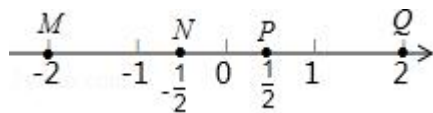


2019 年湖南省郴州市中考数学试卷

一、选择题（共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. (3 分) 如图，数轴上表示 -2 的相反数的点是 ()



- A. M B. N C. P D. Q

2. (3 分) 如图是我国几家银行的标志，其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



3. (3 分) 邓小平曾说：“中东有石油，中国有稀土”。稀土是加工制造国防、军工等工业品不可或缺的原料。据有关统计数据表明：至 2017 年止，我国已探明稀土储量约 4400 万吨，居世界第一位，请用科学记数法表示 44 000 000 为 ()

- A. 44×10^6 B. 4.4×10^7 C. 4.4×10^8 D. 0.44×10^9

4. (3 分) 下列运算正确的是 ()

- A. $(x^2)^3 = x^5$ B. $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{10}$ C. $x \cdot x^2 \cdot x^4 = x^6$ D. $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

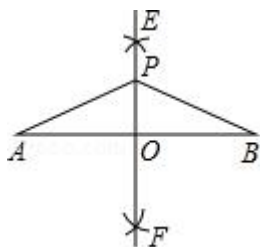
5. (3 分) 一元二次方程 $2x^2 + 3x - 5 = 0$ 的根的情况为 ()

- A. 有两个相等的实数根 B. 有两个不相等的实数根
C. 只有一个实数根 D. 没有实数根

6. (3 分) 下列采用的调查方式中，合适的是 ()

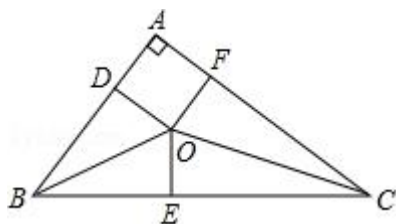
- A. 为了解东江湖的水质情况，采用抽样调查的方式
B. 我市某企业为了解所生产的产品的合格率，采用普查的方式
C. 某小型企业给在职员工做工作服前进行尺寸大小的调查，采用抽样调查的方式
D. 某市教育部门为了解该市中小学生的视力情况，采用普查的方式

7. (3 分) 如图，分别以线段 AB 的两端点 A, B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径画弧，在线段 AB 的两侧分别交于点 E, F ，作直线 EF 交 AB 于点 O 。在直线 EF 上任取一点 P (不与 O 重合)，连接 PA, PB ，则下列结论不一定成立的是 ()



- A. $PA = PB$ B. $OA = OB$ C. $OP = OF$ D. $PO \perp AB$

8. (3分) 我国古代数学家刘徽将勾股形(古人称直角三角形为勾股形)分割成一个正方形和两对全等的三角形, 如图所示, 已知 $\angle A = 90^\circ$, $BD = 4$, $CF = 6$, 则正方形 $ADOE$ 的边长是 ()



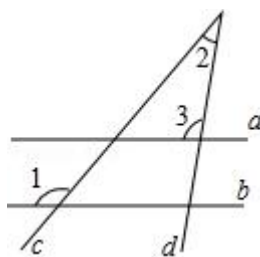
- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 4

二、填空题(共8小题, 每小题3分, 满分24分)

9. (3分) 二次根式 $\sqrt{x-2}$ 中, x 的取值范围是_____.

10. (3分) 若 $\frac{x+y}{x} = \frac{3}{2}$, 则 $\frac{y}{x} =$ _____.

11. (3分) 如图, 直线 a, b 被直线 c, d 所截. 若 $a \parallel b$, $\angle 1 = 130^\circ$, $\angle 2 = 30^\circ$, 则 $\angle 3$ 的度数为_____度.



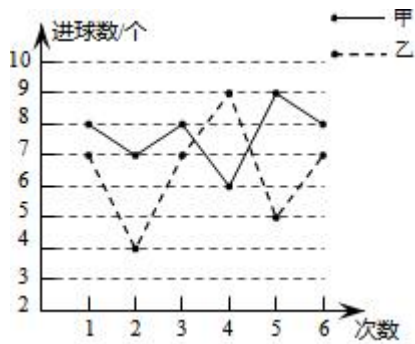
12. (3分) 某校举行演讲比赛, 七个评委对小明的打分如下: 9, 8, 7, 6, 9, 9, 7, 这组数据的中位数是_____.

13. (3分) 某商店今年6月初销售纯净水的数量如下表所示:

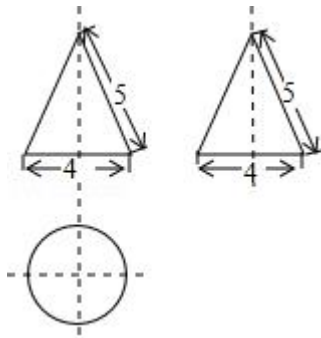
日期	1	2	3	4
数量(瓶)	120	125	130	135

观察此表, 利用所学函数知识预测今年6月7日该商店销售纯净水的数量约为_____瓶.

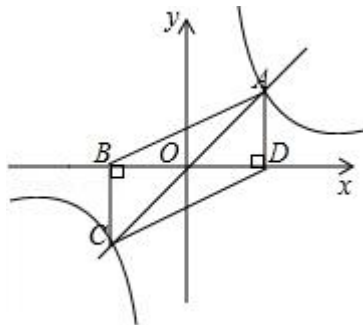
14. (3分) 如图是甲、乙两人6次投篮测试(每次投篮10个)成绩的统计图, 甲、乙两人测试成绩的方差分别记作 $s_{\text{甲}}^2$ 、 $s_{\text{乙}}^2$, 则 $s_{\text{甲}}^2$ _____ $s_{\text{乙}}^2$. (填“>”, “=”或“<”)



15. (3分) 已知某几何体的三视图如图, 其中主视图和左视图都是腰长为5, 底边长为4的等腰三角形, 则该几何体的侧面展开图的面积是_____. (结果保留 π)



16. (3分) 如图, 点 A , C 分别是正比例函数 $y=x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象的交点, 过 A 点作 $AD \perp x$ 轴于点 D , 过 C 点作 $CB \perp x$ 轴于点 B , 则四边形 $ABCD$ 的面积为_____.

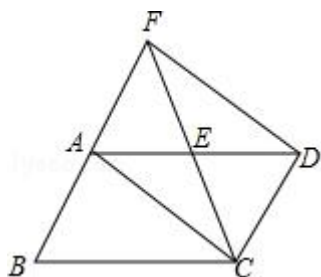


三、解答题 (17~19 题每题 6 分, 20~23 题每题 8 分, 24~25 题每题 10 分, 26 题 12 分, 共 82 分)

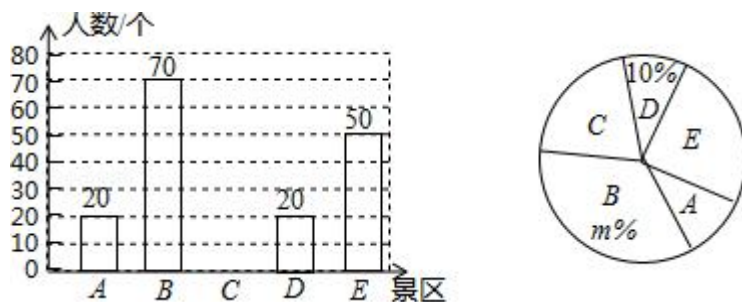
17. (6分) 计算: $(3-\pi)^0 - 2\cos 30^\circ + |1-\sqrt{3}| + (\frac{1}{2})^{-1}$.

18. (6分) 先化简, 再求值: $\frac{a-1}{a^2-2a+1} - \frac{a-1}{a^2-1}$, 其中 $a = \sqrt{3}$.

19. (6分) 如图, $\square ABCD$ 中, 点 E 是边 AD 的中点, 连接 CE 并延长交 BA 的延长线于点 F , 连接 AC , DF . 求证: 四边形 $ACDF$ 是平行四边形.



20. (8分) 我市去年成功举办 2018 郴州国际休闲旅游文化节, 获评“全国森林旅游示范市”. 我市有 A, B, C, D, E 五个景区很受游客喜爱. 一旅行社对某小区居民在暑假期间去以上五个景区旅游 (只选一个景区) 的意向做了一次随机调查统计, 并根据这个统计结果制作了如下两幅不完整的统计图:



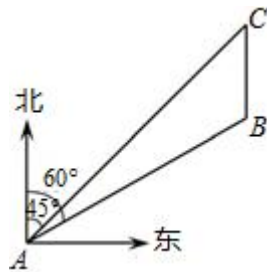
(1) 该小区居民在这次随机调查中被调查到的人数是_____人, $m =$ _____, 并补全条形统计图;

(2) 若该小区有居民 1200 人, 试估计去 B 地旅游的居民约有多少人?

(3) 小军同学已去过 E 地旅游, 暑假期间计划与父母从 A, B, C, D 四个景区中, 任选两个去旅游, 求选到 A, C 两个景区的概率. (要求画树状图或列表求概率)

21. (8分) 如图所示, 巡逻船在 A 处测得灯塔 C 在北偏东 45° 方向上, 距离 A 处 30km . 在灯塔 C 的正南方向 B 处有一渔船发出求救信号, 巡逻船接到指示后立即前往施救. 已知 B 处在 A 处的北偏东 60° 方向上, 这时巡逻船与渔船的距离是多少?

(精确到 0.01km . 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{6} \approx 2.449$)



22. (8分) 某小微企业为加快产业转型升级步伐, 引进一批 A , B 两种型号的机器. 已知一台 A 型机器比一台 B 型机器每小时多加工 2 个零件, 且一台 A 型机器加工 80 个零件与一台 B 型机器加工 60 个零件所用时间相等.

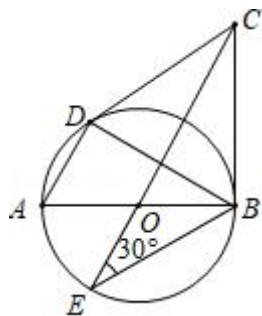
(1) 每台 A , B 两种型号的机器每小时分别加工多少个零件?

(2) 如果该企业计划安排 A , B 两种型号的机器共 10 台一起加工一批该零件, 为了如期完成任务, 要求两种机器每小时加工的零件不少于 72 件, 同时为了保障机器的正常运转, 两种机器每小时加工的零件不能超过 76 件, 那么 A , B 两种型号的机器可以各安排多少台?

23. (8分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 与 $\odot O$ 相切于点 D , 且 $AD \parallel OC$.

(1) 求证: BC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 延长 CO 交 $\odot O$ 于点 E . 若 $\angle CEB = 30^\circ$, $\odot O$ 的半径为 2, 求 $\widehat{BD}$ 的长. (结果保留 π)

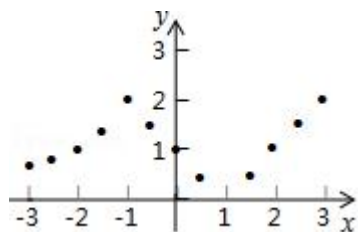


24. (10分) 若一个函数当自变量在不同范围内取值时, 函数表达式不同, 我们称这样的函数为分段函数. 下面我们参照学习函数的过程与方法, 探究分段函数 $y =$

$\begin{cases} -\frac{2}{x} & (x \leq -1) \\ |x-1| & (x > -1) \end{cases}$ 的图象与性质. 列表:

x	...	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	...
y	...	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	...

描点: 在平面直角坐标系中, 以自变量 x 的取值为横坐标, 以相应的函数值 y 为纵坐标, 描出相应的点, 如图所示.



(1) 如图, 在平面直角坐标系中, 观察描出的这些点的分布, 作出函数图象;

(2) 研究函数并结合图象与表格, 回答下列问题:

①点 $A(-5, y_1)$, $B(-\frac{7}{2}, y_2)$, $C(x_1, \frac{5}{2})$, $D(x_2, 6)$ 在函数图象上, 则 y_1 _____ y_2 ,

x_1 _____ x_2 ; (填 “>”, “=” 或 “<”)

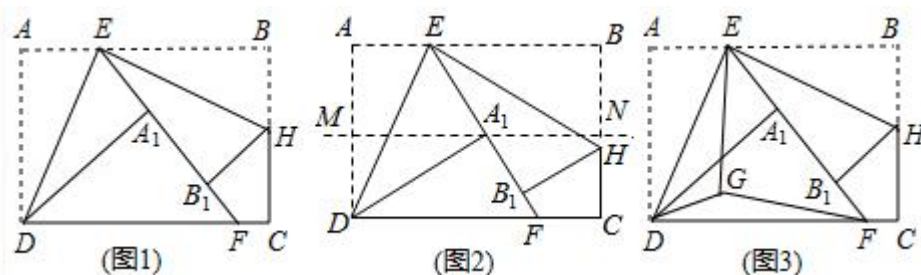
- ②当函数值 $y = 2$ 时，求自变量 x 的值；
- ③在直线 $x = -1$ 的右侧的函数图象上有两个不同的点 $P(x_3, y_3)$, $Q(x_4, y_4)$, 且 $y_3 = y_4$, 求 $x_3 + x_4$ 的值；
- ④若直线 $y = a$ 与函数图象有三个不同的交点，求 a 的取值范围.

25. (10分) 如图1, 矩形 $ABCD$ 中, 点 E 为 AB 边上的动点 (不与 A, B 重合), 把 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折, 点 A 的对应点为 A_1 , 延长 EA_1 交直线 DC 于点 F , 再把 $\angle BEF$ 折叠, 使点 B 的对应点 B_1 落在 EF 上, 折痕 EH 交直线 BC 于点 H .

(1) 求证: $\triangle A_1DE \sim \triangle B_1EH$;

(2) 如图2, 直线 MN 是矩形 $ABCD$ 的对称轴, 若点 A_1 恰好落在直线 MN 上, 试判断 $\triangle DEF$ 的形状, 并说明理由;

(3) 如图3, 在(2)的条件下, 点 G 为 $\triangle DEF$ 内一点, 且 $\angle DGF = 150^\circ$, 试探究 DG , EG , FG 的数量关系.



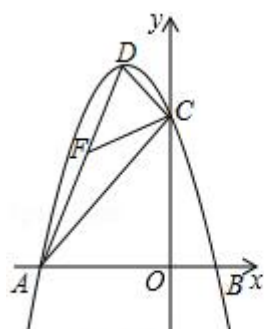
26. (12 分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴分别交于 $A(-3, 0)$, $B(1, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 C .

(1) 求抛物线的表达式及顶点 D 的坐标;

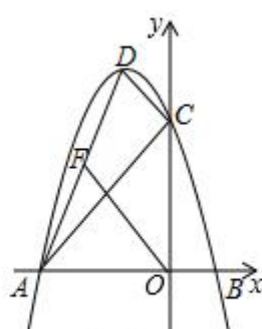
(2) 点 F 是线段 AD 上一个动点.

①如图 1, 设 $k = \frac{AF}{AD}$, 当 k 为何值时, $CF = \frac{1}{2}AD$?

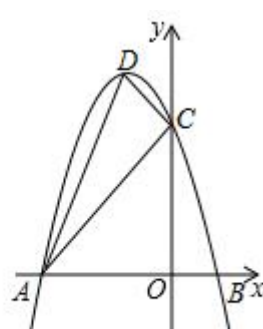
②如图 2, 以 A, F, O 为顶点的三角形是否与 $\triangle ABC$ 相似? 若相似, 求出点 F 的坐标; 若不相似, 请说明理由.



(图1)



(图2)



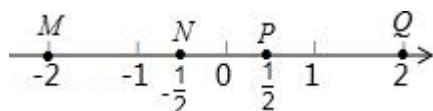
(备用图)

2019 年湖南省郴州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1.（3 分）如图，数轴上表示 -2 的相反数的点是（ ）



- A. M B. N C. P D. Q

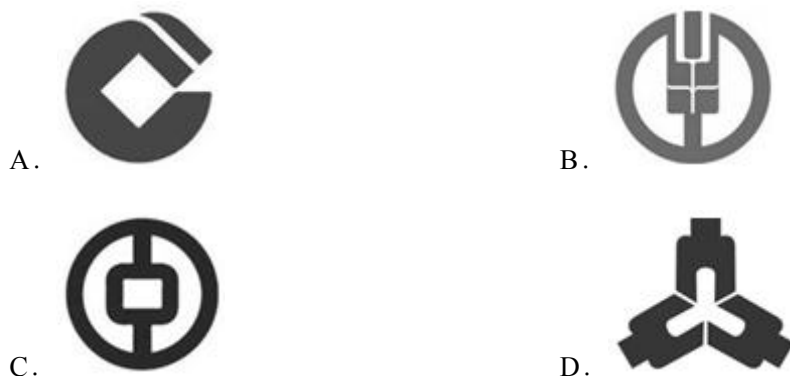
【分析】根据只有符号不同的两个数互为相反数，可得答案．

【解答】解： -2 的相反数是 2 ，

故选：D．

【点评】本题考查了相反数，在一个数的前面加上负号就是这个数的相反数．

2.（3 分）如图是我国几家银行的标志，其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念对各选项分析判断即可得解．

【解答】解：A、不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故本选项错误；

B、是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项错误；

C、既是轴对称图形，又是中心对称图形，故此选项正确；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项错误．

故选：C．

【点评】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念．轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180° 度后两部分重合

3.（3 分）邓小平曾说：“中东有石油，中国有稀土”．稀土是加工制造国防、军工等工业品

不可或缺的原料．据有关统计数据表明：至 2017 年止，我国已探明稀土储量约 4400 万吨，居世界第一位，请用科学记数法表示 44 000 000 为（ ）

- A. 44×10^6 B. 4.4×10^7 C. 4.4×10^8 D. 0.44×10^9

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，据此判断即可．

【解答】解：将 44 000 000 用科学记数法可表示为 4.4×10^7 ．

故选：B．

【点评】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

4. (3 分) 下列运算正确的是（ ）

- A. $(x^2)^3 = x^5$ B. $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{10}$ C. $x \cdot x^2 \cdot x^4 = x^6$ D. $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

【分析】根据幂的乘方法则判断 A；先把 $\sqrt{8}$ 化为最简二次根式，再合并同类二次根式，即可判断 B；根据同底数幂的乘法法则判断 C；根据二次根式的除法法则判断 D．

【解答】解：A、 $(x^2)^3 = x^6$ ，故本选项错误；

B、 $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ，故本选项错误；

C、 $x \cdot x^2 \cdot x^4 = x^7$ ，故本选项错误；

D、 $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，故本选项正确；

故选：D．

【点评】本题考查了二次根式的运算，整式的运算，掌握同底数幂的乘法法则、幂的乘方法则、以及二次根式的除法法则是解题的关键．

5. (3 分) 一元二次方程 $2x^2 + 3x - 5 = 0$ 的根的情况为（ ）

- A. 有两个相等的实数根 B. 有两个不相等的实数根
C. 只有一个实数根 D. 没有实数根

【分析】求出 Δ 的值即可判断．

【解答】解：一元二次方程 $2x^2 - 3x + 5 = 0$ 中，

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 9(-5) > 0,$$

$\therefore$ 有两个不相等的实数根．

故选：B．

【点评】本题考查了根的判别式，一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：(1) $\Delta >$

$0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根; (2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根; (3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

6. (3分) 下列采用的调查方式中, 合适的是 ()

- A. 为了解东江湖的水质情况, 采用抽样调查的方式
- B. 我市某企业为了解所生产的产品的合格率, 采用普查的方式
- C. 某小型企业给在职员工做工作服前进行尺寸大小的调查, 采用抽样调查的方式
- D. 某市教育部门为了解该市中小学生的视力情况, 采用普查的方式

【分析】根据两种不同的调查方式的优缺点分别判断即可.

【解答】解: A、为了解东江湖的水质情况, 采用抽样调查的方式, 合适;

B、我市某企业为了解所生产的产品的合格率, 因调查范围广, 工作量大采用普查的方式不合适;

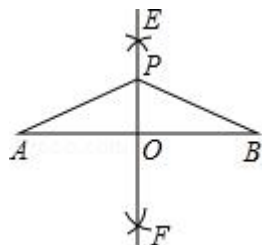
C、某小型企业给在职员工做工作服前进行尺寸大小的调查, 因调查范围小采用抽样调查的方式不合适;

D、某市教育部门为了解该市中小学生的视力情况, 因调查范围广, 采用普查的方式不合适,

故选: A.

【点评】本题考查了全面调查与抽样调查的知识, 解题的关键是能够了解两种调查方式的优缺点, 难度不大.

7. (3分) 如图, 分别以线段 AB 的两端点 A, B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径画弧, 在线段 AB 的两侧分别交于点 E, F , 作直线 EF 交 AB 于点 O . 在直线 EF 上任取一点 P (不与 O 重合), 连接 PA, PB , 则下列结论不一定成立的是 ()



- A. $PA = PB$ B. $OA = OB$ C. $OP = OF$ D. $PO \perp AB$

【分析】依据分别以线段 AB 的两端点 A, B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径画弧, 在线段 AB 的两侧分别交于点 E, F , 作直线 EF 交 AB 于点 O , 即可得到 EF 垂直平分 AB , 进而得出结论.

【解答】解：∵由作图可知， EF 垂直平分 AB ，

∴ $PA = PB$ ，故 A 选项正确；

$OA = OB$ ，故 B 选项正确；

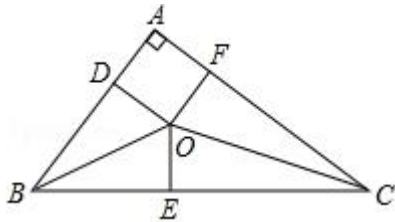
$OE = OF$ ，故 C 选项错误；

$PO \perp AB$ ，故 D 选项正确；

故选：C.

【点评】本题考查基本作图、线段垂直平分线的性质，解题的关键是掌握线段垂直平分线的作法，利用线段垂直平分线上的点到两个端点的距离相等解决问题.

8. (3 分) 我国古代数学家刘徽将勾股形（古人称直角三角形为勾股形）分割成一个正方形和两对全等的三角形，如图所示，已知 $\angle A = 90^\circ$ ， $BD = 4$ ， $CF = 6$ ，则正方形 $ADOF$ 的边长是（ ）



A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. 4

【分析】设正方形 $ADOF$ 的边长为 x ，在直角三角形 ACB 中，利用勾股定理可建立关于 x 的方程，解方程即可.

【解答】解：设正方形 $ADOF$ 的边长为 x ，

由题意得： $BE = BD = 4$ ， $CE = CF = 6$ ，

∴ $BC = BE + CE = BD + CF = 10$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC^2 + AB^2 = BC^2$ ，

即 $(6+x)^2 + (x+4)^2 = 10^2$ ，

整理得， $x^2 + 10x - 24 = 0$ ，

解得： $x = 2$ ，或 $x = -12$ （舍去），

∴ $x = 2$ ，

即正方形 $ADOF$ 的边长是 2；

故选：B.

【点评】本题考查了正方形的性质、全等三角形的性质、一元二次方程的解法、勾股定理等知识；熟练掌握正方形的性质，由勾股定理得出方程是解题的关键.

二、填空题（共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分）

9.（3 分）二次根式 $\sqrt{x-2}$ 中， x 的取值范围是 $x \geq 2$ ．

【分析】二次根式的被开方数是非负数，即 $x-2 \geq 0$ ．

【解答】解：根据题意，得

$$x-2 \geq 0,$$

解得， $x \geq 2$ ；

故答案是： $x \geq 2$ ．

【点评】考查了二次根式的意义和性质．概念：式子 $\sqrt{a}$ （ $a \geq 0$ ）叫二次根式．性质：二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义．

10.（3 分）若 $\frac{x+y}{x} = \frac{3}{2}$ ，则 $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ ．

【分析】直接利用已知将原式变形进而得出 x, y 之间的关系进而得出答案．

【解答】解： $\because \frac{x+y}{x} = \frac{3}{2}$,

$$\therefore 2x+2y = 3x,$$

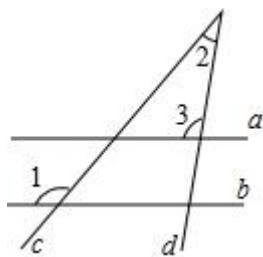
$$\text{故 } 2y = x,$$

$$\text{则 } \frac{y}{x} = \frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$ ．

【点评】此题主要考查了比例的性质，正确将原式变形是解题关键．

11.（3 分）如图，直线 a, b 被直线 c, d 所截．若 $a \parallel b$ ， $\angle 1 = 130^\circ$ ， $\angle 2 = 30^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的度数为 100 度．



【分析】直接利用平行线的性质结合三角形外角的性质得出答案．

【解答】解： $\because a \parallel b$,

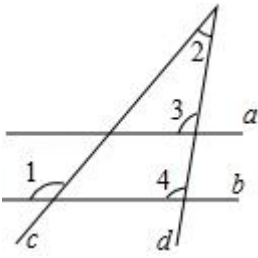
$$\therefore \angle 3 = \angle 4,$$

$$\because \angle 1 = \angle 2 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3, \angle 1 = 130^\circ, \angle 2 = 30^\circ,$$

$$\therefore 130^\circ = 30^\circ + \angle 3,$$

解得： $\angle 3 = 100^\circ$.

故答案为： 100.



【点评】此题主要考查了平行线的性质以及三角形的外角，正确应用平行线的性质是解题关键.

12. (3 分) 某校举行演讲比赛，七个评委对小明的打分如下：9，8，7，6，9，9，7，这组数据的中位数是 8 .

【分析】根据中位数计算：将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

【解答】解：把这组数据按照从小到大的顺序排列为：6，7，7，8，9，9，9，
故这组数据的中位数是 8.

故答案为： 8.

【点评】本题考查了中位数的定义，解题的关键是牢记定义，此题比较简单，易于掌握.

13. (3 分) 某商店今年 6 月初销售纯净水的数量如下表所示：

日期	1	2	3	4
数量（瓶）	120	125	130	135

观察此表，利用所学函数知识预测今年 6 月 7 日该商店销售纯净水的数量约为 150 瓶.

【分析】这是一个一次函数模型，设 $y = kx + b$ ，利用待定系数法即可解决问题，

【解答】解：这是一个一次函数模型，设 $y = kx + b$ ，则有 $\begin{cases} k + b = 120 \\ 2k + b = 125 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} k = 5 \\ b = 115 \end{cases}$ ，

$\therefore y = 5x + 115$ ，

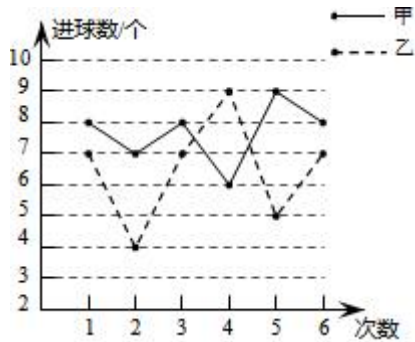
当 $x = 7$ 时， $y = 150$ ，

$\therefore$ 预测今年 6 月 7 日该商店销售纯净水的数量约为 150 瓶，

故答案为 150.

【点评】 本题考查一次函数的性质，解题的关键是学会构建一次函数解决问题，属于中考常考题型．

- 14.（3分）如图是甲、乙两人6次投篮测试（每次投篮10个）成绩的统计图，甲、乙两人测试成绩的方差分别记作 $s_{甲}^2$ 、 $s_{乙}^2$ ，则 $s_{甲}^2$ < $s_{乙}^2$.（填“>”，“=”或“<”）



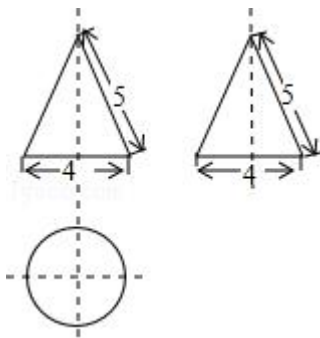
【分析】 根据数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定，方差越大；数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定，方差越小进行判断．

【解答】 解：由图象可知：乙偏离平均数大，甲偏离平均数小，所以乙波动大，不稳定，方差大，即 $s_{甲}^2 < s_{乙}^2$ ．

故答案为：<．

【点评】 本题考查方差的意义．方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定．

- 15.（3分）已知某几何体的三视图如图，其中主视图和左视图都是腰长为5，底边长为4的等腰三角形，则该几何体的侧面展开图的面积是 10π .（结果保留 π ）



【分析】 由三视图可知，该几何体是圆锥，根据圆锥是侧面积公式计算即可．

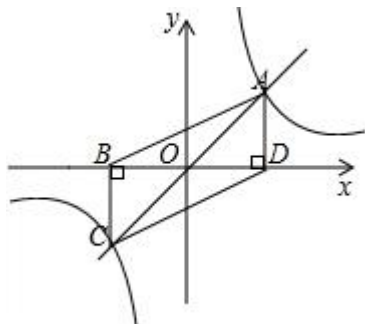
【解答】 解：由三视图可知，该几何体是圆锥，

$\therefore$ 侧面展开图的面积 $= \pi \cdot 2 \cdot 5 = 10\pi$ ，

故答案为 10π ．

【点评】 本题考查三视图，圆锥等知识，解题的关键是记住圆锥的侧面积公式．

16. (3分) 如图，点 A, C 分别是正比例函数 $y=x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象的交点，过 A 点作 $AD \perp x$ 轴于点 D ，过 C 点作 $CB \perp x$ 轴于点 B ，则四边形 $ABCD$ 的面积为 8．



【分析】 由反比例函数的对称性可知 $OA=OC$ ， $OB=OD$ ，则 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}=S_{\triangle DOC}=S_{\triangle AOD}$ ，再根据反比例函数 k 的几何意义可求得这四个三角形的面积，可求得答案．

【解答】 解： $\because A, C$ 是两函数图象的交点，

$\therefore A, C$ 关于原点对称，

$\because CD \perp x$ 轴， $AB \perp x$ 轴，

$\therefore OA=OC$ ， $OB=OD$ ，

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}=S_{\triangle DOC}=S_{\triangle AOD}$ ，

又 $\because$ 反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象上，

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}=S_{\triangle DOC}=S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2} \times 4=2$ ，

$\therefore S_{\text{四边形 } ABCD}=4S_{\triangle AOB}=4 \times 2=8$ ，

故答案为：8．

【点评】 本题主要考查反比例函数的对称性和 k 的几何意义，根据条件得出 $OA=OC$ ， $OB=OD$ 是解题的关键，注意 k 的几何意义的应用．

三、解答题（17～19 题每题 6 分，20～23 题每题 8 分，24～25 题每题 10 分，26 题 12 分，共 82 分）

17. (6分) 计算： $(3-\pi)^0 - 2\cos 30^\circ + |1-\sqrt{3}| + (\frac{1}{2})^{-1}$ ．

【分析】 原式利用零指数幂、负整数指数幂法则，绝对值的代数意义，以及特殊角的三角函数值计算即可求出值．

【解答】 解：原式 $= 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} - 1 + 2 = 2$ ．

【点评】 此题考查了实数的运算，熟练掌握运算是解本题的关键．

18. (6分) 先化简, 再求值: $\frac{a-1}{a^2-2a+1} - \frac{a-1}{a^2-1}$, 其中 $a = \sqrt{3}$.

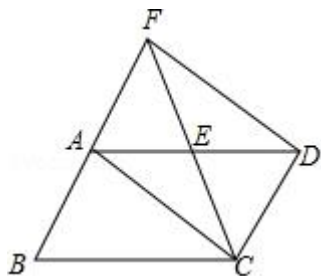
【分析】根据分式的减法可以化简题目中的式子, 然后将 a 的值代入化简后的式子即可解答本题.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: } & \frac{a-1}{a^2-2a+1} - \frac{a-1}{a^2-1} \\ &= \frac{a-1}{(a-1)^2} - \frac{a-1}{(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} \\ &= \frac{a+1-(a-1)}{(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{a+1-a+1}{(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{2}{(a+1)(a-1)}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } a = \sqrt{3} \text{ 时, 原式} = \frac{2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2}{3-1} = 1.$$

【点评】本题考查分式的化简求值, 解答本题的关键是明确分式化简求值的方法.

19. (6分) 如图, $\square ABCD$ 中, 点 E 是边 AD 的中点, 连接 CE 并延长交 BA 的延长线于点 F , 连接 AC , DF . 求证: 四边形 $ACDF$ 是平行四边形.



【分析】利用平行四边形的性质, 即可判定 $\triangle FAE \cong \triangle CDE$, 即可得到 $CD = FA$, 再根据 $CD \parallel AF$, 即可得出四边形 $ACDF$ 是平行四边形;

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle CDE,$$

$\because E$ 是 AD 的中点,

$$\therefore AE = DE,$$

$$\text{又 } \because \angle FEA = \angle CED,$$

$$\therefore \triangle FAE \cong \triangle CDE \text{ (ASA)},$$

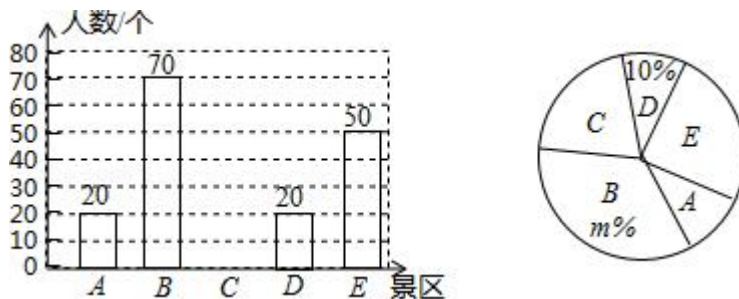
$$\therefore CD = FA,$$

$$\text{又} \because CD \parallel AF,$$

$\therefore$ 四边形 $ACDF$ 是平行四边形.

【点评】 本题考查了平行四边形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，熟练掌握平行四边形的判定和性质定理是解题的关键.

20. (8分) 我市去年成功举办2018郴州国际休闲旅游文化节, 获评“全国森林旅游示范市”. 我市有 A, B, C, D, E 五个景区很受游客喜爱. 一旅行社对某小区居民在暑假期间去以上五个景区旅游 (只选一个景区) 的意向做了一次随机调查统计, 并根据这个统计结果制作了如下两幅不完整的统计图:



(1) 该小区居民在这次随机调查中被调查到的人数是 200 人, $m =$ 35, 并补全条形统计图;

(2) 若该小区有居民 1200 人, 试估计去 B 地旅游的居民约有多少人?

(3) 小军同学已去过 E 地旅游, 暑假期间计划与父母从 A, B, C, D 四个景区中, 任选两个去旅游, 求选到 A, C 两个景区的概率. (要求画树状图或列表求概率)

【分析】 (1) 先由 D 景区人数及其所占百分比求出总人数, 再根据百分比的概念和各景区人数之和等于总人数求解可得;

(2) 利用样本估计总体思想求解可得;

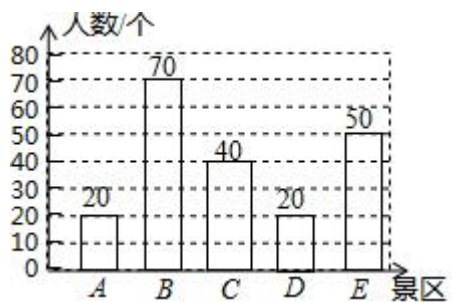
(3) 画树状图得出所有等可能结果, 从中找到选到 A, C 两个景区的结果数, 再根据概率公式计算可得.

【解答】 解: (1) 该小区居民在这次随机调查中被调查到的人数是 $20 \div 10\% = 200$ (人),

$$\text{则 } m\% = \frac{70}{200} \times 100\% = 35\%, \text{ 即 } m = 35,$$

$$C \text{ 景区人数为 } 200 - (20 + 70 + 20 + 50) = 40 \text{ (人)},$$

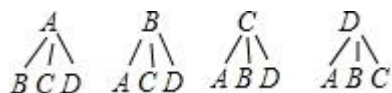
补全条形图如下:



故答案为：200，35；

(2) 估计去 B 地旅游的居民约有 $1200 \times 35\% = 420$ (人)；

(3) 画树状图如下：



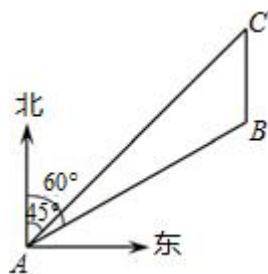
由树状图知，共有 12 种等可能结果，其中选到 A，C 两个景区的有 2 种结果，

所以选到 A，C 两个景区的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

【点评】 此题考查了列表法或树状图法求概率以及扇形与条形统计图的知识。注意掌握扇形统计图与条形统计图的对应关系。用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比。

21. (8 分) 如图所示，巡逻船在 A 处测得灯塔 C 在北偏东 45° 方向上，距离 A 处 30km 。在灯塔 C 的正南方向 B 处有一渔船发出求救信号，巡逻船接到指示后立即前往施救。已知 B 处在 A 处的北偏东 60° 方向上，这时巡逻船与渔船的距离是多少？

(精确到 0.01km 。参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$)



【分析】 延长 CB 交过 A 点的正东方向于 D，则 $\angle CDA = 90^\circ$ ，由题意得： $AC = 30\text{km}$ ， $\angle CAD = 45^\circ$ ， $\angle BAD = 30^\circ$ ，由直角三角形的性质得出 $AD = CD = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = 15\sqrt{2}$ ，AD

$$= \sqrt{3}BD, BD = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{6}, \text{ 即可得出答案.}$$

【解答】解：延长 CB 交过 A 点的正东方向于 D ，如图所示：

则 $\angle CDA = 90^\circ$ ，

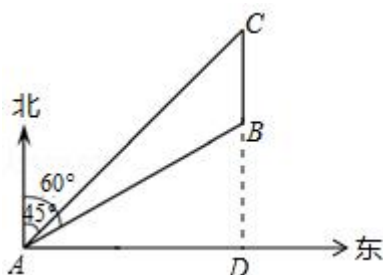
由题意得： $AC = 30\text{km}$ ， $\angle CAD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ， $\angle BAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，

$$\therefore AD = CD = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = 15\sqrt{2}, AD = \sqrt{3}BD,$$

$$\therefore BD = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{6},$$

$$\therefore BC = CD - BD = 15\sqrt{2} - 5\sqrt{6} \approx 15 \times 1.414 - 5 \times 2.449 \approx 8.97 \text{ (km)};$$

答：巡逻船与渔船的距离约为 8.97km 。



【点评】本题考查了解直角三角形的应用，解答本题的关键是根据题目中所给方向角构造直角三角形，然后利用三角函数的知识求解，难度适中。

22. (8分) 某小微企业为加快产业转型升级步伐，引进一批 A 、 B 两种型号的机器。已知一台 A 型机器比一台 B 型机器每小时多加工 2 个零件，且一台 A 型机器加工 80 个零件与一台 B 型机器加工 60 个零件所用时间相等。

(1) 每台 A 、 B 两种型号的机器每小时分别加工多少个零件？

(2) 如果该企业计划安排 A 、 B 两种型号的机器共 10 台一起加工一批该零件，为了如期完成任务，要求两种机器每小时加工的零件不少于 72 件，同时为了保障机器的正常运转，两种机器每小时加工的零件不能超过 76 件，那么 A 、 B 两种型号的机器可以各安排多少台？

【分析】(1) 设每台 B 型机器每小时加工 x 个零件，则每台 A 型机器每小时加工 $(x+2)$ 个零件，根据工作时间 = 工作总量 $\div$ 工作效率结合一台 A 型机器加工 80 个零件与一台 B 型机器加工 60 个零件所用时间相等，即可得出关于 x 的分式方程，解之经检验后即可得出结论；

(2) 设 A 型机器安排 m 台，则 B 型机器安排 $(10-m)$ 台，根据每小时加工零件的总量 = $8 \times A$ 型机器的数量 + $6 \times B$ 型机器的数量结合每小时加工的零件不少于 72 件且不能超过

过 76 件，即可得出关于 m 的一元一次不等式组，解之即可得出 m 的取值范围，再结合 m 为正整数即可得出各安排方案.

【解答】解：(1) 设每台 B 型机器每小时加工 x 个零件，则每台 A 型机器每小时加工 $(x+2)$ 个零件，

依题意，得：
$$\frac{80}{x+2} = \frac{60}{x},$$

解得： $x = 6$,

经检验， $x = 6$ 是原方程的解，且符合题意，

$\therefore x+2 = 8$.

答：每台 A 型机器每小时加工 8 个零件，每台 B 型机器每小时加工 6 个零件.

(2) 设 A 型机器安排 m 台，则 B 型机器安排 $(10 - m)$ 台，

依题意，得：
$$\begin{cases} 8m+6(10-m) \geq 72 \\ 8m+6(10-m) \leq 76 \end{cases},$$

解得： $6 \leq m \leq 8$.

$\because m$ 为正整数，

$\therefore m = 6, 7, 8$.

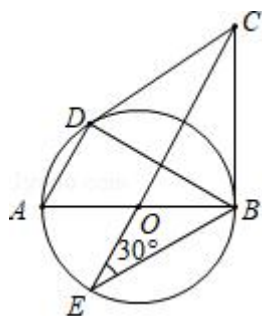
答：共有三种安排方案，方案一： A 型机器安排 6 台， B 型机器安排 4 台；方案二： A 型机器安排 7 台， B 型机器安排 3 台；方案三： A 型机器安排 8 台， B 型机器安排 2 台.

【点评】 本题考查了分式方程的应用以及一元一次不等式组的应用，解题的关键是：(1) 找准等量关系，正确列出分式方程；(2) 根据各数量之间的关系，正确列出一元一次不等式组.

23. (8 分) 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， CD 与 $\odot O$ 相切于点 D ，且 $AD \parallel OC$.

(1) 求证： BC 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 延长 CO 交 $\odot O$ 于点 E . 若 $\angle CEB = 30^\circ$ ， $\odot O$ 的半径为 2，求 $\widehat{BD}$ 的长. (结果保留 π)



【分析】(1) 根据切线的性质和平行线的性质从而证得 $\triangle COD \cong \triangle COB$ ，得到 $\angle ODC = \angle OBC = 90^\circ$ ，即可证得结论；

(2) 根据圆周角定理得到 $\angle BOD = 120^\circ$ ，然后根据弧长公式求得即可．

【解答】(1) 证明：连接 OD ，

$\because CD$ 与 $\odot O$ 相切于点 D ，

$\therefore \angle ODC = 90^\circ$ ，

$\because OD = OA$ ，

$\therefore \angle OAD = \angle ODA$ ，

$\because AD \parallel OC$ ，

$\therefore \angle COB = \angle OAD$ ， $\angle COD = \angle ODA$ ，

$\therefore \angle COB = \angle COD$ ，

在 $\triangle COD$ 和 $\triangle COB$ 中

$$\begin{cases} OD=OB \\ \angle COD=\angle COB, \\ OC=OC \end{cases}$$

$\therefore \triangle COD \cong \triangle COB$ (SAS)，

$\therefore \angle ODC = \angle OBC = 90^\circ$ ，

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的切线；

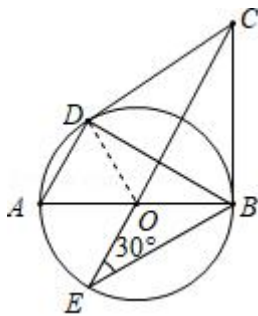
(2) 解： $\because \angle CEB = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle COB = 60^\circ$ ，

$\because \angle COB = \angle COD$ ，

$\therefore \angle BOD = 120^\circ$ ，

$\therefore \widehat{BD}$ 的长： $\frac{120\pi \cdot 2}{180} = \frac{4}{3}\pi$ ．



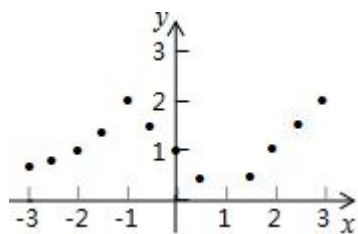
【点评】 本题考查了切线的判定和性质，平行线的性质，圆周角定理以及三角形全等的判定和性质，熟练掌握性质定理是解题的关键．

24. (10分) 若一个函数当自变量在不同范围内取值时, 函数表达式不同, 我们称这样的函数为分段函数. 下面我们参照学习函数的过程与方法, 探究分段函数 $y =$

$$\begin{cases} -\frac{2}{x} & (x \leq -1) \\ |x-1| & (x > -1) \end{cases}$$
 的图象与性质. 列表:

x	...	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	...
y	...	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	...

描点: 在平面直角坐标系中, 以自变量 x 的取值为横坐标, 以相应的函数值 y 为纵坐标, 描出相应的点, 如图所示.



(1) 如图, 在平面直角坐标系中, 观察描出的这些点的分布, 作出函数图象;

(2) 研究函数并结合图象与表格, 回答下列问题:

①点 $A(-5, y_1)$, $B(-\frac{7}{2}, y_2)$, $C(x_1, \frac{5}{2})$, $D(x_2, 6)$ 在函数图象上, 则 y_1 < y_2 ,

x_1 < x_2 ; (填“>”, “=”或“<”)

②当函数值 $y=2$ 时, 求自变量 x 的值;

③在直线 $x=-1$ 的右侧的函数图象上有两个不同的点 $P(x_3, y_3)$, $Q(x_4, y_4)$, 且 $y_3 = y_4$, 求 x_3+x_4 的值;

④若直线 $y=a$ 与函数图象有三个不同的交点, 求 a 的取值范围.

【分析】 (1) 描点连线即可;

(2) ① A 与 B 在 $y = -\frac{1}{x}$ 上, y 随 x 的增大而增大, 所以 $y_1 < y_2$; C 与 D 在 $y = |x-1|$ 上,

观察图象可得 $x_1 < x_2$;

②当 $y=2$ 时, $2 = |x-1|$, 则有 $x=3$ 或 $x=-1$;

③由图可知 $-1 \leq x \leq 3$ 时, 点关于 $x=1$ 对称, 当 $y_3 = y_4$ 时 $x_3+x_4 = 2$;

④由图象可知, $0 < a < 2$;

【解答】 解: (1) 如图所示:

(2) ① $A(-5, y_1), B(-\frac{7}{2}, y_2),$

A 与 B 在 $y = -\frac{1}{x}$ 上, y 随 x 的增大而增大, $\therefore y_1 < y_2;$

$C(x_1, \frac{5}{2}), D(x_2, 6),$

C 与 D 在 $y = |x - 1|$ 上, 观察图象可得 $x_1 < x_2;$

故答案为 $<, <;$

② 当 $y = 2$ 时, $2 = -\frac{1}{x}, \therefore x = -\frac{1}{2}$ (不符合);

当 $y = 2$ 时, $2 = |x - 1|, \therefore x = 3$ 或 $x = -1;$

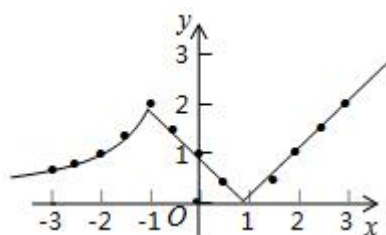
③ $\because P(x_3, y_3), Q(x_4, y_4)$ 在 $x = -1$ 的右侧,

$\therefore -1 \leq x \leq 3$ 时, 点关于 $x = 1$ 对称,

$\therefore y_3 = y_4,$

$\therefore x_3 + x_4 = 2;$

④ 由图象可知, $0 < a < 2;$



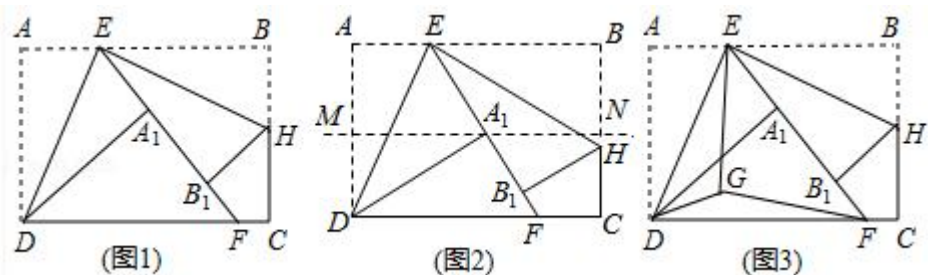
【点评】 本题考查反比例函数的图象及性质, 一次函数的图象及性质; 能够通过描点准确的画出函数图象是解题的关键.

25. (10 分) 如图 1, 矩形 $ABCD$ 中, 点 E 为 AB 边上的动点 (不与 A, B 重合), 把 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折, 点 A 的对应点为 A_1 , 延长 EA_1 交直线 DC 于点 F , 再把 $\angle BEF$ 折叠, 使点 B 的对应点 B_1 落在 EF 上, 折痕 EH 交直线 BC 于点 H .

(1) 求证: $\triangle A_1DE \sim \triangle B_1EH;$

(2) 如图 2, 直线 MN 是矩形 $ABCD$ 的对称轴, 若点 A_1 恰好落在直线 MN 上, 试判断 $\triangle DEF$ 的形状, 并说明理由;

(3) 如图 3, 在 (2) 的条件下, 点 G 为 $\triangle DEF$ 内一点, 且 $\angle DGF = 150^\circ$, 试探究 DG, EG, FG 的数量关系.



【分析】(1) 由折叠图形的性质可得 $\angle DA_1E = \angle EB_1H = 90^\circ$, $\angle DEA_1 + \angle HEB_1 = 90^\circ$ 从而可得 $\angle DEA_1 = \angle EHB_1$, 依据两个角对应相等的三角形相似可得 $\triangle A_1DE \sim \triangle B_1EH$;

(2) 由 A_1 恰好落在直线 MN 上可知 A_1 在 EF 的中点, 由 SAS 易证 $\triangle A_1DE \cong \triangle A_1DF$, 即可得 $\angle ADE = \angle EDA_1 = \angle FDA_1 = 30^\circ$,

(3) 将 $\triangle DGE$ 逆时针旋转 60° 到 $\triangle DG'F$ 位置, 由旋转的旋转将 DG , EG , FG 集中到 $\triangle G'GF$ 中结合 $\angle DGF = 150^\circ$, 可得 $\triangle G'GF$ 为直角三角形, 由勾股定理可得 $G'G^2 + GF^2 = GF^2$, 即可证明 $DG^2 + GF^2 = GE^2$,

【解答】解: (1) 证明: 由折叠的性质可知: $\angle DAE = \angle DA_1E = 90^\circ$, $\angle EBH = \angle EB_1H = 90^\circ$, $\angle AED = \angle A_1ED$, $\angle BEH = \angle B_1EH$,

$\therefore \angle DEA_1 + \angle HEB_1 = 90^\circ$.

又 $\because \angle HEB_1 + \angle EHB_1 = 90^\circ$,

$\therefore \angle DEA_1 = \angle EHB_1$,

$\therefore \triangle A_1DE \sim \triangle B_1EH$;

(2) 结论: $\triangle DEF$ 是等边三角形;

理由如下:

$\because$ 直线 MN 是矩形 $ABCD$ 的对称轴,

$\therefore$ 点 A_1 是 EF 的中点, 即 $A_1E = A_1F$,

在 $\triangle A_1DE$ 和 $\triangle A_1DF$ 中

$$\begin{cases} DA_1 = DA_1 \\ \angle DA_1E = \angle DA_1F = 90^\circ \\ A_1E = A_1F \end{cases} ,$$

$\therefore \triangle A_1DE \cong \triangle A_1DF$ (SAS) ,

$\therefore DE = DF$, $\angle FDA_1 = \angle EDA_1$,

又 $\because \triangle ADE \cong \triangle A_1DE$, $\angle ADF = 90^\circ$.

$\therefore \angle ADE = \angle EDA_1 = \angle FDA_1 = 30^\circ$,

$$\therefore \angle EDF = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle DEF$ 是等边三角形;

(3) DG, EG, FG 的数量关系是 $DG^2 + GF^2 = GE^2$,

理由如下: 由(2)可知 $\triangle DEF$ 是等边三角形; 将 $\triangle DGE$ 逆时针旋转 60° 到 $\triangle DG'F$ 位置, 如解图(1),

$$\therefore G'F = GE, DG' = DG, \angle GDG' = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle DGG'$ 是等边三角形,

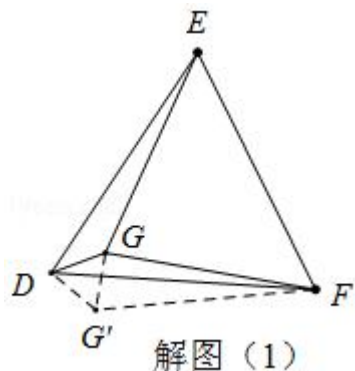
$$\therefore GG' = DG, \angle DGG' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DGF = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle G'GF = 90^\circ,$$

$$\therefore G'G^2 + GF^2 = G'F^2,$$

$$\therefore DG^2 + GF^2 = GE^2,$$



解图(1)

【点评】 本题考查翻折变换、相似三角形证明、全等三角形的判定和性质、勾股定理矩形的性质等知识, 解(3)题的关键是灵活运用旋转得全等三角形, 构造 $\text{Rt}\triangle G'GF$.

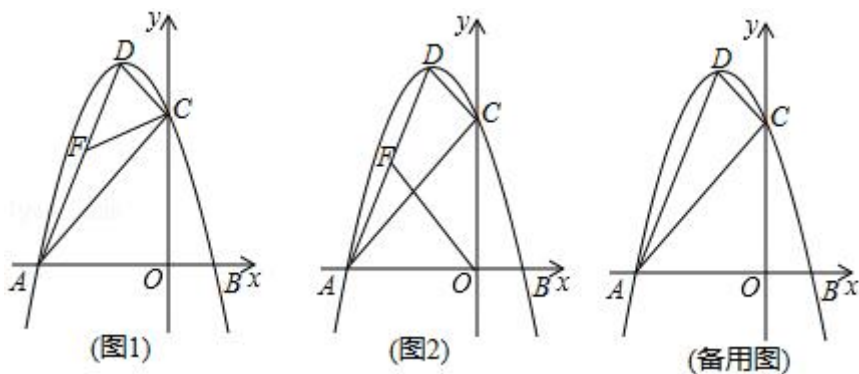
26. (12分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴分别交于 $A(-3, 0)$, $B(1, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 C .

(1) 求抛物线的表达式及顶点 D 的坐标;

(2) 点 F 是线段 AD 上一个动点.

①如图1, 设 $k = \frac{AF}{AD}$, 当 k 为何值时, $CF = \frac{1}{2}AD$?

②如图2, 以 A, F, O 为顶点的三角形是否与 $\triangle ABC$ 相似? 若相似, 求出点 F 的坐标; 若不相似, 请说明理由.



【分析】(1) 将 A 、 B 两点的坐标代入二次函数解析式，用待定系数法即求出抛物线对应的函数表达式，可求得顶点 $D(-1, 4)$ ；

(2) ①由 A 、 C 、 D 三点的坐标求出 $AC = 3\sqrt{2}$ ， $DC = \sqrt{2}$ ， $AD = 2\sqrt{5}$ ，可得 $\triangle ACD$ 为直角三角形，若 $CF = \frac{1}{2}AD$ ，则点 F 为 AD 的中点，可求出 k 的值；

②由条件可判断 $\angle DAC = \angle OBC$ ，则 $\angle OAF = \angle ACB$ ，若以 A ， F ， O 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，可分两种情况考虑：当 $\angle AOF = \angle ABC$ 或 $\angle AOF = \angle CAB = 45^\circ$ 时，可分别求出点 F 的坐标。

【解答】解：(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 过点 $A(-3, 0)$ ， $B(1, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 9a - 3b + 3 = 0 \\ a + b + 3 = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$ ；

$$\therefore y = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4$$

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(-1, 4)$ ；

(2) ① $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中， $OA = 3$ ， $OC = 3$ ，

$$\therefore AC^2 = OA^2 + OC^2 = 18,$$

$\therefore D(-1, 4)$ ， $C(0, 3)$ ， $A(-3, 0)$ ，

$$\therefore CD^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\therefore AD^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$\therefore AC^2 + CD^2 = AD^2$$

$\therefore \triangle ACD$ 为直角三角形，且 $\angle ACD = 90^\circ$ 。

$$\therefore CF = \frac{1}{2}AD,$$

$\therefore F$ 为 AD 的中点，

$$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{2} \text{ 在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } \tan \angle ACD = \frac{DC}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle OBC \text{ 中, } \tan \angle OCB = \frac{OB}{OC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \angle ACD = \angle OCB,$$

$$\therefore OA = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FAO = \angle ACB,$$

若以 A, F, O 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 则可分两种情况考虑:

当 $\angle AOF = \angle ABC$ 时, $\triangle AOF \sim \triangle CBA$,

$$\therefore OF \parallel BC,$$

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} k+b=0 \\ b=3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=-3 \\ b=3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = -3x+3,$$

$$\therefore \text{直线 } OF \text{ 的解析式为 } y = -3x,$$

设直线 AD 的解析式为 $y = mx + n$,

$$\therefore \begin{cases} -k+b=4 \\ -3k+b=0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=2 \\ b=6 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AD \text{ 的解析式为 } y = 2x+6,$$

$$\therefore \begin{cases} y=2x+6 \\ y=-3x \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x=-\frac{6}{5} \\ y=\frac{18}{5} \end{cases},$$

$$\therefore F \left(-\frac{6}{5}, \frac{18}{5} \right).$$

当 $\angle AOF = \angle CAB = 45^\circ$ 时, $\triangle AOF \sim \triangle CAB$,

$$\therefore \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\therefore OF \perp AC,$$

$$\therefore \text{直线 } OF \text{ 的解析式为 } y = -x,$$

$$\therefore \begin{cases} y=-x \\ y=2x+6 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases},$$

$$\therefore F(-2, 2).$$

综合以上可得 F 点的坐标为 $(-\frac{6}{5}, \frac{18}{5})$ 或 $(-2, 2)$.

【点评】 本题考查了二次函数的综合题：熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征、相似三角形的判定与性质和直角三角形的性质；会利用待定系数法求函数解析式；理解坐标与图形性质；会运用分类讨论的思想解决数学问题.