

2017 年湖南省岳阳市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. (3 分) 6 的相反数是 ()

- A. -6 B. $\frac{1}{6}$ C. 6 D. ± 6

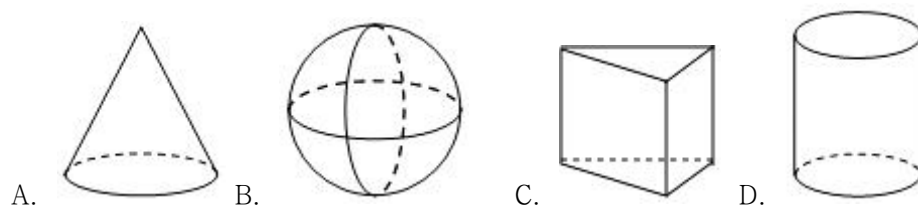
2. (3 分) 下列运算正确的是 ()

- A. $(x^3)^2 = x^5$ B. $(-x)^5 = -x^5$ C. $x^3 \cdot x^2 = x^6$ D. $3x^2 + 2x^3 = 5x^5$

3. (3 分) 据国土资源部数据显示，我国是全球“可燃冰”资源储量最多的国家之一，海、陆总储量约为 39000000000 吨油当量，将 39000000000 用科学记数法表示为 ()

- A. 3.9×10^{10} B. 3.9×10^9 C. 0.39×10^{11} D. 39×10^9

4. (3 分) 下列四个立体图形中，主视图、左视图、俯视图都相同的是 ()



5. (3 分) 从 $\sqrt{2}$, 0, π , 3.14, 6 这 5 个数中随机抽取一个数，抽到有理数的概率是 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

6. (3 分) 解分式方程 $\frac{2}{x-1} - \frac{2x}{x-1} = 1$ ，可知方程的解为 ()

- A. $x=1$ B. $x=3$ C. $x=\frac{1}{2}$ D. 无解

7. (3 分) 观察下列等式： $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$, $\dots$ ，根据这个规律，则 $2^1+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2017}$ 的末位数字是 ()

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 6

8. (3 分) 已知点 A 在函数 $y_1 = -\frac{1}{x}$ ($x > 0$) 的图象上，点 B 在直线 $y_2 = kx + 1 + k$ (k 为常数，且 $k \geq 0$) 上. 若 A, B 两点关于原点对称，则称点 A, B 为函数 y_1 , y_2 图象上的一对“友好点”. 请问这两个函数图象上的“友好点”对数的情况为 ()

- A. 有 1 对或 2 对 B. 只有 1 对 C. 只有 2 对 D. 有 2 对或 3 对

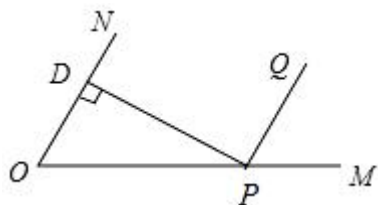
二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

9. (4 分) 函数 $y = \frac{1}{x-7}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

10. (4 分) 因式分解: $x^2 - 6x + 9 =$ _____.

11. (4 分) 在环保整治行动中, 某市环保局对辖区内的单位进行了抽样调查, 他们的综合得分如下: 95, 85, 83, 95, 92, 90, 96, 则这组数据的中位数是_____, 众数是_____.

12. (4 分) 如图, 点 P 是 $\angle NOM$ 的边 OM 上一点, $PD \perp ON$ 于点 D , $\angle OPD = 30^\circ$, $PQ \parallel ON$, 则 $\angle MPQ$ 的度数是_____.

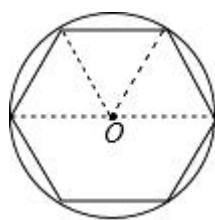


13. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 3(1-x) > 2(x+9) \end{cases}$ 的解集是_____.

14. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中 $BC=2$, $AB=2\sqrt{3}$, $AC=b$, 且关于 x 的方程 $x^2 - 4x + b = 0$ 有两个相等的实数根, 则 AC 边上的中线长为_____.

15. (4 分) 我国魏晋时期的数学家刘徽创立了“割圆术”, 认为圆内接正多边形边数无限增加时, 周长就越接近圆周长, 由此求得了圆周率 π 的近似值, 设半径为 r 的圆内接正 n 边形的周长为 L , 圆的直径为 d , 如图所示, 当 $n=6$ 时, $\pi \approx \frac{L}{d} = \frac{6r}{2r} = 3$, 那么当 $n=12$ 时, $\pi \approx$

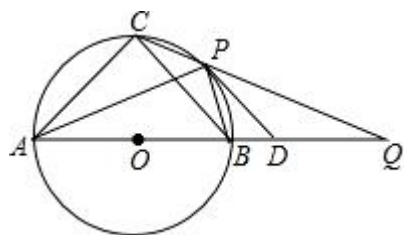
$\frac{L}{d} =$ _____. (结果精确到 0.01, 参考数据: $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ \approx 0.259$)



16. (4 分) 如图, $\odot O$ 为等腰 $\triangle ABC$ 的外接圆, 直径 $AB=12$, P 为弧 $\widehat{BC}$ 上任意一点 (不与 B, C 重合), 直线 CP 交 AB 延长线于点 Q , $\odot O$ 在点 P 处切线 PD 交 BQ 于点 D , 下列结论正确的是_____. (写出所有正确结论的序号)

①若 $\angle PAB = 30^\circ$, 则弧 $\widehat{BP}$ 的长为 π ; ②若 $PD \parallel BC$, 则 AP 平分 $\angle CAB$;

③若 $PB=BD$, 则 $PD=6\sqrt{3}$; ④无论点 P 在弧 $\widehat{BC}$ 上的位置如何变化, $CP \cdot CQ$ 为定值.



三、解答题（本大题共 8 小题，共 64 分）

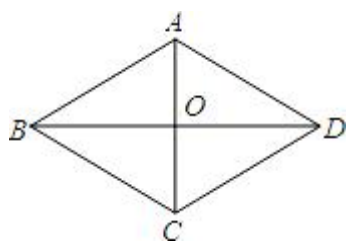
17. (6 分) 计算: $2\sin 60^\circ + |3 - \sqrt{3}| + (\pi - 2)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

18. (6 分) 求证: 对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

小红同学根据题意画出了图形, 并写出了已知和求证的一部分, 请你补全已知和求证, 并写出证明过程.

已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 交于点 O, _____.

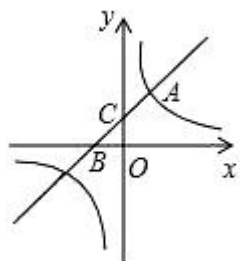
求证: _____.



19. (8分) 如图, 直线 $y=x+b$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 在第一象限内交于点 $A(1, 2)$, 且与 x 轴、 y 轴分别交于 B , C 两点.

(1) 求直线和双曲线的解析式;

(2) 点 P 在 x 轴上, 且 $\triangle BCP$ 的面积等于 2, 求 P 点的坐标.



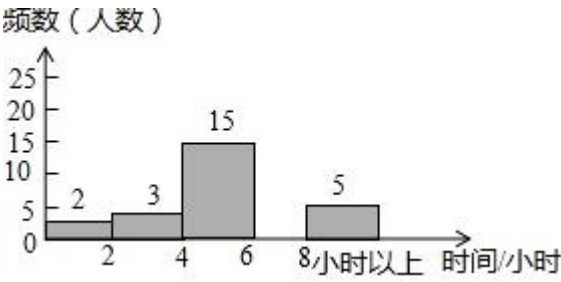
20. (8分) 我市某校组织爱心捐书活动, 准备将一批捐赠的书打包寄往贫困地区, 其中每包书的数目相等. 第一次他们领来这批书的 $\frac{2}{3}$, 结果打了 16 个包还多 40 本; 第二次他们把剩下的书全部取来, 连同第一次打包剩下的书一起, 刚好又打了 9 个包, 那么这批书共有多少本?

21. (8分) 为了加强学生课外阅读, 开阔视野, 某校开展了“书香校园, 从我做起”的主题活动, 学校随机抽取了部分学生, 对他们一周的课外阅读时间进行调查, 绘制出频数分布表和频数分布直方图的一部分如下:

课外阅读时间 (单位: 小时)	频数 (人数)	频率
$0 < t \leq 2$	2	0.04
$2 < t \leq 4$	3	0.06
$4 < t \leq 6$	15	0.30
$6 < t \leq 8$	a	0.50
$t > 8$	5	b

请根据图表信息回答下列问题:

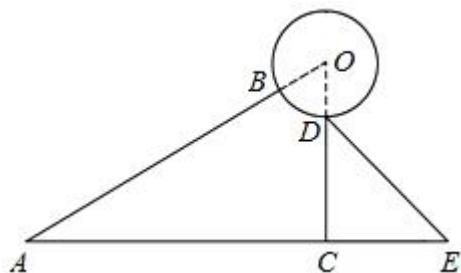
- (1) 频数分布表中的 $a=$ _____, $b=$ _____;
- (2) 将频数分布直方图补充完整;
- (3) 学校将每周课外阅读时间在 8 小时以上的学生评为“阅读之星”, 请你估计该校 2000 名学生中评为“阅读之星”的有多少人?



22. (8 分) 某太阳能热水器的横截面示意图如图所示, 已知真空热水管 AB 与支架 CD 所在直线相交于点 O , 且 $OB=OD$, 支架 CD 与水平线 AE 垂直, $\angle BAC=\angle CDE=30^\circ$, $DE=80\text{cm}$, $AC=165\text{cm}$.

(1) 求支架 CD 的长;

(2) 求真空热水管 AB 的长. (结果保留根号)



23. (10 分) 问题背景: 已知 $\angle EDF$ 的顶点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 所在直线上 (不与 A, B 重合), DE 交 AC 所在直线于点 M , DF 交 BC 所在直线于点 N , 记 $\triangle ADM$ 的面积为 S_1 , $\triangle BND$ 的面积为 S_2 .

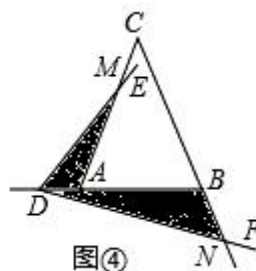
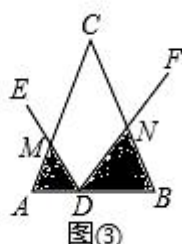
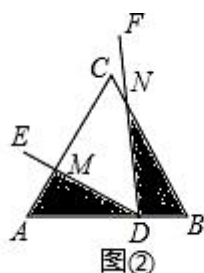
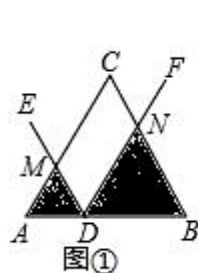
(1) 初步尝试: 如图①, 当 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB=6$, $\angle EDF=\angle A$, 且 $DE \parallel BC$, $AD=2$ 时, 则 $S_1 \cdot S_2 =$ _____;

(2) 类比探究: 在 (1) 的条件下, 先将点 D 沿 AB 平移, 使 $AD=4$, 再将 $\angle EDF$ 绕点 D 旋转至如图②所示位置, 求 $S_1 \cdot S_2$ 的值;

(3) 延伸拓展: 当 $\triangle ABC$ 是等腰三角形时, 设 $\angle B=\angle A=\angle EDF=\alpha$.

(I) 如图③, 当点 D 在线段 AB 上运动时, 设 $AD=a$, $BD=b$, 求 $S_1 \cdot S_2$ 的表达式 (结果用 a , b 和 α 的三角函数表示).

(II) 如图④, 当点 D 在 BA 的延长线上运动时, 设 $AD=a$, $BD=b$, 直接写出 $S_1 \cdot S_2$ 的表达式, 不必写出解答过程.

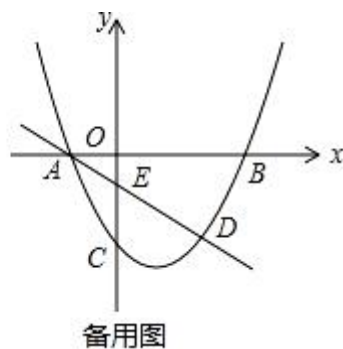
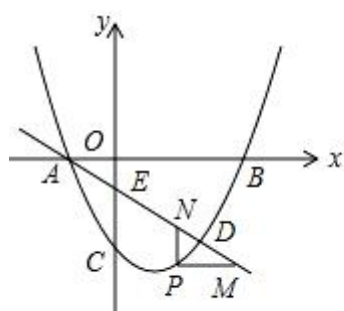


24. (10 分) 如图, 抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 B (3, 0), C (0, -2), 直线 $l: y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ 交 y 轴于点 E, 且与抛物线交于 A, D 两点, P 为抛物线上一动点 (不与 A, D 重合).

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 当点 P 在直线 l 下方时, 过点 P 作 $PM \parallel x$ 轴交 l 于点 M, $PN \parallel y$ 轴交 l 于点 N, 求 $PM + PN$ 的最大值.

(3) 设 F 为直线 l 上的点, 以 E, C, P, F 为顶点的四边形能否构成平行四边形? 若能, 求出点 F 的坐标; 若不能, 请说明理由.



2017 年湖南省岳阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. (3 分) (2017•岳阳) 6 的相反数是 ()

- A. -6 B. $\frac{1}{6}$ C. 6 D. ± 6

【考点】14: 相反数.

【分析】根据相反数的定义求解即可.

【解答】解: 6 的相反数是 -6,
故选 A.

2. (3 分) (2017•岳阳) 下列运算正确的是 ()

- A. $(x^3)^2 = x^5$ B. $(-x)^5 = -x^5$ C. $x^3 \cdot x^2 = x^6$ D. $3x^2 + 2x^3 = 5x^5$

【考点】47: 幂的乘方与积的乘方; 35: 合并同类项; 46: 同底数幂的乘法.

【分析】根据幂的乘方, 同底数幂的乘法以及合并同类项计算法则进行解答.

【解答】解: A、原式 $= x^6$, 故本选项错误;

B、原式 $= -x^5$, 故本选项正确;

C、原式 $= x^5$, 故本选项错误;

D、 $3x^2$ 与 $2x^3$ 不是同类项, 不能合并, 故本选项错误;

故选: B.

3. (3 分) (2017•岳阳) 据国土资源部数据显示, 我国是全球“可燃冰”资源储量最多的国家之一, 海、陆总储量约为 39000000000 吨油当量, 将 39000000000 用科学记数法表示为 ()

- A. 3.9×10^{10} B. 3.9×10^9 C. 0.39×10^{11} D. 39×10^9

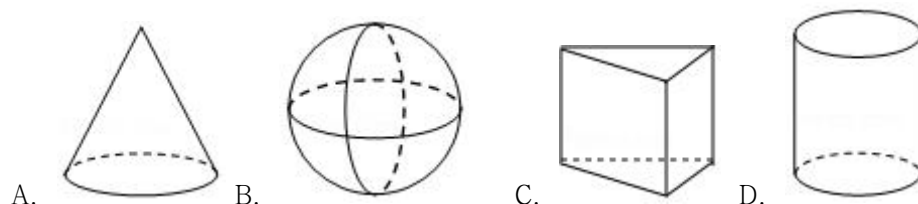
【考点】11: 科学记数法—表示较大的数.

【分析】用科学记数法表示较大的数时, 一般形式为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 据此判断即可.

【解答】解: $39000000000 = 3.9 \times 10^{10}$.

故选: A.

4. (3 分) (2017•岳阳) 下列四个立体图形中, 主视图、左视图、俯视图都相同的是 ()



【考点】U1: 简单几何体的三视图.

【分析】分别分析圆锥、圆柱、球体、三棱柱的主视图、左视图、俯视图, 从而得出结论.

【解答】解: $\because$ 球的主视图、左视图、俯视图都是圆,

∴主视图、左视图、俯视图都相同的是 B,
故选 B.

5. (3分) (2017•岳阳) 从 $\sqrt{2}$, 0, π , 3.14, 6 这 5 个数中随机抽取一个数, 抽到有理数的概率是 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【考点】X4: 概率公式; 12: 有理数.

【分析】根据有理数的定义可找出在 $\sqrt{2}$, 0, π , 3.14, 6 这 5 个数中只有 0、3.14 和 6 为有理数, 再根据概率公式即可求出抽到有理数的概率.

【解答】解: ∵在 $\sqrt{2}$, 0, π , 3.14, 6 这 5 个数中只有 0、3.14 和 6 为有理数,
∴从 $\sqrt{2}$, 0, π , 3.14, 6 这 5 个数中随机抽取一个数, 抽到有理数的概率是 $\frac{3}{5}$.

故选 C.

6. (3分) (2017•岳阳) 解分式方程 $\frac{2}{x-1} - \frac{2x}{x-1} = 1$, 可知方程的解为 ()

- A. $x=1$ B. $x=3$ C. $x=\frac{1}{2}$ D. 无解

【考点】B3: 解分式方程.

【分析】直接利用分式方程的解法, 首先去分母, 进而解方程得出答案.

【解答】解: 去分母得:

$$2 - 2x = x - 1,$$

解得: $x=1$,

检验: 当 $x=1$ 时, $x-1=0$, 故此方程无解.

故选: D.

7. (3分) (2017•岳阳) 观察下列等式: $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$, $\dots$, 根据这个规律, 则 $2^1+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2017}$ 的末位数字是 ()

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 6

【考点】1Q: 尾数特征.

【分析】根据题目中的式子可以知道, 末尾数字出现的 2、4、8、6 的顺序出现, 从而可以求得 $2^1+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2017}$ 的末位数字. 本题得以解决.

【解答】解: ∵ $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$, $\dots$,

$$\therefore 2017 \div 4 = 506 \dots 1,$$

$$\therefore (2+4+8+6) \times 506 + 2 = 10122,$$

$$\therefore 2^1+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2017} \text{ 的末位数字是 } 2,$$

故选 B.

8. (3分) (2017•岳阳) 已知点 A 在函数 $y_1 = -\frac{1}{x}$ ($x > 0$) 的图象上, 点 B 在直线 $y_2 = kx + 1 + k$

(k 为常数, 且 $k \geq 0$) 上. 若 A, B 两点关于原点对称, 则称点 A, B 为函数 y_1 , y_2 图象上的一对“友好点”. 请问这两个函数图象上的“友好点”对数的情况为 ()

A. 有 1 对或 2 对 B. 只有 1 对 C. 只有 2 对 D. 有 2 对或 3 对

【考点】G6: 反比例函数图象上点的坐标特征; F8: 一次函数图象上点的坐标特征; R6: 关于原点对称的点的坐标.

【分析】根据“友好点”的定义知, 函数 y_1 图象上点 $A(a, -\frac{1}{a})$ 关于原点的对称点 $B(a, -\frac{1}{a})$ 一定位于直线 y_2 上, 即方程 $ka^2 - (k+1)a + 1 = 0$ 有解, 整理方程得 $(a-1)(ka-1) = 0$, 据此可得答案.

【解答】解: 设 $A(a, -\frac{1}{a})$,

由题意知, 点 A 关于原点的对称点 $B((a, -\frac{1}{a}),)$ 在直线 $y_2 = kx + 1 + k$ 上,

则 $-\frac{1}{a} = -ak + 1 + k$,

整理, 得: $ka^2 - (k+1)a + 1 = 0$ ①,

即 $(a-1)(ka-1) = 0$,

$\therefore a-1=0$ 或 $ka-1=0$,

则 $a=1$ 或 $ka-1=0$,

若 $k=0$, 则 $a=1$, 此时方程①只有 1 个实数根, 即两个函数图象上的“友好点”只有 1 对;

若 $k \neq 0$, 则 $a = \frac{1}{k}$, 此时方程①有 2 个实数根, 即两个函数图象上的“友好点”有 2 对,

综上, 这两个函数图象上的“友好点”对数情况为 1 对或 2 对,

故选: A.

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

9. (4 分) (2017•岳阳) 函数 $y = \frac{1}{x-7}$ 中自变量 x 的取值范围是 $x \neq 7$.

【考点】E4: 函数自变量的取值范围.

【分析】根据分母不为零, 即可解决问题.

【解答】解: 函数 $y = \frac{1}{x-7}$ 中自变量 x 的范围是 $x \neq 7$.

故答案为 $x \neq 7$

10. (4 分) (2017•岳阳) 因式分解: $x^2 - 6x + 9 = \underline{(x-3)^2}$.

【考点】54: 因式分解 - 运用公式法.

【分析】直接运用完全平方公式进行因式分解即可.

【解答】解: $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

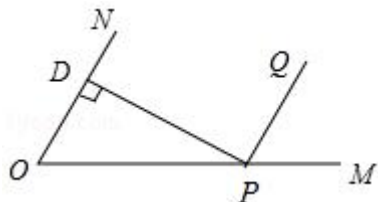
11. (4 分) (2017•岳阳) 在环保整治行动中, 某市环保局对辖区内的单位进行了抽样调查, 他们的综合得分如下: 95, 85, 83, 95, 92, 90, 96, 则这组数据的中位数是 92, 众数是 95.

【考点】W5: 众数; W4: 中位数.

【分析】环保整治行动中, 某市环保局对辖区内的单位进行了抽样调查, 他们的综合得分如下: 95, 85, 83, 95, 92, 90, 96, 则这组数据的中位数.

【解答】解：这组数据从小到大排列为：83，85，90，92，95，95，96．则中位数是：92；众数是95．故答案是：92，95．

12. (4分) (2017•岳阳) 如图，点P是 $\angle NOM$ 的边OM上一点， $PD \perp ON$ 于点D， $\angle OPD = 30^\circ$ ， $PQ \parallel ON$ ，则 $\angle MPQ$ 的度数是 60° ．



【考点】JA：平行线的性质；J3：垂线．

【分析】根据直角三角形的内角和，求得 $\angle O$ ，再根据平行线的性质，即可得到 $\angle MPQ$ ．

【解答】解： $\because PD \perp ON$ 于点D， $\angle OPD = 30^\circ$ ，

$\therefore$ Rt $\triangle OPD$ 中， $\angle O = 60^\circ$ ，

又 $\because PQ \parallel ON$ ，

$\therefore \angle MPQ = \angle O = 60^\circ$ ，

故答案为： 60° ．

13. (4分) (2017•岳阳) 不等式组 $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 3(1-x) > 2(x+9) \end{cases}$ 的解集是 $x < -3$ ．

【考点】CB：解一元一次不等式组．

【分析】先求出每个不等式的解集，再求出不等式组的解集即可．

【解答】解： $\begin{cases} 3-x \geq 0 \text{ ①} \\ 3(1-x) > 2(x+9) \text{ ②} \end{cases}$

$\therefore$ 解不等式①得： $x \leq 3$ ，

解不等式②得： $x < -3$ ，

$\therefore$ 不等式组的解集为 $x < -3$ ，

故答案为： $x < -3$ ．

14. (4分) (2017•岳阳) 在 $\triangle ABC$ 中 $BC=2$ ， $AB=2\sqrt{3}$ ， $AC=b$ ，且关于 x 的方程 $x^2 - 4x + b = 0$ 有两个相等的实数根，则 AC 边上的中线长为 2．

【考点】AA：根的判别式；KP：直角三角形斜边上的中线；KS：勾股定理的逆定理．

【分析】由根的判别式求出 $AC=b=4$ ，由勾股定理的逆定理证出 $\triangle ABC$ 是直角三角形，再由直角三角形斜边上的中线性质的性质即可得出结论．

【解答】解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 4x + b = 0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta = 16 - 4b = 0$ ，

$\therefore AC = b = 4$ ，

$\because BC = 2$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ，

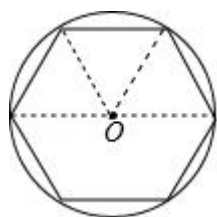
$\therefore BC^2 + AB^2 = AC^2$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形， AC 是斜边，

$\therefore AC$ 边上的中线长 $= \frac{1}{2}AC = 2$ ；

故答案为：2.

15. (4分) (2017•岳阳) 我国魏晋时期的数学家刘徽创立了“割圆术”，认为圆内接正多边形边数无限增加时，周长就越接近圆周长，由此求得了圆周率 π 的近似值，设半径为 r 的圆内接正 n 边形的周长为 L ，圆的直径为 d ，如图所示，当 $n=6$ 时， $\pi \approx \frac{L}{d} = \frac{6r}{2r} = 3$ ，那么当 $n=12$ 时， $\pi \approx \frac{L}{d} = \underline{3.10}$. (结果精确到0.01，参考数据： $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ \approx 0.259$)



【考点】MM：正多边形和圆；T7：解直角三角形.

【分析】圆的内接正十二边形被半径分成顶角为 30° 的十二个等腰三角形，作辅助线构造直角三角形，根据中心角的度数以及半径的大小，求得 $L=6.207r$ ， $d=2r$ ，进而得到 $\pi \approx \frac{L}{d} = \frac{6.207r}{2r} \approx 3.10$.

【解答】解：如图，圆的内接正十二边形被半径分成如图所示的十二个等腰三角形，其顶角为 30° ，即 $\angle O=30^\circ$ ， $\angle ABO=\angle A=75^\circ$ ，作 $BC \perp AO$ 于点 C ，则 $\angle ABC=15^\circ$ ，

$$\because AO=BO=r,$$

$$\therefore BC=\frac{1}{2}r, \quad OC=\frac{1}{2}\sqrt{3}r,$$

$$\therefore AC=(1-\frac{1}{2}\sqrt{3})r,$$

$$\because \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \cos A = \frac{AC}{AB},$$

$$\text{即 } 0.259 = \frac{(1-\frac{1}{2}\sqrt{3})r}{AB},$$

$$\therefore AB \approx 0.517r,$$

$$\therefore L=12 \times 0.517r=6.207r,$$

$$\text{又 } \because d=2r,$$

$$\therefore \pi \approx \frac{L}{d} = \frac{6.207r}{2r} \approx 3.10,$$

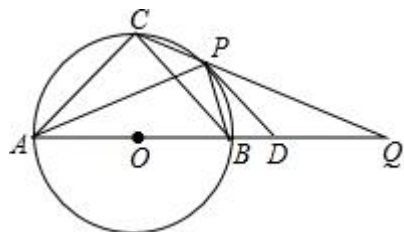
故答案为：3.10



16. (4分) (2017•岳阳) 如图, $\odot O$ 为等腰 $\triangle ABC$ 的外接圆, 直径 $AB=12$, P 为弧 $\widehat{BC}$ 上任意一点 (不与 B, C 重合), 直线 CP 交 AB 延长线于点 Q , $\odot O$ 在点 P 处切线 PD 交 BQ 于点 D , 下列结论正确的是 ②③④. (写出所有正确结论的序号)

①若 $\angle PAB=30^\circ$, 则弧 $\widehat{BP}$ 的长为 π ; ②若 $PD \parallel BC$, 则 AP 平分 $\angle CAB$;

③若 $PB=BD$, 则 $PD=6\sqrt{3}$; ④无论点 P 在弧 $\widehat{BC}$ 上的位置如何变化, $CP \cdot CQ$ 为定值.



【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质; KH: 等腰三角形的性质; MC: 切线的性质; MN: 弧长的计算.

【分析】 ①根据 $\angle POB=60^\circ$, $OB=6$, 即可求得弧 $\widehat{BP}$ 的长; ②根据切线的性质以及垂径定理, 即可得到 $\widehat{CP}=\widehat{BP}$, 据此可得 AP 平分 $\angle CAB$; ③根据 $BP=BO=PO=6$, 可得 $\triangle BOP$ 是等边三角形, 据此即可得出 $PD=6\sqrt{3}$; ④判定 $\triangle ACP \sim \triangle QCA$, 即可得到 $\frac{CP}{CA} = \frac{CA}{CQ}$, 即 $CP \cdot CQ = CA^2$, 据此可得 $CP \cdot CQ$ 为定值.

【解答】 解: 如图, 连接 OP ,

$\because AO=OP$, $\angle PAB=30^\circ$,

$\therefore \angle POB=60^\circ$,

$\because AB=12$,

$\therefore OB=6$,

$\therefore$ 弧 $\widehat{BP}$ 的长为 $\frac{60 \times \pi \times 6}{180} = 2\pi$, 故①错误;

$\because PD$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OP \perp PD$,

$\because PD \parallel BC$,

$$\therefore \widehat{CP} = \widehat{BP},$$

$\therefore AP$ 平分 $\angle CAB$, 故②正确;

$$\therefore OP \perp PD,$$
$$\therefore \angle \text{BOP} = \angle \text{BPO},$$
$$\therefore PD = \sqrt{3}OP = 6\sqrt{3}, \text{ 故③正确;}$$
$$\therefore \angle BAC = \angle ABC,$$
$$\therefore \angle APC = \angle BAC,$$
$$\therefore \Delta ACP \sim \Delta QCA,$$

$\therefore \frac{CP}{CA} = \frac{CA}{CQ}$, 即 $CP \cdot CQ = CA^2$ (定值), 故④正确;

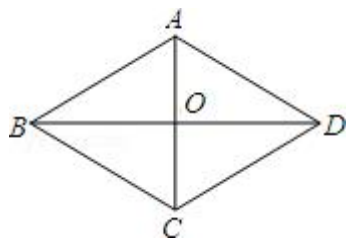
17. (6分) (2017•岳阳) 计算: $2\sin 60^\circ + |3 - \sqrt{3}| + (\pi - 2)^0 - (\frac{1}{2})^{-1}$.

【分析】根据特殊角的三角函数值、零指数幂的运算法则、负整数指数幂的运算法则、绝对值的性质进行化简，计算即可.

【解答】解: 原式 $=2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 - \sqrt{3} + 1 - 2$
 $=2$.

小红同学根据题意画出了图形，并写出了已知和求证的一部分，请你补全已知和求证，并写出证明过程.

求证: 四边形 ABCD 是菱形.



【考点】L9: 菱形的判定; L5: 平行四边形的性质.

【分析】由命题的题设和结论可填出答案, 由平行四边形的性质可证得 AC 为线段 BD 的垂直平分线, 可求得 $AB=AD$, 可得四边形 ABCD 是菱形.

【解答】已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 交于点 O, $AC \perp BD$,
求证: 四边形 ABCD 是菱形.

证明:

$\because$ 四边形 ABCD 为平行四边形,

$\therefore BO=DO$,

$\because AC \perp BD$,

$\therefore AC$ 垂直平分 BD,

$\therefore AB=AD$,

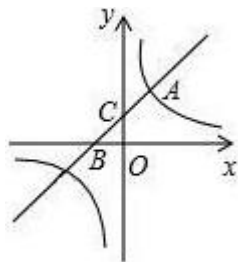
$\therefore$ 四边形 ABCD 为菱形.

故答案为: $AC \perp BD$; 四边形 ABCD 是菱形.

19. (8 分) (2017•岳阳) 如图, 直线 $y=x+b$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 在第一象限内交于点 A (1, 2), 且与 x 轴、y 轴分别交于 B, C 两点.

(1) 求直线和双曲线的解析式;

(2) 点 P 在 x 轴上, 且 $\triangle BCP$ 的面积等于 2, 求 P 点的坐标.



【考点】G8: 反比例函数与一次函数的交点问题.

【分析】(1) 把 A (1, 2) 代入双曲线以及直线 $y=x+b$, 分别可得 k , b 的值;

(2) 先根据直线解析式得到 $BO=CO=1$, 再根据 $\triangle BCP$ 的面积等于 2, 即可得到 P 的坐标.

【解答】解: (1) 把 A (1, 2) 代入双曲线 $y=\frac{k}{x}$, 可得 $k=2$,

$\therefore$ 双曲线的解析式为 $y=\frac{2}{x}$;

把 A (1, 2) 代入直线 $y=x+b$, 可得 $b=1$,

$\therefore$ 直线的解析式为 $y=x+1$;

(2) 设 P 点的坐标为 $(x, 0)$,

在 $y=x+1$ 中, 令 $y=0$, 则 $x=-1$; 令 $x=0$, 则 $y=1$,

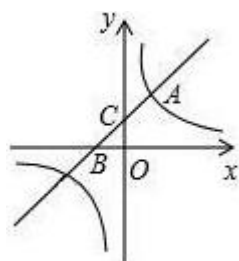
∴ B (- 1, 0), C (0, 1), 即 BO=1=CO,

∴ △BCP 的面积等于 2,

$$\therefore \frac{1}{2}BP \times CO=2, \text{ 即 } \frac{1}{2}|x - (-1)| \times 1=2,$$

解得 $x=3$ 或 -5 ,

∴ P 点的坐标为 (3, 0) 或 (- 5, 0).



20. (8 分) (2017•岳阳) 我市某校组织爱心捐书活动, 准备将一批捐赠的书打包寄往贫困地区, 其中每包书的数目相等. 第一次他们领来这批书的 $\frac{2}{3}$, 结果打了 16 个包还多 40 本; 第二次他们把剩下的书全部取来, 连同第一次打包剩下的书一起, 刚好又打了 9 个包, 那么这批书共有多少本?

【考点】8A: 一元一次方程的应用.

【分析】设这批书共有 $3x$ 本, 根据每包书的数目相等. 即可得出关于 x 的一元一次方程, 解之即可得出结论.

【解答】解: 设这批书共有 $3x$ 本,

$$\text{根据题意得: } \frac{2x-40}{16} = \frac{x+40}{9},$$

解得: $x=500$,

$$\therefore 3x=1500.$$

答: 这批书共有 500 本.

21. (8 分) (2017•岳阳) 为了加强学生课外阅读, 开阔视野, 某校开展了“书香校园, 从我做起”的主题活动, 学校随机抽取了部分学生, 对他们一周的课外阅读时间进行调查, 绘制出频数分布表和频数分布直方图的一部分如下:

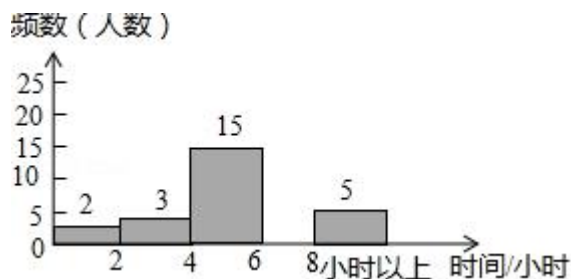
课外阅读时间 (单位: 小时)	频数 (人数)	频率
$0 < t \leq 2$	2	0.04
$2 < t \leq 4$	3	0.06
$4 < t \leq 6$	15	0.30
$6 < t \leq 8$	a	0.50
$t > 8$	5	b

请根据图表信息回答下列问题:

(1) 频数分布表中的 $a=25$, $b=0.10$;

(2) 将频数分布直方图补充完整;

(3) 学校将每周课外阅读时间在 8 小时以上的学生评为“阅读之星”, 请你估计该校 2000 名学生中评为“阅读之星”的有多少人?



【考点】 V8: 频数(率)分布直方图; V5: 用样本估计总体; V7: 频数(率)分布表.

【分析】 (1) 由阅读时间为 $0 < t \leq 2$ 的频数除以频率求出总人数, 确定出 a 与 b 的值即可;

(2) 补全条形统计图即可;

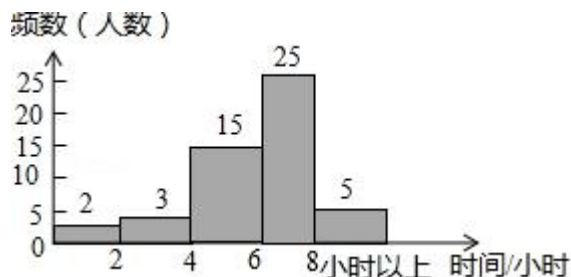
(3) 由阅读时间在 8 小时以上的百分比乘以 2000 即可得到结果.

【解答】 解: (1) 根据题意得: $2 \div 0.04 = 50$ (人),

则 $a = 50 - (2 + 3 + 15 + 5) = 25$; $b = 5 \div 50 = 0.10$;

故答案为: 25; 0.10;

(2) 阅读时间为 $6 < t \leq 8$ 的学生有 25 人, 补全条形统计图, 如图所示:



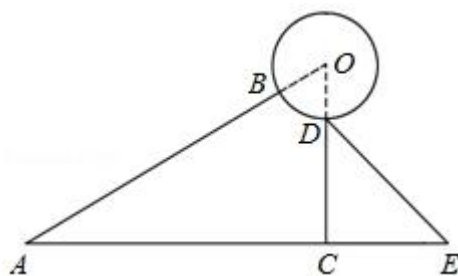
(3) 根据题意得: $2000 \times 0.10 = 200$ (人),

则该校 2000 名学生中评为“阅读之星”的有 200 人.

22. (8 分) (2017•岳阳) 某太阳能热水器的横截面示意图如图所示, 已知真空热水管 AB 与支架 CD 所在直线相交于点 O , 且 $OB = OD$, 支架 CD 与水平线 AE 垂直, $\angle BAC = \angle CDE = 30^\circ$, $DE = 80\text{cm}$, $AC = 165\text{cm}$.

(1) 求支架 CD 的长;

(2) 求真空热水管 AB 的长. (结果保留根号)



【考点】 T8: 解直角三角形的应用.

【分析】 (1) 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, 根据 $\angle CDE = 30^\circ$, $DE = 80\text{cm}$, 求出支架 CD 的长是多少即可.

(2) 首先在 $\text{Rt}\triangle OAC$ 中, 根据 $\angle BAC = 30^\circ$, $AC = 165\text{cm}$, 求出 OC 的长是多少, 进而求出 OD 的长是多少; 然后求出 OA 的长是多少, 即可求出真空热水管 AB 的长是多少.

【解答】 解: (1) 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, $\angle CDE = 30^\circ$, $DE = 80\text{cm}$,

$$\therefore CD = 80 \times \cos 30^\circ = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

(2) 在 $\text{Rt}\triangle OAC$ 中, $\angle BAC = 30^\circ$, $AC = 165\text{cm}$,

$$\therefore OC = AC \times \tan 30^\circ = 165 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 55\sqrt{3} \text{ (cm)},$$

$$\therefore OD = OC - CD = 55\sqrt{3} - 40\sqrt{3} = 15\sqrt{3} \text{ (cm)},$$

$$\therefore AB = AO - OB = AO - OD = 55\sqrt{3} \times 2 - 15\sqrt{3} = 95\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

23. (10分) (2017·岳阳) 问题背景: 已知 $\angle EDF$ 的顶点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 所在直线上 (不与 A, B 重合), DE 交 AC 所在直线于点 M , DF 交 BC 所在直线于点 N , 记 $\triangle ADM$ 的面积为 S_1 , $\triangle BDN$ 的面积为 S_2 .

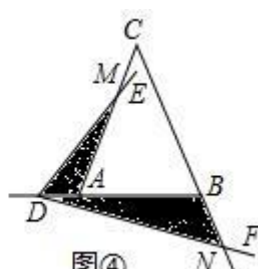
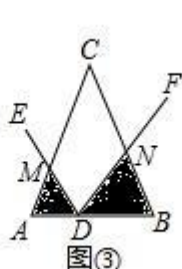
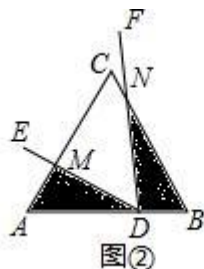
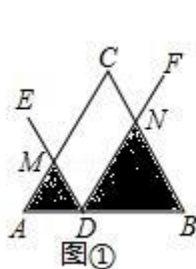
(1) 初步尝试: 如图①, 当 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB = 6$, $\angle EDF = \angle A$, 且 $DE \parallel BC$, $AD = 2$ 时, 则 $S_1 \cdot S_2 = \underline{12}$;

(2) 类比探究: 在 (1) 的条件下, 先将点 D 沿 AB 平移, 使 $AD = 4$, 再将 $\angle EDF$ 绕点 D 旋转至如图②所示位置, 求 $S_1 \cdot S_2$ 的值;

(3) 延伸拓展: 当 $\triangle ABC$ 是等腰三角形时, 设 $\angle B = \angle A = \angle EDF = \alpha$.

(I) 如图③, 当点 D 在线段 AB 上运动时, 设 $AD = a$, $BD = b$, 求 $S_1 \cdot S_2$ 的表达式 (结果用 a, b 和 α 的三角函数表示).

(II) 如图④, 当点 D 在 BA 的延长线上运动时, 设 $AD = a$, $BD = b$, 直接写出 $S_1 \cdot S_2$ 的表达式, 不必写出解答过程.



【考点】 RB: 几何变换综合题.

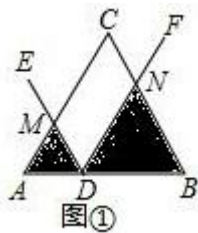
【分析】 (1) 首先证明 $\triangle ADM$, $\triangle BDN$ 都是等边三角形, 可得 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$, $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 4\sqrt{3}$, 由此即可解决问题;

(2) 如图 2 中, 设 $AM = x$, $BN = y$. 首先证明 $\triangle AMD \sim \triangle BDN$, 可得 $\frac{AM}{BD} = \frac{AD}{BN}$, 推出 $\frac{x}{2} = \frac{4}{y}$, 推出 $xy = 8$, 由 $S_1 = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AM \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $S_2 = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}y$, 可得 $S_1 \cdot S_2 = \sqrt{3}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{3}{2}xy = 12$;

(3) I 如图 3 中, 设 $AM = x$, $BN = y$, 同法可证 $\triangle AMD \sim \triangle BDN$, 可得 $xy = ab$, 由 $S_1 = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AM \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}ax \sin \alpha$, $S_2 = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot BN \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}by \sin \alpha$, 可得 $S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{4} (ab)^2 \sin^2 \alpha$.

(II) 结论不变, 证明方法类似;

【解答】 解: (1) 如图 1 中,

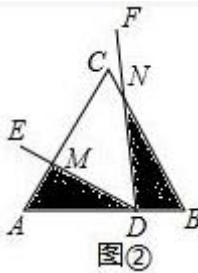


图①

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,
 $\therefore AB=CB=AC=6, \angle A=\angle B=60^\circ,$
 $\because DE \parallel BC, \angle EDF=60^\circ,$
 $\therefore \angle BND=\angle EDF=60^\circ,$
 $\therefore \angle BDN=\angle ADM=60^\circ,$
 $\therefore \triangle ADM, \triangle BDN$ 都是等边三角形,
 $\therefore S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}, S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (4)^2 = 4\sqrt{3},$

$\therefore S_1 \cdot S_2 = 12,$
 故答案为 12.

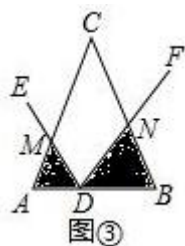
(2) 如图 2 中, 设 $AM=x, BN=y.$



图②

$\because \angle MDB = \angle MDN + \angle NDB = \angle A + \angle AMD, \angle MDN = \angle A,$
 $\therefore \angle AMD = \angle NDB, \because \angle A = \angle B,$
 $\therefore \triangle AMD \sim \triangle BDN,$
 $\therefore \frac{AM}{BD} = \frac{AD}{BN},$
 $\therefore \frac{x}{2} = \frac{4}{y},$
 $\therefore xy = 8,$
 $\therefore S_1 = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AM \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} x, S_2 = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} y,$
 $\therefore S_1 \cdot S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} y = \frac{3}{2} xy = 12.$

(3) I 如图 3 中, 设 $AM=x, BN=y,$

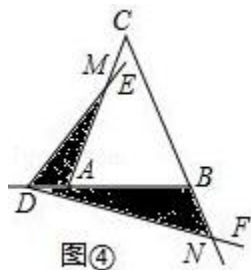


同法可证 $\triangle AMD \sim \triangle BDN$ ，可得 $xy=ab$ ，

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AM \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ax \sin \alpha, \quad S_2 = \frac{1}{2} DB \cdot BN \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} by \sin \alpha,$$

$$\therefore S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{4} (ab)^2 \sin^2 \alpha.$$

II 如图 4 中，设 $AM=x$ ， $BN=y$ ，



同法可证 $\triangle AMD \sim \triangle BDN$ ，可得 $xy=ab$ ，

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AM \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ax \sin \alpha, \quad S_2 = \frac{1}{2} DB \cdot BN \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} by \sin \alpha,$$

$$\therefore S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{4} (ab)^2 \sin^2 \alpha.$$

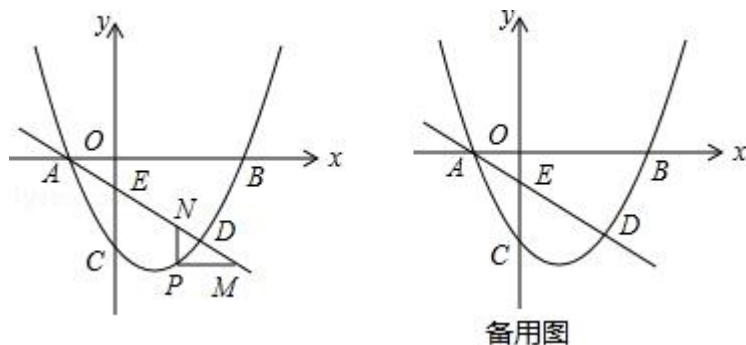
24. (10 分) (2017•岳阳) 如图，抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 B (3, 0)，C (0, -2)，直线

$l: y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ 交 y 轴于点 E，且与抛物线交于 A，D 两点，P 为抛物线上一动点（不与 A，D 重合）。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 当点 P 在直线 l 下方时，过点 P 作 $PM \parallel x$ 轴交 l 于点 M， $PN \parallel y$ 轴交 l 于点 N，求 $PM+PN$ 的最大值。

(3) 设 F 为直线 l 上的点，以 E，C，P，F 为顶点的四边形能否构成平行四边形？若能，求出点 F 的坐标；若不能，请说明理由。



【考点】HF：二次函数综合题.

【分析】(1) 把 $B(3, 0)$, $C(0, -2)$ 代入 $y = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 解方程组即可得到结论;

(2) 设 $P(m, \frac{2}{3}m^2 - \frac{4}{3}m - 2)$, 得到 $N(m, -\frac{2}{3}m - \frac{2}{3})$, $M(-m^2 + 2m + 2, \frac{2}{3}m^2 - \frac{4}{3}m - 2)$, 根据二次函数的性质即可得到结论;

(3) 求得 $E(0, -\frac{2}{3})$, 得到 $CE = \frac{4}{3}$, 设 $P(m, \frac{2}{3}m^2 - \frac{4}{3}m - 2)$, ①以 CE 为边, 根据 $CE = PF$, 列方程得到 $m = 1$, $m = 0$ (舍去), ②以 CE 为对角线, 连接 PF 交 CE 于 G , $CG = GE$, $PG = FG$, 得到 $G(0, -\frac{4}{3})$, 设 $P(m, \frac{2}{3}m^2 - \frac{4}{3}m - 2)$, 则 $F(-m, \frac{2}{3}m - \frac{2}{3})$, 列方程得到此方程无实数根, 于是得到结论.

【解答】解: (1) 把 $B(3, 0)$, $C(0, -2)$ 代入 $y = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 得,
$$\begin{cases} \frac{2}{3} \times 3^2 + 3b + c = 0 \\ c = -2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} b = -\frac{4}{3} \\ c = -2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为: $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 2$;

(2) 设 $P(m, \frac{2}{3}m^2 - \frac{4}{3}m - 2)$,

$\because PM \parallel x$ 轴, $PN \parallel y$ 轴, M, N 在直线 AD 上,

$\therefore N(m, -\frac{2}{3}m - \frac{2}{3})$, $M(-m^2 + 2m + 2, \frac{2}{3}m^2 - \frac{4}{3}m - 2)$,

$\therefore PM + PN = -m^2 + 2m + 2 - m - \frac{2}{3}m - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}m^2 + \frac{4}{3}m + 2 = -\frac{5}{3}m^2 + \frac{5}{3}m + \frac{10}{3} = -\frac{5}{3}(m - \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}$,

$\therefore$ 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, $PM + PN$ 的最大值是 $\frac{15}{4}$;

(3) 能,

理由: $\because y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ 交 y 轴于点 E ,

$\therefore E(0, -\frac{2}{3})$,

参与本试卷答题和审题的老师有：sjzx；nhx600；放飞梦想；弯弯的小河；曹先生；sd2011；zgm666；三界无我；HLing；wdxwwzy；zhjh；szl；zjx111；家有儿女；知足长乐；Ldt；sks；王学峰（排名不分先后）

21 世纪教育网

2017 年 7 月 7 日