

2017 年湖南省长沙市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. (3 分) 下列实数中，为有理数的是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. π C. $\sqrt[3]{2}$ D. 1

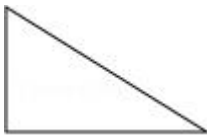
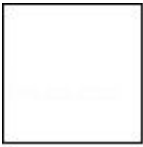
2. (3 分) 下列计算正确的是 ()

- A. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ B. $a + 2a = 2a^2$ C. $x(1+y) = x + xy$ D. $(mn^2)^3 = mn^6$

3. (3 分) 据国家旅游局统计，2017 年端午小长假全国各大景点共接待游客约为 82600000 人次，数据 82600000 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.826×10^6 B. 8.26×10^7 C. 82.6×10^6 D. 8.26×10^8

4. (3 分) 在下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是 ()

- A.  直角三角形
- B.  正五边形
- C.  正方形
- D.  平行四边形

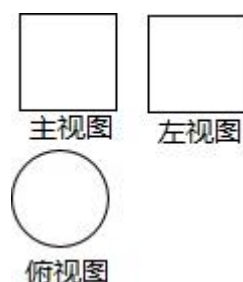
5. (3 分) 一个三角形的三个内角的度数之比为 1: 2: 3，则这个三角形一定是 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 等腰直角三角形

6. (3 分) 下列说法正确的是 ()

- A. 检测某批次灯泡的使用寿命，适宜用全面调查
- B. 可能性是 1% 的事件在一次试验中一定不会发生
- C. 数据 3, 5, 4, 1, -2 的中位数是 4
- D. “367 人中有 2 人同月同日出生” 为必然事件

7. (3 分) 某几何体的三视图如图所示，因此几何体是 ()

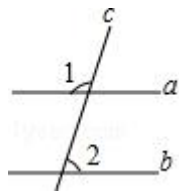


A. 长方形 B. 圆柱 C. 球 D. 正三棱柱

8. (3分) 抛物线 $y=2(x-3)^2+4$ 顶点坐标是 ()

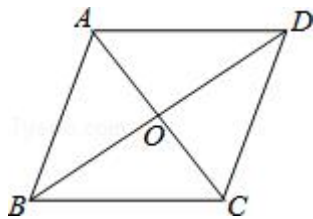
A. (3, 4) B. (-3, 4) C. (3, -4) D. (2, 4)

9. (3分) 如图, 已知直线 $a \parallel b$, 直线 c 分别与 a, b 相交, $\angle 1=110^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为 ()



A. 60° B. 70° C. 80° D. 110°

10. (3分) 如图, 菱形 ABCD 的对角线 AC, BD 的长分别为 6cm, 8cm, 则这个菱形的周长为 ()

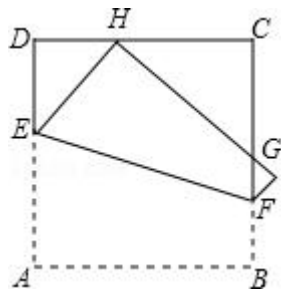


A. 5cm B. 10cm C. 14cm D. 20cm

11. (3分) 中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一段记载: “三百七十八里关, 初日健步不为难, 次日脚痛减一半, 六朝才得到其关.” 其大意是, 有人要去某关口, 路程为 378 里, 第一天健步行走, 从第二天起, 由于脚痛, 每天走的路程都为前一天的一半, 一共走了六天才到达目的地, 则此人第六天走的路程为 ()

A. 24 里 B. 12 里 C. 6 里 D. 3 里

12. (3分) 如图, 将正方形 ABCD 折叠, 使顶点 A 与 CD 边上的一点 H 重合 (H 不与端点 C, D 重合), 折痕交 AD 于点 E, 交 BC 于点 F, 边 AB 折叠后与边 BC 交于点 G. 设正方形 ABCD 的周长为 m , $\triangle CHG$ 的周长为 n , 则 $\frac{n}{m}$ 的值为 ()



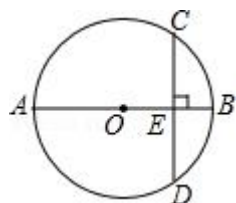
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. 随 H 点位置的变化而变化

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

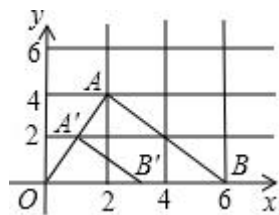
13. (3 分) 分解因式: $2a^2+4a+2=$ _____.

14. (3 分) 方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ 的解是_____.

15. (3 分) 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$ 于点 E, 已知 $CD=6$, $EB=1$, 则 $\odot O$ 的半径为_____.

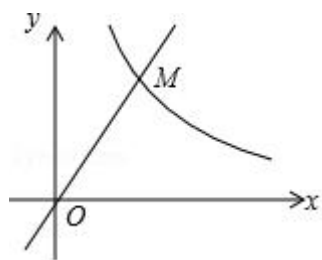


16. (3 分) 如图, $\triangle ABO$ 三个顶点的坐标分别为 A (2, 4), B (6, 0), O (0, 0), 以原点 O 为位似中心, 把这个三角形缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 可以得到 $\triangle A'B'O$, 已知点 B' 的坐标是 (3, 0), 则点 A' 的坐标是_____.



17. (3 分) 甲、乙两名同学进行跳高测试, 每人 10 次跳高的平均成绩恰好是 1.6 米, 方差分别是 $S_{甲}^2=1.2$, $S_{乙}^2=0.5$, 则在本次测试中, _____同学的成绩更稳定 (填“甲”或“乙”)

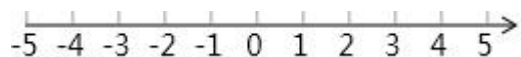
18. (3 分) 如图, 点 M 是函数 $y=\sqrt{3}x$ 与 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第一象限内的交点, $OM=4$, 则 k 的值为_____.



三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 66 分)

19. (6 分) 计算: $|-3| + (\pi - 2017)^0 - 2\sin 30^\circ + (\frac{1}{3})^{-1}$.

20. (6分) 解不等式组 $\begin{cases} 2x \geq -9-x \\ 5x-1 > 3(x+1) \end{cases}$, 并把它解集在数轴上表示出来.

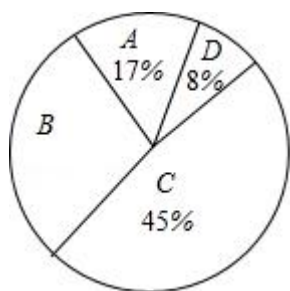


21. (8分) 为了传承中华优秀传统文化, 市教育局决定开展“经典诵读进校园”活动, 某校团委组织八年级 100 名学生进行“经典诵读”选拔赛, 赛后对全体参赛学生的成绩进行整理, 得到下列不完整的统计图表.

组别	分数段	频次	频率
A	$60 \leq x < 70$	17	0.17
B	$70 \leq x < 80$	30	a
C	$80 \leq x < 90$	b	0.45
D	$90 \leq x < 100$	8	0.08

请根据所给信息, 解答以下问题:

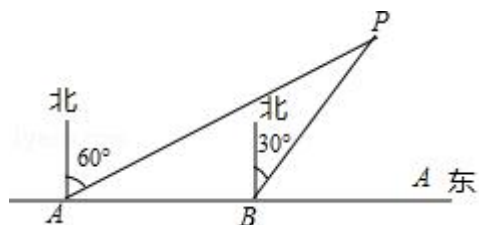
- (1) 表中 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) 请计算扇形统计图中 B 组对应扇形的圆心角的度数;
- (3) 已知有四名同学均取得 98 分的最好成绩, 其中包括来自同一班级的甲、乙两名同学, 学校将从这四名同学中随机选出两名参加市级比赛, 请用列表法或画树状图法求甲、乙两名同学都被选中的概率.



22. (8 分) 为了维护国家主权和海洋权利, 海监部门对我国领海实现了常态化巡航管理, 如图, 正在执行巡航任务的海监船以每小时 50 海里的速度向正东方航行, 在 A 处测得灯塔 P 在北偏东 60° 方向上, 继续航行 1 小时到达 B 处, 此时测得灯塔 P 在北偏东 30° 方向上.

(1) 求 $\angle APB$ 的度数;

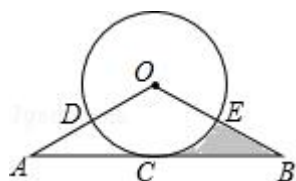
(2) 已知在灯塔 P 的周围 25 海里内有暗礁, 问海监船继续向正东方向航行是否安全?



23. (9 分) 如图, AB 与 $\odot O$ 相切于点 C, OA, OB 分别交 $\odot O$ 于点 D, E, $\widehat{CD} = \widehat{CE}$

(1) 求证: $OA = OB$;

(2) 已知 $AB = 4\sqrt{3}$, $OA = 4$, 求阴影部分的面积.



24. (9 分) 自从湖南与欧洲的“湘欧快线”开通后, 我省与欧洲各国经贸往来日益频繁, 某欧洲客商准备在湖南采购一批特色商品, 经调查, 用 16000 元采购 A 型商品的件数是用 7500 元采购 B 型商品的件数的 2 倍, 一件 A 型商品的进价比一件 B 型商品的进价多 10 元.

(1) 求一件 A, B 型商品的进价分别为多少元?

(2) 若该欧洲客商购进 A, B 型商品共 250 件进行试销, 其中 A 型商品的件数不大于 B 型的件数, 且不小于 80 件. 已知 A 型商品的售价为 240 元/件, B 型商品的售价为 220 元/件, 且全部售出. 设购进 A 型商品 m 件, 求该客商销售这批商品的利润 v 与 m 之间的函数关系式, 并写出 m 的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 欧洲客商决定在试销活动中每售出一件 A 型商品, 就从一件 A 型商品的利润中捐献慈善资金 a 元, 求该客商售完所有商品并捐献慈善资金后获得的最大收益.

25. (10 分) 若三个非零实数 x, y, z 满足: 只要其中一个数的倒数等于另外两个数的倒数的和, 则称这三个实数 x, y, z 构成“和谐三组数”.

(1) 实数 1, 2, 3 可以构成“和谐三组数”吗? 请说明理由;

(2) 若 $M(t, y_1), N(t+1, y_2), R(t+3, y_3)$ 三点均在函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象上, 且这三点的纵坐标 y_1, y_2, y_3 构成“和谐三组数”, 求实数 t 的值;

(3) 若直线 $y = 2bx + 2c$ ($bc \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(x_1, 0)$, 与抛物线 $y = ax^2 + 3bx + 3c$ ($a \neq 0$) 交于 $B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 两点.

①求证: A, B, C 三点的横坐标 x_1, x_2, x_3 构成“和谐三组数”;

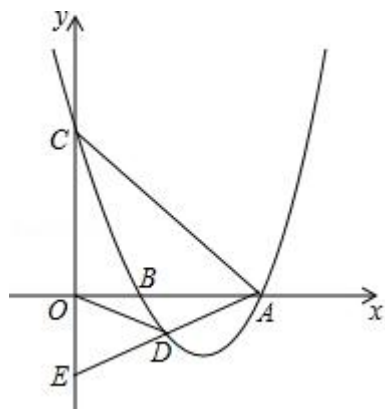
②若 $a > 2b > 3c, x_2 = 1$, 求点 $P(\frac{c}{a}, \frac{b}{a})$ 与原点 O 的距离 OP 的取值范围.

26. (10 分) 如图, 抛物线 $y=mx^2-16mx+48m$ ($m>0$) 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 B 在点 A 左侧), 与 y 轴交于点 C , 点 D 是抛物线上的一个动点, 且位于第四象限, 连接 OD, BD, AC, AD , 延长 AD 交 y 轴于点 E .

(1) 若 $\triangle OAC$ 为等腰直角三角形, 求 m 的值;

(2) 若对任意 $m>0$, C, E 两点总关于原点对称, 求点 D 的坐标 (用含 m 的式子表示);

(3) 当点 D 运动到某一位置时, 恰好使得 $\angle ODB=\angle OAD$, 且点 D 为线段 AE 的中点, 此时对于该抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 总有 $n+\frac{1}{6} \geq -4\sqrt{3}my_0^2-12\sqrt{3}y_0-50$ 成立, 求实数 n 的最小值.



2017 年湖南省长沙市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. (3 分) 下列实数中，为有理数的是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. π C. $\sqrt[3]{2}$ D. 1

【分析】根据有理数是有限小数或无限循环小数，无理数是无限不循环小数，可得答案.

【解答】解: $\sqrt{3}$, π , $\sqrt[3]{2}$ 是无理数,

1 是有理数,

故选: D.

【点评】本题考查了实数, 正确区分有理数与无理数是解题关键.

2. (3 分) 下列计算正确的是 ()

- A. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$ B. $a+2a=2a^2$ C. $x(1+y)=x+xy$ D. $(mn^2)^3=mn^6$

【分析】分别利用合并同类项法则以及单项式乘以多项式和积的乘方运算法则化简判断即可.

【解答】解: A、 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 无法计算, 故此选项错误;

B、 $a+2a=3a$, 故此选项错误;

C、 $x(1+y)=x+xy$, 正确;

D、 $(mn^2)^3=m^3n^6$, 故此选项错误;

故选: C.

【点评】此题主要考查了合并同类项以及单项式乘以多项式和积的乘方运算等知识, 正确掌握运算法则是解题关键.

3. (3 分) 据国家旅游局统计, 2017 年端午小长假全国各大景点共接待游客约为 82600000 人次, 数据 82600000 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.826×10^6 B. 8.26×10^7 C. 82.6×10^6 D. 8.26×10^8

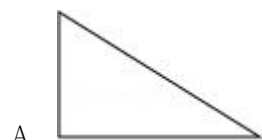
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】解: 将 82600000 用科学记数法表示为: 8.26×10^7 .

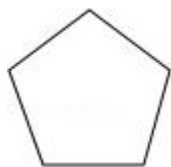
故选 B.

【点评】此题考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. (3 分) 在下列图形中, 既是轴对称图形, 又是中心对称图形的是 ()



直角三角形 B.



正五边形 C.



正方形 D.



平行四边形

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念对各选项分析判断即可得解.

【解答】解：A、既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故本选项错误；

B、是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项错误；

C、既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项正确；

D、不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项错误.

故选 C.

【点评】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后两部分重合.

5. (3 分) 一个三角形的三个内角的度数之比为 1: 2: 3, 则这个三角形一定是 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形
C. 钝角三角形 D. 等腰直角三角形

【分析】根据三角形内角和等于 180° 计算即可.

【解答】解：设三角形的三个内角的度数之比为 x 、 $2x$ 、 $3x$,

则 $x+2x+3x=180^\circ$,

解得, $x=30^\circ$,

则 $3x=90^\circ$,

$\therefore$ 这个三角形一定是直角三角形,

故选: B.

【点评】本题考查的是三角形内角和定理的应用, 掌握三角形内角和等于 180° 是解题的关键.

6. (3 分) 下列说法正确的是 ()

- A. 检测某批次灯泡的使用寿命, 适宜用全面调查
B. 可能性是 1% 的事件在一次试验中一定不会发生
C. 数据 3, 5, 4, 1, -2 的中位数是 4
D. “367 人中有 2 人同月同日出生” 为必然事件

【分析】根据可能性的大小、全面调查与抽样调查的定义及中位数概念、必然事件、不可能事件、随机事件的概念进行判断即可.

【解答】解：A、检测某批次灯泡的使用寿命, 调查具有破坏性, 应采用抽样调查, 此选项

错误;

B、可能性是 1% 的事件在一次试验中可能发生，此选项错误;

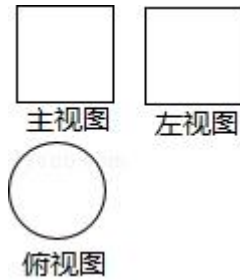
C、数据 3, 5, 4, 1, -2 的中位数是 3，此选项错误;

D、“367 人中有 2 人同月同日出生”为必然事件，此选项正确;

故选: D.

【点评】 本题主要考查可能性的大小、全面调查与抽样调查的定义及中位数概念、随机事件, 熟练掌握基本定义是解题的关键.

7. (3 分) 某几何体的三视图如图所示, 因此几何体是 ()



A. 长方形 B. 圆柱 C. 球 D. 正三棱柱

【分析】 从正面看到的图叫做主视图, 从左面看到的图叫做左视图, 从上面看到的图叫做俯视图.

【解答】 解: 从正面看, 是一个矩形; 从左面看, 是一个矩形; 从上面看, 是圆, 这样的几何体是圆柱,

故选 B.

【点评】 本题考查了几何体的三种视图, 注意所有的看到的棱都应表现在三视图中.

8. (3 分) 抛物线 $y=2(x-3)^2+4$ 顶点坐标是 ()

A. (3, 4) B. (-3, 4) C. (3, -4) D. (2, 4)

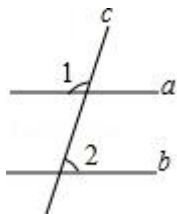
【分析】 已知解析式为顶点式, 可直接根据顶点式的坐标特点, 求顶点坐标.

【解答】 解: $y=2(x-3)^2+4$ 是抛物线的顶点式, 根据顶点式的坐标特点可知, 顶点坐标为 (3, 4).

故选 A.

【点评】 此题主要考查了二次函数的性质, 关键是熟记: 顶点式 $y=a(x-h)^2+k$, 顶点坐标是 (h, k), 对称轴是 $x=h$.

9. (3 分) 如图, 已知直线 $a \parallel b$, 直线 c 分别与 a, b 相交, $\angle 1=110^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为 ()



A. 60° B. 70° C. 80° D. 110°

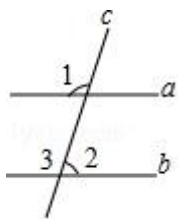
【分析】 直接根据平行线的性质即可得出结论.

【解答】 解: $\because$ 直线 $a \parallel b$,

$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 110^\circ$,

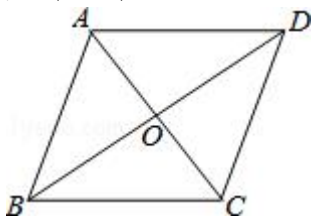
$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ,$$

故选 B.



【点评】 本题考查的是平行线的性质，用到的知识点为：两直线平行，同位角相等.

10. (3 分) 如图，菱形 ABCD 的对角线 AC，BD 的长分别为 6cm，8cm，则这个菱形的周长为 ()



A. 5cm B. 10cm C. 14cm D. 20cm

【分析】 根据菱形的对角线互相垂直平分可得 $AC \perp BD$ ， $OA = \frac{1}{2}AC$ ， $OB = \frac{1}{2}BD$ ，再利用勾股定理列式求出 AB，然后根据菱形的四条边都相等列式计算即可得解.

【解答】 解： $\because$ 四边形 ABCD 是菱形，

$$\therefore AC \perp BD, OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3\text{cm},$$

$$OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 8 = 4\text{cm},$$

$$\text{根据勾股定理得, } AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{cm},$$

所以，这个菱形的周长 $= 4 \times 5 = 20\text{cm}$.

故选 D.

【点评】 本题考查了菱形的性质，勾股定理，主要利用了菱形的对角线互相垂直平分，需熟记.

11. (3 分) 中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一段记载：“三百七十八里关，初日健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得到其关.” 其大意是，有人要去某关口，路程为 378 里，第一天健步行走，从第二天起，由于脚痛，每天走的路程都为前一天的一半，一共走了六天才到达目的地，则此人第六天走的路程为 ()

A. 24 里 B. 12 里 C. 6 里 D. 3 里

【分析】 设第一天走了 x 里，则第二天走了 $\frac{1}{2}x$ 里，第三天走了 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}x \cdots$ 第六天走了 $(\frac{1}{2})^5 x$ 里，根据路程为 378 里列出方程并解答.

【解答】 解：设第一天走了 x 里，

$$\text{依题意得: } x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}x = 378,$$

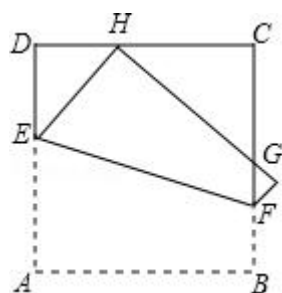
解得 $x=192$.

则 $(\frac{1}{2})^5 x = (\frac{1}{2})^5 \times 192 = 6$ (里).

故选: C.

【点评】 本题考查了一元一次方程的应用. 根据题意得到 $(\frac{1}{2})^5 x$ 是解题的难点.

12. (3分) 如图, 将正方形 ABCD 折叠, 使顶点 A 与 CD 边上的一点 H 重合 (H 不与端点 C, D 重合), 折痕交 AD 于点 E, 交 BC 于点 F, 边 AB 折叠后与边 BC 交于点 G. 设正方形 ABCD 的周长为 m , $\triangle CHG$ 的周长为 n , 则 $\frac{n}{m}$ 的值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. 随 H 点位置的变化而变化

【分析】 设 $CH=x$, $DE=y$, 则 $DH=\frac{m}{4}-x$, $EH=\frac{m}{4}-y$, 然后利用正方形的性质和折叠可以证明 $\triangle DEH \sim \triangle CHG$, 利用相似三角形的对应边成比例可以把 CG , HG 分别用 x , y 分别表示, $\triangle CHG$ 的周长也用 x , y 表示, 然后在 $Rt\triangle DEH$ 中根据勾股定理可以得到 $\frac{m}{2}x - x^2 = \frac{m}{2}y$, 进而求出 $\triangle CHG$ 的周长.

【解答】 解: 设 $CH=x$, $DE=y$, 则 $DH=\frac{m}{4}-x$, $EH=\frac{m}{4}-y$,

$$\therefore \angle EHG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DHE + \angle CHG = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle DHE + \angle DEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEH = \angle CHG,$$

又 $\because \angle D = \angle C = 90^\circ$, $\triangle DEH \sim \triangle CHG$,

$$\therefore \frac{CG}{DH} = \frac{CH}{DE} = \frac{HG}{EH}, \text{ 即 } \frac{CG}{\frac{m}{4}-x} = \frac{x}{y} = \frac{HG}{\frac{m}{4}-y},$$

$$\therefore CG = \frac{x(\frac{m}{4}-x)}{y}, \quad HG = \frac{x(\frac{m}{4}-y)}{y},$$

$$\triangle CHG \text{ 的周长为 } n = CH + CG + HG = \frac{\frac{mx}{2} - x^2}{y},$$

在 Rt△DEH 中, $DH^2 + DE^2 = EH^2$

$$\text{即 } \left(\frac{m}{4} - x\right)^2 + y^2 = \left(\frac{m}{4} - y\right)^2$$

$$\text{整理得 } \frac{mx}{2} - x^2 = \frac{my}{2},$$

$$\therefore n = CH + HG + CG = \frac{\frac{mx}{2} - x^2}{y} = \frac{\frac{my}{2}}{y} = \frac{m}{2}.$$

$$\therefore \frac{n}{m} = \frac{1}{2}.$$

故选: B.

【点评】 本题考查翻折变换及正方形的性质, 正方形的有些题目有时用代数的计算证明比用几何方法简单, 甚至几何方法不能解决的用代数方法可以解决. 本题综合考查了相似三角形的应用和正方形性质的应用.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

13. (3 分) 分解因式: $2a^2 + 4a + 2 = 2(a+1)^2$.

【分析】 原式提取 2, 再利用完全平方公式分解即可.

【解答】 解: 原式 $= 2(a^2 + 2a + 1)$

$$= 2(a+1)^2,$$

故答案为: $2(a+1)^2$.

【点评】 此题考查了提公因式法与公式法的综合运用, 熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

14. (3 分) 方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$.

【分析】 根据加减消元法, 可得答案.

【解答】 解: 两式相加, 得

$$4x = 4, \text{ 解得 } x = 1,$$

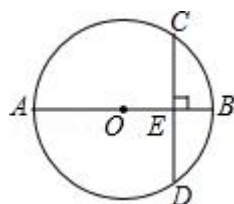
把 $x = 1$ 代入 $x + y = 1$, 解得 $y = 0$,

$$\text{方程组的解为 } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases},$$

$$\text{故答案为: } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

【点评】 本题考查了解二元一次方程组, 利用加减消元法是解题关键.

15. (3 分) 如图, AB 为 ⊙O 的直径, 弦 CD ⊥ AB 于点 E, 已知 CD = 6, EB = 1, 则 ⊙O 的半径为 5.



【分析】连接 OC，由垂径定理知，点 E 是 CD 的中点， $AE = \frac{1}{2}CD$ ，在直角 $\triangle OCE$ 中，利用勾股定理即可得到关于半径的方程，求得圆半径即可。

【解答】解：连接 OC，
 $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径， $AB \perp CD$ ，

$$\therefore CE = DE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

设 $\odot O$ 的半径为 x cm，

则 $OC = x$ cm， $OE = OB - BE = x - 1$ ，

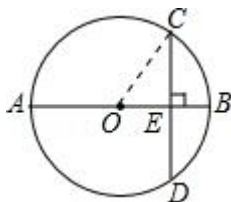
在 $Rt\triangle OCE$ 中， $OC^2 = OE^2 + CE^2$ ，

$$\therefore x^2 = 3^2 + (x - 1)^2,$$

解得： $x = 5$ ，

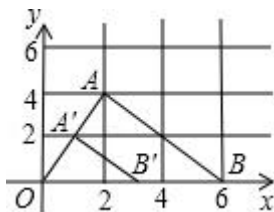
$\therefore \odot O$ 的半径为 5，

故答案为：5.



【点评】本题利用了垂径定理和勾股定理求解，熟练掌握并应用定理是解题的关键。

16. (3分) 如图， $\triangle ABO$ 三个顶点的坐标分别为 $A(2, 4)$ ， $B(6, 0)$ ， $O(0, 0)$ ，以原点 O 为位似中心，把这个三角形缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ ，可以得到 $\triangle A'B'O$ ，已知点 B' 的坐标是 $(3, 0)$ ，则点 A' 的坐标是 $(1, 2)$ 。



【分析】根据位似变换的性质进行计算即可。

【解答】解： $\because$ 点 A 的坐标为 $(2, 4)$ ，以原点 O 为位似中心，把这个三角形缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 点 A' 的坐标是 $(2 \times \frac{1}{2}, 4 \times \frac{1}{2})$ ，即 $(1, 2)$ ，

故答案为： $(1, 2)$ 。

【点评】本题考查的是位似变换的性质，掌握平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为 k ，那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$ 是解题的关键。

17. (3分) 甲、乙两名同学进行跳高测试，每人 10 次跳高的平均成绩恰好是 1.6 米，方差分别是 $S_{甲}^2 = 1.2$ ， $S_{乙}^2 = 0.5$ ，则在本次测试中，乙 同学的成绩更稳定 (填“甲”或“乙”)。

【分析】根据方差的意义可作出判断。方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越小，

表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定.

【解答】解：∵ $S_{甲}^2=1.2$ ， $S_{乙}^2=0.5$ ，

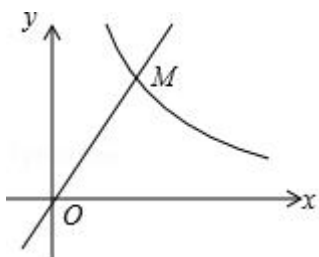
∴ $S_{甲} > S_{乙}$ ，

∴甲、乙两名同学成绩更稳定的是乙；

故答案为：乙.

【点评】本题考查方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定.

18. (3分) 如图，点M是函数 $y=\sqrt{3}x$ 与 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第一象限内的交点， $OM=4$ ，则k的值为 $4\sqrt{3}$.



【分析】作 $MN \perp x$ 轴于N，得出 $M(x, \sqrt{3}x)$ ，在 $Rt\triangle OMN$ 中，由勾股定理得出方程，解方程求出 $x=2$ ，得出 $M(2, 2\sqrt{3})$ ，即可求出k的值.

【解答】解：作 $MN \perp x$ 轴于N，如图所示：

设 $M(x, y)$ ，

∵点M是函数 $y=\sqrt{3}x$ 与 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第一象限内的交点，

∴ $M(x, \sqrt{3}x)$ ，

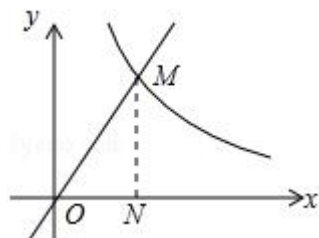
在 $Rt\triangle OMN$ 中，由勾股定理得： $x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 4^2$ ，

解得： $x=2$ ，

∴ $M(2, 2\sqrt{3})$ ，

代入 $y=\frac{k}{x}$ 得： $k=2 \times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ ；

故答案为： $4\sqrt{3}$.



【点评】本题考查了反比例函数与一次函数的图象得交点、勾股定理、反比例函数解析式的求法；求出点M的坐标是解决问题的关键.

三、解答题 (本大题共8小题，共66分)

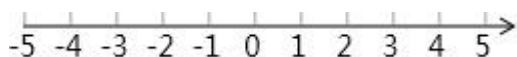
19. (6分) 计算: $|-3| + (\pi - 2017)^0 - 2\sin 30^\circ + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

【分析】原式利用绝对值的代数意义, 零指数幂、负整数指数幂法则, 以及特殊角的三角函数值计算即可得到结果.

【解答】解: 原式 $= 3 + 1 - 1 + 3 = 6$.

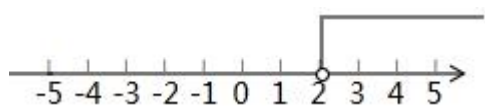
【点评】此题考查了实数的运算, 绝对值, 以及零指数幂、负整数指数幂, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (6分) 解不等式组 $\begin{cases} 2x \geq -9 - x \\ 5x - 1 > 3(x + 1) \end{cases}$, 并把它的解集在数轴上表示出来.



【分析】分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

【解答】解: 解不等式 $2x \geq -9 - x$, 得: $x \geq -3$,
解不等式 $5x - 1 > 3(x + 1)$, 得: $x > 2$,
则不等式组的解集为 $x > 2$,
将解集表示在数轴上如下:



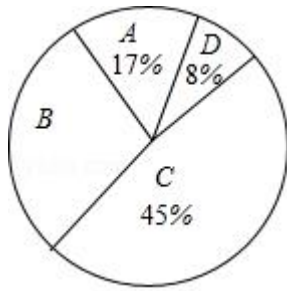
【点评】本题考查的是解一元一次不等式组, 正确求出每一个不等式解集是基础, 熟知“同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

21. (8分) 为了传承中华优秀传统文化, 市教育局决定开展“经典诵读进校园”活动, 某校团委组织八年级 100 名学生进行“经典诵读”选拔赛, 赛后对全体参赛学生的成绩进行整理, 得到下列不完整的统计图表.

组别	分数段	频次	频率
A	$60 \leq x < 70$	17	0.17
B	$70 \leq x < 80$	30	a
C	$80 \leq x < 90$	b	0.45
D	$90 \leq x < 100$	8	0.08

请根据所给信息, 解答下列问题:

- (1) 表中 $a = \underline{0.3}$, $b = \underline{45}$;
- (2) 请计算扇形统计图中 B 组对应扇形的圆心角的度数;
- (3) 已知有四名同学均取得 98 分的最好成绩, 其中包括来自同一班级的甲、乙两名同学, 学校将从这四名同学中随机选出两名参加市级比赛, 请用列表法或画树状图法求甲、乙两名同学都被选中的概率.



【分析】(1) 首先根据 A 组频数及其频率可得总人数，再利用频数、频率之间的关系求得 a、b；

(2) B 组的频率乘以 360° 即可求得答案；

(2) 列树形图后即可将所有情况全部列举出来，从而求得恰好抽中者两人的概率；

【解答】解：(1) 本次调查的总人数为 $17 \div 0.17 = 100$ (人)，

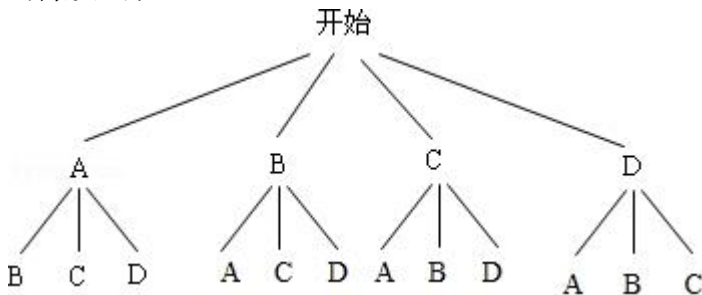
则 $a = \frac{30}{100} = 0.3$ ， $b = 100 \times 0.45 = 45$ (人)，

故答案为：0.3，45；

(2) $360^\circ \times 0.3 = 108^\circ$ ，

答：扇形统计图中 B 组对应扇形的圆心角为 108° ；

(3) 将同一班级的甲、乙学生记为 A、B，另外两学生记为 C、D，列树形图得：



$\therefore$ 共有 12 种等可能的情况，甲、乙两名同学都被选中的情况有 2 种，

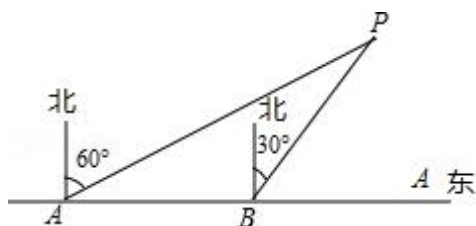
$\therefore$ 甲、乙两名同学都被选中的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

【点评】本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键。条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小。

22. (8 分) 为了维护国家主权和海洋权利，海监部门对我国领海实现了常态化巡航管理，如图，正在执行巡航任务的海监船以每小时 50 海里的速度向正东方航行，在 A 处测得灯塔 P 在北偏东 60° 方向上，继续航行 1 小时到达 B 处，此时测得灯塔 P 在北偏东 30° 方向上。

(1) 求 $\angle APB$ 的度数；

(2) 已知在灯塔 P 的周围 25 海里内有暗礁，问海监船继续向正东方向航行是否安全？



【分析】(1) 在 $\triangle ABP$ 中, 求出 $\angle PAB$ 、 $\angle PBA$ 的度数即可解决问题;

(2) 作 $PH \perp AB$ 于 H . 求出 PH 的值即可判定;

【解答】解: (1) $\because \angle PAB=30^\circ$, $\angle ABP=120^\circ$,
 $\therefore \angle APB=180^\circ - \angle PAB - \angle ABP=30^\circ$.

(2) 作 $PH \perp AB$ 于 H .

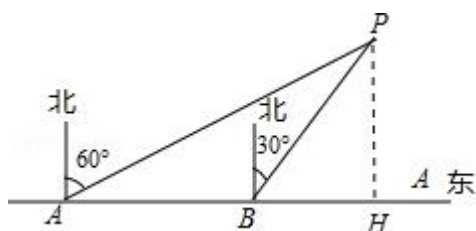
$\because \angle BAP=\angle BPA=30^\circ$,

$\therefore BA=BP=50$,

在 $Rt\triangle PBH$ 中, $PH=PB \cdot \sin 60^\circ = 50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$,

$\because 25\sqrt{3} > 25$,

$\therefore$ 海监船继续向正东方向航行是安全的.

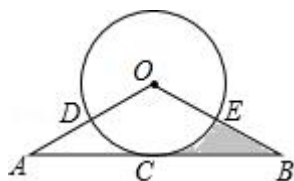


【点评】本题考查的是解直角三角形的应用-方向角问题, 正确根据题意画出图形、准确标注方向角、熟练掌握锐角三角函数的概念是解题的关键.

23. (9分) 如图, AB 与 $\odot O$ 相切于点 C , OA , OB 分别交 $\odot O$ 于点 D , E , $\widehat{CD}=\widehat{CE}$

(1) 求证: $OA=OB$;

(2) 已知 $AB=4\sqrt{3}$, $OA=4$, 求阴影部分的面积.



【分析】(1) 连接 OC , 由切线的性质可知 $\angle ACO=90^\circ$, 由于 $\widehat{CD}=\widehat{CE}$, 所以 $\angle AOC=\angle BOC$, 从而可证明 $\angle A=\angle B$, 从而可知 $OA=OB$;

(2) 由(1)可知: $\triangle AOB$ 是等腰三角形, 所以 $AC=2\sqrt{3}$, 从而可求出扇形 OCE 的面积以及 $\triangle OCB$ 的面积

【解答】解: (1) 连接 OC ,

$\because AB$ 与 $\odot O$ 相切于点 C

$\therefore \angle ACO=90^\circ$,

由于 $\widehat{CD} = \widehat{CE}$,

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC,$$

$$\therefore \angle A = \angle B$$

$$\therefore OA = OB,$$

(2) 由 (1) 可知: $\triangle OAB$ 是等腰三角形,

$$\therefore BC = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \sin \angle COB = \frac{BC}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle COB = 60^\circ,$$

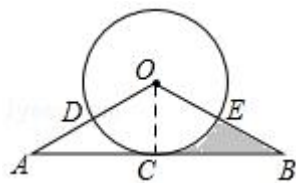
$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}OB = 2,$$

$$\therefore \text{扇形 OCE 的面积为: } \frac{60\pi \times 4}{360} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\triangle OCB \text{ 的面积为: } \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$



【点评】 本题考查切线的性质, 解题的关键是求证 $OA=OB$, 然后利用等腰三角形的三线合一性质求出 BC 与 OC 的长度, 从而可知扇形 OCE 与 $\triangle OCB$ 的面积, 本题属于中等题型.

24. (9分) 自从湖南与欧洲的“湘欧快线”开通后, 我省与欧洲各国经贸往来日益频繁, 某欧洲客商准备在湖南采购一批特色商品, 经调查, 用 16000 元采购 A 型商品的件数是用 7500 元采购 B 型商品的件数的 2 倍, 一件 A 型商品的进价比一件 B 型商品的进价多 10 元.

(1) 求一件 A, B 型商品的进价分别为多少元?

(2) 若该欧洲客商购进 A, B 型商品共 250 件进行试销, 其中 A 型商品的件数不大于 B 型的件数, 且不小于 80 件. 已知 A 型商品的售价为 240 元/件, B 型商品的售价为 220 元/件, 且全部售出. 设购进 A 型商品 m 件, 求该客商销售这批商品的利润 v 与 m 之间的函数关系式, 并写出 m 的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 欧洲客商决定在试销活动中每售出一件 A 型商品, 就从一件 A 型商品的利润中捐献慈善资金 a 元, 求该客商售完所有商品并捐献慈善资金后获得的最大收益.

【分析】 (1) 设一件 B 型商品的进价为 x 元, 则一件 A 型商品的进价为 $(x+10)$ 元. 根据 16000 元采购 A 型商品的件数是用 7500 元采购 B 型商品的件数的 2 倍, 列出方程即可解决问题;

(2) 根据总利润=两种商品的利润之和, 列出式子即可解决问题;

(3) 设利润为 w 元. 则 $w = (80 - a)m + 70(250 - m) = (10 - a)m + 17500$, 分三种情形讨论即可解决问题.

【解答】 解: (1) 设一件 B 型商品的进价为 x 元, 则一件 A 型商品的进价为 $(x+10)$ 元.

由题意: $\frac{16000 - 7500}{x+10} \times 2,$

解得 $x=150$,

经检验 $x=150$ 是分式方程的解,

答: 一件 B 型商品的进价为 150 元, 则一件 A 型商品的进价为 160 元.

(2) 因为客商购进 A 型商品 m 件, 所以客商购进 B 型商品 $(250 - m)$ 件.

由题意: $v=80m+70(250-m)=10m+17500$,

$\therefore 80 \leq m \leq 250 - m$,

$\therefore 80 \leq m \leq 125$,

(3) 设利润为 w 元. 则 $w = (80 - a)m + 70(250 - m) = (10 - a)m + 17500$,

①当 $10 - a > 0$ 时, w 随 m 的增大而增大, 所以 $m=125$ 时, 最大利润为 $(18750 - 125a)$ 元.

②当 $10 - a = 0$ 时, 最大利润为 17500 元.

③当 $10 - a < 0$ 时, w 随 m 的增大而减小, 所以 $m=80$ 时, 最大利润为 $(18300 - 80a)$ 元.

【点评】 本题考查分式方程的应用、一次函数的应用等知识, 解题的关键是理解题意, 学会构建方程或一次函数解决问题, 属于中考常考题型.

25. (10 分) 若三个非零实数 x, y, z 满足: 只要其中一个数的倒数等于另外两个数的倒数的和, 则称这三个实数 x, y, z 构成“和谐三组数”.

(1) 实数 1, 2, 3 可以构成“和谐三组数”吗? 请说明理由;

(2) 若 $M(t, y_1), N(t+1, y_2), R(t+3, y_3)$ 三点均在函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象上, 且这三点的纵坐标 y_1, y_2, y_3 构成“和谐三组数”, 求实数 t 的值;

象上, 且这三点的纵坐标 y_1, y_2, y_3 构成“和谐三组数”, 求实数 t 的值;

(3) 若直线 $y=2bx+2c$ ($bc \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(x_1, 0)$, 与抛物线 $y=ax^2+3bx+3c$ ($a \neq 0$) 交于 $B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 两点.

①求证: A, B, C 三点的横坐标 x_1, x_2, x_3 构成“和谐三组数”;

②若 $a > 2b > 3c$, $x_2=1$, 求点 $P(\frac{c}{a}, \frac{b}{a})$ 与原点 O 的距离 OP 的取值范围.

【分析】 (1) 由和谐三组数的定义进行验证即可;

(2) 把 M, N, R 三点的坐标分别代入反比例函数解析式, 可用 t 和 k 分别表示出 y_1, y_2, y_3 , 再由和谐三组数的定义可得到关于 t 的方程, 可求得 t 的值;

(3) ①由直线解析式可求得 $x_1 = -\frac{c}{b}$, 联立直线和抛物线解析式消去 y , 利用一元二次方程根与系数的关系可求得 $x_2+x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_2x_3 = \frac{c}{a}$, 再利用和谐三数组的定义证明即可; ②由条件

可得到 $a+b+c=0$, 可得 $c = -(a+b)$, 由 $a > 2b > 3c$ 可求得 $\frac{b}{a}$ 的取值范围, 令 $m = \frac{b}{a}$, 利用两点间距离公式可得到 OP^2 关于 m 的二次函数, 利用二次函数的性质可求得 OP^2 的取值范围, 从而可求得 OP 的取值范围.

【解答】 解:

(1) 不能, 理由如下:

$\because 1, 2, 3$ 的倒数分别为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$,

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1, 1 + \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 实数 $1, 2, 3$ 不可以构成“和谐三组数”;

(2) $\because M(t, y_1), N(t+1, y_2), R(t+3, y_3)$ 三点均在函数 $\frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象上,

$$\therefore y_1, y_2, y_3 \text{ 均不为 } 0, \text{ 且 } y_1 = \frac{k}{t}, y_2 = \frac{k}{t+1}, y_3 = \frac{k}{t+3},$$

$$\therefore \frac{1}{y_1} = \frac{t}{k}, \frac{1}{y_2} = \frac{t+1}{k}, \frac{1}{y_3} = \frac{t+3}{k},$$

$\because y_1, y_2, y_3$ 构成“和谐三组数”,

$\therefore$ 有以下三种情况:

$$\text{当 } \frac{1}{y_1} = \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} \text{ 时, 则 } \frac{t}{k} = \frac{t+1}{k} + \frac{t+3}{k}, \text{ 即 } t = t+1+t+3, \text{ 解得 } t = -4;$$

$$\text{当 } \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_3} \text{ 时, 则 } \frac{t+1}{k} = \frac{t}{k} + \frac{t+3}{k}, \text{ 即 } t+1 = t+t+3, \text{ 解得 } t = -2;$$

$$\text{当 } \frac{1}{y_3} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \text{ 时, 则 } \frac{t+3}{k} = \frac{t}{k} + \frac{t+1}{k}, \text{ 即 } t+3 = t+t+1, \text{ 解得 } t = 2;$$

$\therefore t$ 的值为 $-4, -2$ 或 2 ;

(3) ① $\because a, b, c$ 均不为 0 ,

$\therefore x_1, x_2, x_3$ 都不为 0 ,

$\because$ 直线 $y = 2bx + 2c$ ($bc \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(x_1, 0)$,

$$\therefore 0 = 2bx_1 + 2c, \text{ 解得 } x_1 = -\frac{c}{b},$$

联立直线与抛物线解析式, 消去 y 可得 $2bx + 2c = ax^2 + 3bx + 3c$, 即 $ax^2 + bx + c = 0$,

$\therefore$ 直线与抛物线交于 $B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 两点,

$\therefore x_2, x_3$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根,

$$\therefore x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, x_2 x_3 = \frac{c}{a},$$

$$\therefore \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2 + x_3}{x_2 x_3} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = \frac{1}{x_1},$$

$\therefore x_1, x_2, x_3$ 构成“和谐三组数”;

② $\because x_2 = 1$,

$$\therefore a + b + c = 0,$$

$$\therefore c = -a - b,$$

$$\therefore a > 2b > 3c,$$

$$\therefore a > 2b > 3(-a-b), \text{ 且 } a > 0, \text{ 整理可得 } \begin{cases} a > 2b \\ 5b > -3a \end{cases}, \text{ 解得 } -\frac{3}{5} < \frac{b}{a} < \frac{1}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{c}{a}, \frac{b}{a}\right)$$

$$\therefore OP^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{-a-b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\frac{b}{a} + 1 = 2\left(\frac{b}{a} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

$$\text{令 } m = \frac{b}{a}, \text{ 则 } -\frac{3}{5} < m < \frac{1}{2} \text{ 且 } m \neq 0, \text{ 且 } OP^2 = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

$$\therefore 2 > 0,$$

$$\therefore \text{当 } -\frac{3}{5} < m < -\frac{1}{2} \text{ 时, } OP^2 \text{ 随 } m \text{ 的增大而减小, 当 } m = -\frac{3}{5} \text{ 时, } OP^2 \text{ 有最大值 } \frac{26}{50}, \text{ 当 } m = -\frac{1}{2} \text{ 时, } OP^2 \text{ 有最小值 } \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \text{ 时, } OP^2 \text{ 随 } m \text{ 的增大而增大, 当 } m = -\frac{1}{2} \text{ 时, } OP^2 \text{ 有最小值 } \frac{1}{2}, \text{ 当 } m = \frac{1}{2} \text{ 时, } OP^2 \text{ 有最大值 } \frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq OP^2 < \frac{5}{2} \text{ 且 } OP^2 \neq 1,$$

$$\therefore P \text{ 到原点的距离为非负数,}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq OP < \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ 且 } OP \neq 1.$$

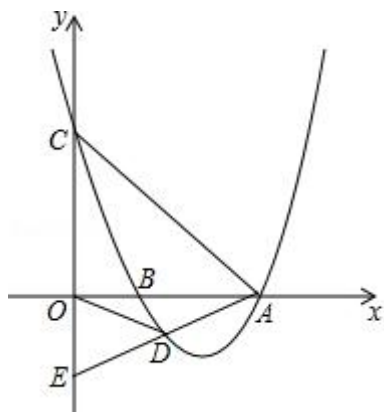
【点评】 本题为二次函数的综合应用，涉及新定义、函数图象的交点、一元二次方程根与系数的关系、勾股定理、二次函数的性质、分类讨论思想及转化思想等知识。在（1）中注意利用和谐三数组的定义，在（2）中由和谐三数组得到关于 t 的方程是解题的关键，在（3）①中用 a, b, c 分别表示出 x_1, x_2, x_3 是解题的关键，在（3）②中把 OP^2 表示成二次函数的形式是解题的关键。本题考查知识点较多，综合性较强，特别是最后一问，难度很大。

26. (10 分) 如图，抛物线 $y = mx^2 - 16mx + 48m$ ($m > 0$) 与 x 轴交于 A, B 两点（点 B 在点 A 左侧），与 y 轴交于点 C ，点 D 是抛物线上的一个动点，且位于第四象限，连接 OD, BD, AC, AD ，延长 AD 交 y 轴于点 E 。

(1) 若 $\triangle OAC$ 为等腰直角三角形，求 m 的值；

(2) 若对任意 $m > 0$ ， C, E 两点总关于原点对称，求点 D 的坐标（用含 m 的式子表示）；

(3) 当点 D 运动到某一位置时，恰好使得 $\angle ODB = \angle OAD$ ，且点 D 为线段 AE 的中点，此时对于该抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 总有 $n + \frac{1}{6} \geq -4\sqrt{3}my_0^2 - 12\sqrt{3}y_0 - 50$ 成立，求实数 n 的最小值。



【分析】(1) 根据 $y = mx^2 - 16mx + 48m$, 可得 $A(12, 0)$, $C(0, 48m)$, 再根据 $OA = OC$, 即可得到 $12 = 48m$, 进而得出 m 的值;

(2) 根据 C 、 E 两点总关于原点对称, 得到 $E(0, -48m)$, 根据 $E(0, -48m)$, $A(12, 0)$ 可得直线 AE 的解析式, 最后解方程组即可得到直线 AE 与抛物线的交点 D 的坐标;

(3) 根据 $\triangle ODB \sim \triangle OAD$, 可得 $OD = 4\sqrt{3}$, 进而得到 $D(6, -2\sqrt{3})$, 代入抛物线 $y = mx^2 - 16mx + 48m$, 可得抛物线解析式, 再根据点 $P(x_0, y_0)$ 为抛物线上任意一点, 即可得出 $y_0 \geq -\frac{8\sqrt{3}}{3}$, 令 $t = -2(y_0 + 3\sqrt{3})^2 + 4$, 可得 $t_{\text{最大值}} = -2(-\frac{8\sqrt{3}}{3} + 3\sqrt{3})^2 + 4 = \frac{10}{3}$, 再根据 $n + \frac{1}{6} \geq \frac{10}{3}$, 可得实数 n 的最小值为 $\frac{19}{6}$.

【解答】解: (1) 令 $y = mx^2 - 16mx + 48m = m(x-4)(x-12) = 0$, 则 $x_1 = 12$, $x_2 = 4$,
 $\therefore A(12, 0)$, 即 $OA = 12$,
 又 $\because C(0, 48m)$,
 $\therefore$ 当 $\triangle OAC$ 为等腰直角三角形时, $OA = OC$,
 即 $12 = 48m$,
 $\therefore m = \frac{1}{4}$;

(2) 由 (1) 可知点 $C(0, 48m)$,
 $\therefore$ 对任意 $m > 0$, C 、 E 两点总关于原点对称,
 $\therefore$ 必有 $E(0, -48m)$,
 设直线 AE 的解析式为 $y = kx + b$,
 将 $E(0, -48m)$, $A(12, 0)$ 代入, 可得

$$\begin{cases} 12k + b = 0 \\ b = -48m \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 4m \\ b = -48m \end{cases},$$

 $\therefore$ 直线 AE 的解析式为 $y = 4mx - 48m$,
 $\therefore$ 点 D 为直线 AE 与抛物线的交点,
 $\therefore$ 解方程组 $\begin{cases} y = m(x-4)(x-12) \\ y = 4mx - 48m \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} x = 8 \\ y = -16m \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \end{cases}$ (点 A 舍去),
 即点 D 的坐标为 $(8, -16m)$;

(3) 当 $\angle ODB = \angle OAD$, $\angle DOB = \angle AOD$ 时, $\triangle ODB \sim \triangle OAD$,
 $\therefore OD^2 = OA \times OB = 4 \times 12 = 48$,
 $\therefore OD = 4\sqrt{3}$.

又 $\because$ 点D为线段AE的中点,

$$\therefore AE=2OD=8\sqrt{3},$$

又 $\because OA=12,$

$$\therefore OE=\sqrt{AE^2-AO^2}=4\sqrt{3},$$

$$\therefore D(6, -2\sqrt{3}),$$

把D(6, $-2\sqrt{3}$)代入抛物线 $y=mx^2-16mx+48m$, 可得 $-2\sqrt{3}=36m-96m+48m$,

$$\text{解得 } m=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y=\frac{\sqrt{3}}{6}(x-4)(x-12),$$

$$\text{即 } y=\frac{\sqrt{3}}{6}(x-8)^2-\frac{8\sqrt{3}}{3},$$

$\because$ 点P(x_0, y_0)为抛物线上任意一点,

$$\therefore y_0 \geq -\frac{8\sqrt{3}}{3},$$

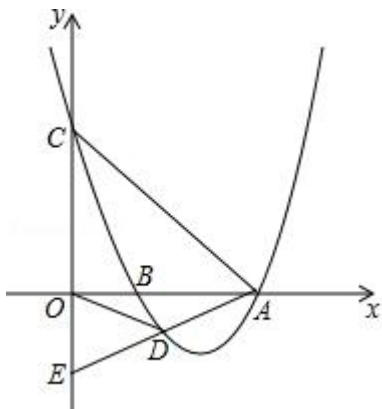
$$\text{令 } t=-4\sqrt{3}my_0^2-12\sqrt{3}y_0-50=-2y_0^2-12\sqrt{3}y_0-50=-2(y_0+3\sqrt{3})^2+4,$$

$$\text{则当 } y_0 \geq -\frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ 时, } t_{\text{最大值}}=-2(-\frac{8\sqrt{3}}{3}+3\sqrt{3})^2+4=\frac{10}{3},$$

$$\text{若要使 } n+\frac{1}{6} \geq -4\sqrt{3}my_0^2-12\sqrt{3}y_0-50 \text{ 成立, 则 } n+\frac{1}{6} \geq \frac{10}{3},$$

$$\therefore n \geq 3\frac{1}{6},$$

$$\therefore \text{实数 } n \text{ 的最小值为 } \frac{19}{6}.$$



【点评】 本题属于二次函数综合题, 主要考查了二次函数的最值, 等腰直角三角形的性质, 相似三角形的判定与性质以及待定系数法求直线解析式的综合应用, 解这类问题关键是善于将函数问题转化为方程问题, 善于利用几何图形的有关性质、定理和二次函数的知识, 并注意挖掘题目中的一些隐含条件.