\%) = 1640$ (人)

22. (1) 证明： $\because DE = CF$

$\therefore AD - DE = DC - CF$ 即 $AE = DF$

$$\therefore \begin{cases} AB = AD \\ \angle BAE = \angle ADF \\ AE = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle ADF$

$$\therefore BE = AF$$

(2) 由 (1) 得 $\angle EBA = \angle FAD$

$\therefore \angle GAE + \angle AEG = 90^\circ$, 即 $\angle AGE = 90^\circ$

$$\because AB = 4, DE = 1$$

$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{4^2 + (4-1)^2} = 5$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABE \text{ 中, } \frac{1}{2} AB \cdot AE = \frac{1}{2} BE \cdot AG$$

$$\therefore AG = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$$

23. (1) 设增长率为 x

$$2(1+x)^2 = 2.42$$

$$x_1 = -2.1 (\text{舍去}), x_2 = 0.1$$

所以增长率为 10%

$$(2) 2.42(1+0.1) = 2.662$$

所以预计第四批公益课受益学生将达到 2.662 万人次

24. 解(1)假, 假, 真

(2)证明: 分别连接 BD , B_1D_1

$$\because \angle BCD = \angle B_1C_1D_1$$

$$\text{且 } \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle B_1C_1D_1$$

$$\therefore \angle CDB = \angle C_1D_1B_1, \angle C_1B_1D_1 = \angle CBD, \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$$

$$\therefore \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

$$\because \angle ABC = \angle A_1B_1C_1$$

$$\therefore \angle ABD = \angle A_1B_1D_1$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle A_1 B_1 D_1$$

$$\therefore \frac{AD}{A_1 D_1} = \frac{AB}{A_1 B_1}, \quad \angle A = \angle A_1, \quad \angle ADB = \angle A_1 D_1 B_1$$

$$\therefore \frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{BC}{B_1 C_1} = \frac{CD}{C_1 D_1} = \frac{AD}{A_1 D_1}, \quad \angle ADC = \angle A_1 D_1 C_1, \quad \angle A = \angle A_1, \quad \angle ABC = \angle A_1 B_1 C_1,$$

$$\angle BCD = \angle C_1 D_1 C_1$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 相似.

(3) 四边形 $ABFG$ 与四边形 $EFCD$ 相似

$$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{EF}{AB}$$

$$\therefore EF = OE + OF$$

$$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{OE + OF}{AB}$$

$$\therefore EF \parallel AB \parallel CD$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{OE}{AB}, \quad \frac{DE}{AD} = \frac{OC}{AB} = \frac{OF}{AB}$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} + \frac{DE}{AD} = \frac{OE}{AB} + \frac{OF}{AB}$$

$$\therefore \frac{2DE}{AD} = \frac{DE}{AE}$$

$$\therefore AD = DE + AE$$

$$\therefore \frac{2}{DE + AE} = \frac{1}{AE}$$

$$\therefore 2AE = DE + AE, \quad \text{即 } AE = DE$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = 1$$

25. 解: (1) 由题可设 $y = -2(x-1)^2 + 1$

$$\text{去括号得: } y = -2x^2 + 4x - 1$$

$$\therefore \begin{cases} b-2=4 \\ c-2020=-1 \end{cases}$$

$$\therefore b=6, \quad c=2019$$

(2) 设抛物线上关于原点对称且不重合的两点坐标分别为 (x_0, y_0) 、 $(-x_0, -y_0)$,

代入解析式可得:

$$\begin{cases} y_0 = -2x_0^2 + (b-2)x_0 + (c-2020) \\ -y_0 = -2x_0^2 - (b-2)x_0 + (c-2020) \end{cases}$$

$$\therefore \text{两式相加可得: } -4x_0^2 + 2(c-2020) = 0$$

$$\therefore c = 2x_0^2 + 2020$$

$$\therefore c \geq 2020$$

(3) 由 (1) 可知抛物线为 $y = -2x^2 + 4x - 1 = -2(x-1)^2 + 1$, $\therefore y \leq 1$

$$\because 0 < m < n, \text{ 当 } m \leq x \leq n \text{ 时, 恰好有 } \frac{m}{2m+1} \leq \frac{1}{y+2} \leq \frac{n}{2n+1}$$

$$\therefore \frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{m}$$

$$\therefore \frac{1}{m} \leq 1, \text{ 即 } m \geq 1$$

$$\therefore 1 \leq m < n$$

$\because$ 抛物线对称轴 $x=1$, 开口向下

$\therefore$ 当 $m \leq x \leq n$ 时, y 随 x 增大而减小

$$\therefore \text{当 } x=m \text{ 时, } y_{\max} = -2m^2 + 4m - 1$$

$$\text{当 } x=n \text{ 时, } y_{\min} = -2n^2 + 4n - 1$$

$$\text{又} \because \frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{m}$$

$$\therefore \begin{cases} -2n^2 + 4n - 1 = \frac{1}{n} & \text{①} \\ -2m^2 + 4m - 1 = \frac{1}{m} & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{将①整理得: } 2n^3 - 4n^2 + n + 1 = 0$$

$$\therefore \text{变形得: } (2n^3 - 2n^2) - (2n^2 - n - 1) = 0$$

$$\text{即: } 2n^2(n-1) - (2n+1)(n-1) = 0$$

$$\therefore (n-1)(2n^2 - 2n - 1) = 0$$

$$\because n > 1$$

$$\therefore 2n^2 - 2n - 1 = 0$$

$$\therefore n_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ (舍去)}, \quad n_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{同理整理②得: } (m-1)(2m^2 - 2m - 1) = 0$$

$$\because 1 \leq m < n$$

$$\therefore m_1 = 1, \quad m_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ (舍去)}, \quad m_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ (舍去)}$$

$$\therefore \text{综上所述: } m = 1, \quad n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

26. 解: (1) 令 $ax^2 + bax = 0$

$$ax(x+6)=0 \quad \therefore A(-6,0)$$

(2) 连接 PC , 连接 PB 延长交 x 轴于 M

$\because \odot P$ 过 O 、 A 、 B 三点, B 为顶点

$$\therefore PM \perp OA, \angle PBC + \angle BOM = 90^\circ$$

又 $\because PC = PB$

$$\therefore \angle PCB = \angle PBC$$

$\because CE$ 为切线

$$\therefore \angle PCB + \angle ECD = 90^\circ$$

又 $\because \angle BDP = \angle CDE$

$$\therefore \angle ECD = \angle COE$$

$$\therefore CE = DE$$

(3) 解: 设 $OE = m$, 即 $E(m,0)$

由切割定理: $CE^2 = OE \cdot AE$

$$(m-t)^2 = m \cdot (m+6) \Rightarrow m = \frac{t^2}{6+2t} \text{ ①}$$

$$\because \angle CAE = \angle CBD$$

已知 $\angle CAE = \angle OBE$, $\angle CBO = \angle EBO$

$$\text{由角平分线定理: } \frac{BD}{BE} = \frac{DO}{OE}$$

$$\text{即: } \sqrt{\frac{(3+t)^2+27}{(3+m)^2+27}} = \frac{-t}{m} \Rightarrow m = \frac{6t}{-t-6} \quad ②$$

$$\text{由①②得 } \frac{t^2}{6+2t} = \frac{6t}{-t-6} \Rightarrow t^2 + 18t + 36 = 0$$

$$\therefore t^2 = -18t - 36$$

$$\frac{1}{OD} - \frac{1}{OE} = -\frac{1}{t} - \frac{1}{m} = -\frac{3t+6}{t^2} = \frac{1}{6}$$

积分超值换

活动时间：2019年4月23日-6月30日
活动对象：中小学一线教师以及教育工作者



扫一扫 换礼啦

积 分 兑 换 更 超 值



会员升级服务第一拨 · 清北季



神马，有清华北大学霸方法论课；还有清华学霸向所有的父母亲述自己求学之路；

衡水名校试卷悄悄的上线了；

扫qq领取官网不首发课程，很多人我没告诉他啊！

会员qq专享等你来撩.....