

2016 年湖南省邵阳市中考数学试卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分

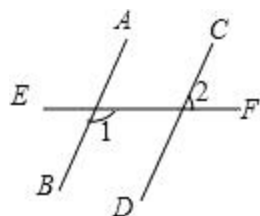
1. $-\sqrt{2}$ 的相反数是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\sqrt{2}$ D. -2

2. 下面四个手机应用图标中是轴对称图形的是 ()

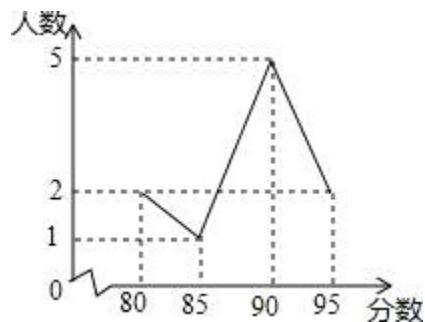


3. 如图所示，直线 AB、CD 被直线 EF 所截，若 $AB \parallel CD$ ， $\angle 1 = 100^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的大小是 ()



- A. 10° B. 50° C. 80° D. 100°

4. 在学校演讲比赛中，10 名选手的成绩统计图如图所示，则这 10 名选手成绩的众数是 ()



- A. 95 B. 90 C. 85 D. 80

5. 一次函数 $y = -x + 2$ 的图象不经过的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

6. 分式方程 $\frac{3}{x} = \frac{4}{x+1}$ 的解是 ()

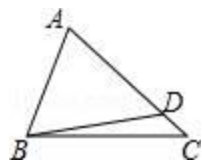
- A. $x = -1$ B. $x = 1$ C. $x = 2$ D. $x = 3$

7. 一元二次方程 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根的情况是 ()

- A. 有两个相等的实数根 B. 有两个不相等的实数根

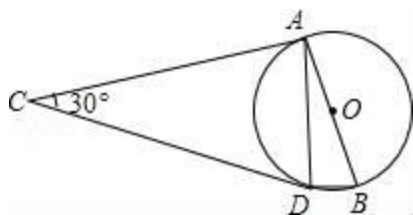
- C. 只有一个实数根 D. 没有实数根

8. 如图所示, 点 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上一点 (不含端点), $AD=BD$, 则下列结论正确的是 ()



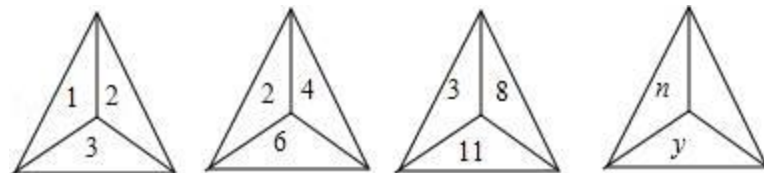
- A. $AC > BC$ B. $AC = BC$ C. $\angle A > \angle ABC$ D. $\angle A = \angle ABC$

9. 如图所示, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 为 $\odot O$ 外一点, CA, CD 是 $\odot O$ 的切线, A, D 为切点, 连接 BD, AD. 若 $\angle ACD = 30^\circ$, 则 $\angle DBA$ 的大小是 ()



- A. 15° B. 30° C. 60° D. 75°

10. 如图所示, 下列各三角形中的三个数之间均具有相同的规律, 根据此规律, 最后一个三角形中 y 与 n 之间的关系是 ()



- A. $y = 2n + 1$ B. $y = 2^n + n$ C. $y = 2^{n+1} + n$ D. $y = 2^n + n + 1$

二、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分

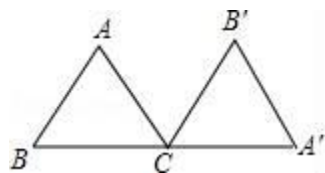
11. 将多项式 $m^3 - mn^2$ 因式分解的结果是_____.

12. 学校射击队计划从甲、乙两人中选拔一人参加运动会射击比赛, 在选拔过程中, 每人射击 10 次, 计算他们的平均成绩及方差如下表:

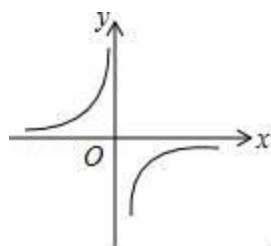
选手	甲	乙
平均数 (环)	9.5	9.5
方差	0.035	0.015

请你根据上表中的数据选一人参加比赛, 最适合的人选是_____.

13. 将等边 $\triangle CBA$ 绕点 C 顺时针旋转 $\angle \alpha$ 得到 $\triangle CB'A'$ ，使得 B, C, A' 三点在同一直线上，如图所示，则 $\angle \alpha$ 的大小是_____.



14. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象如图所示，则 k 的值可能是_____ (写一个即可).

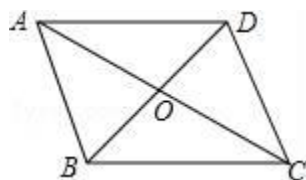


15. 不等式组 $\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ 5x > 3x-4 \end{cases}$ 的解集是_____.

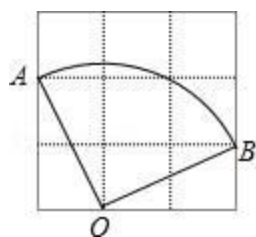
16. 2015年7月，第四十五届“世界超级计算机500强排行榜”榜单发布，我国国防科技大学研制的“天河二号”以每秒 3386×10^{13} 次的浮点运算速度第五次蝉联冠军，若将 3386×10^{13} 用科学记数法表示成 $a \times 10^n$ 的形式，则 n 的值是_____.



17. 如图所示，四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ，若 $AB \parallel CD$ ，请添加一个条件_____ (写一个即可)，使四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



18. 如图所示，在 3×3 的方格纸中，每个小方格都是边长为1的正方形，点 O, A, B 均为格点，则扇形 OAB 的面积大小是_____.

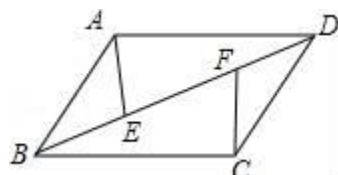


三、解答题：本大题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分

19. 计算： $(-2)^2 + 2\cos 60^\circ - (\sqrt{10} - \pi)^0$.

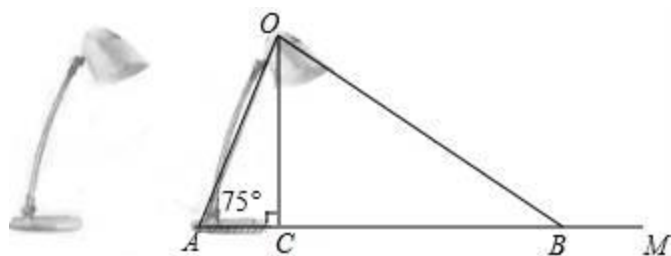
20. 先化简，再求值： $(m-n)^2 - m(m-2n)$ ，其中 $m=\sqrt{3}$ ， $n=\sqrt{2}$.

21. 如图所示，点 E, F 是平行四边形 ABCD 对角线 BD 上的点，BF=DE，求证：AE=CF.



四、解答题：本大题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分

22. 如图为放置在水平桌面上的台灯的平面示意图，灯臂 AO 长为 40cm，与水平面所形成的夹角 $\angle OAM$ 为 75° . 由光源 O 射出的边缘光线 OC, OB 与水平面所形成的夹角 $\angle OCA$, $\angle OBA$ 分别为 90° 和 30° ，求该台灯照亮水平面的宽度 BC (不考虑其他因素，结果精确到 0.1cm. 温馨提示： $\sin 75^\circ \approx 0.97$, $\cos 75^\circ \approx 0.26$, $\sqrt{3} \approx 1.73$).

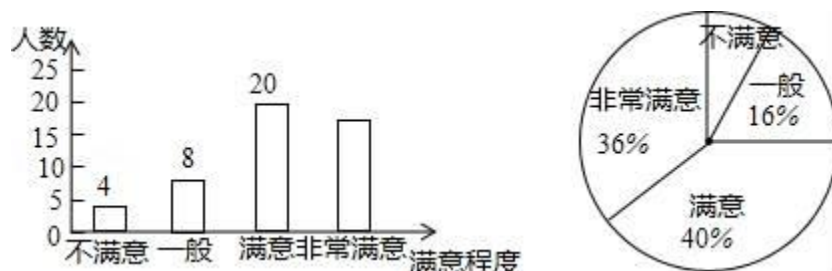


23. 为了响应“足球进校园”的目标，某校计划为学校足球队购买一批足球，已知购买 2 个 A 品牌的足球和 3 个 B 品牌的足球共需 380 元；购买 4 个 A 品牌的足球和 2 个 B 品牌的足球共需 360 元.

- (1) 求 A, B 两种品牌的足球的单价.
- (2) 求该校购买 20 个 A 品牌的足球和 2 个 B 品牌的足球的总费用.



24. 为了解市民对全市创卫工作的满意程度，某中学教学兴趣小组在全市甲、乙两个区内进行了调查统计，将调查结果分为不满意，一般，满意，非常满意四类，回收、整理好全部问卷后，得到下列不完整的统计图.



请结合图中信息，解决下列问题:

- (1) 求此次调查中接受调查的人数.
- (2) 求此次调查中结果为非常满意的人数.
- (3) 兴趣小组准备从调查结果为不满意的 4 位市民中随机选择 2 为进行回访，已知 4 为市民中有 2 位来自甲区，另 2 位来自乙区，请用列表或用画树状图的方法求出选择的市民均来自甲区的概率.

五、综合题：本大题共 2 小题，其中 25 题 8 分，26 题 10 分，共 18 分

25. 尤秀同学遇到了这样一个问题：如图 1 所示，已知 AF, BE 是 $\triangle ABC$ 的中线，且 $AF \perp BE$ ，垂足为 P ，设 $BC=a, AC=b, AB=c$.

求证： $a^2+b^2=5c^2$

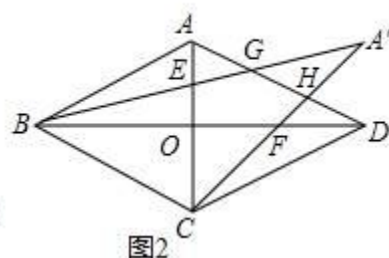
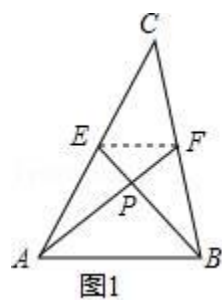
该同学仔细分析后，得到如下解题思路：

先连接 EF ，利用 EF 为 $\triangle ABC$ 的中位线得到 $\triangle EPF \sim \triangle BPA$ ，故 $\frac{EP}{BP} = \frac{PF}{PA} = \frac{EF}{BA} = \frac{1}{2}$ ，设 $PF=m$ ， $PE=n$ ，用 m, n 把 PA, PB 分别表示出来，再在 $Rt\triangle APE, Rt\triangle BPF$ 中利用勾股定理计算，消去 m, n 即可得证

(1) 请你根据以上解题思路帮尤秀同学写出证明过程.

(2) 利用题中的结论，解答下列问题：

在边长为 3 的菱形 $ABCD$ 中， O 为对角线 AC, BD 的交点， E, F 分别为线段 AO, DO 的中点，连接 BE, CF 并延长交于点 M ， BM, CM 分别交 AD 于点 G, H ，如图 2 所示，求 MG^2+MH^2 的值.



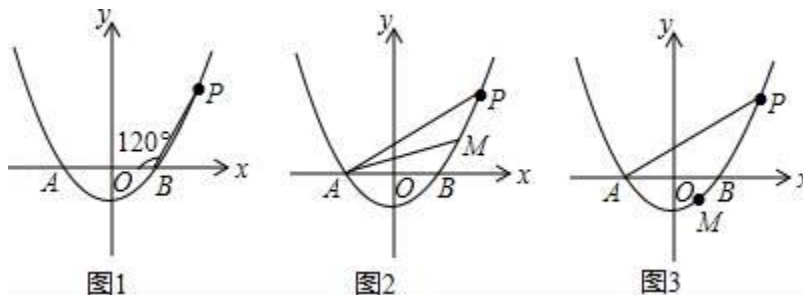
26. 已知抛物线 $y=ax^2-4a$ ($a>0$) 与 x 轴相交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 点 P 是抛物线上一点, 且 $PB=AB$, $\angle PBA=120^\circ$, 如图所示.

(1) 求抛物线的解析式.

(2) 设点 $M(m, n)$ 为抛物线上的一个动点, 且在曲线 PA 上移动.

①当点 M 在曲线 PB 之间 (含端点) 移动时, 是否存在点 M 使 $\triangle APM$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$? 若存在, 求点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

②当点 M 在曲线 BA 之间 (含端点) 移动时, 求 $|m|+|n|$ 的最大值及取得最大值时点 M 的坐标.



2016 年湖南省邵阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分

1. $-\sqrt{2}$ 的相反数是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\sqrt{2}$ D. -2

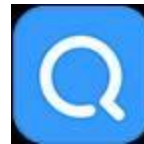
【考点】实数的性质.

【分析】根据只有符号不同的两个数叫做互为相反数解答.

【解答】解： $-\sqrt{2}$ 的相反数是 $\sqrt{2}$.

故选 A.

2. 下面四个手机应用图标中是轴对称图形的是 ()

- A.  B.  C.  D. 

【考点】轴对称图形.

【分析】分别根据轴对称图形与中心对称图形的性质对各选项进行逐一分析即可.

【解答】解：A、既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故本选项错误；

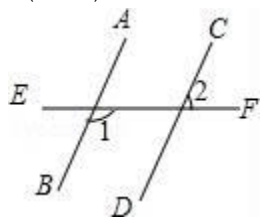
B、是中心对称图形，故本选项错误；

C、既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故本选项错误；

D、是轴对称图形，故本选项正确.

故选 D.

3. 如图所示，直线 AB、CD 被直线 EF 所截，若 $AB \parallel CD$ ， $\angle 1 = 100^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的大小是 ()



- A. 10° B. 50° C. 80° D. 100°

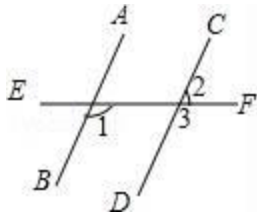
【考点】平行线的性质.

【分析】根据平行线的性质得到 $\angle 3 = \angle 1 = 100^\circ$ ，根据平角的定义即可得到结论.

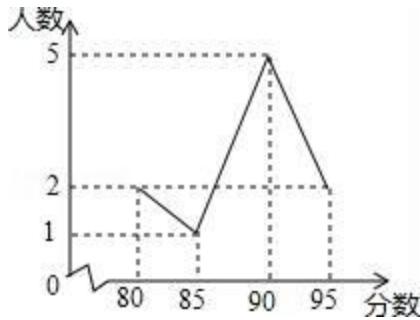
【解答】解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle 3 = \angle 1 = 100^\circ$ ，

$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 3 = 80^\circ$ ，

故选 C.



4. 在学校演讲比赛中，10 名选手的成绩统计图如图所示，则这 10 名选手成绩的众数是 ()



- A. 95 B. 90 C. 85 D. 80

【考点】众数；折线统计图.

【分析】根据众数的定义和给出的数据可直接得出答案.

【解答】解：根据折线统计图可得：

90 分的人数有 5 个，人数最多，则众数是 90；

故选 B.

5. 一次函数 $y = -x + 2$ 的图象不经过的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【考点】一次函数的图象；一次函数图象与系数的关系.

【分析】根据一次函数的系数确定函数图象经过的象限，由此即可得出结论.

【解答】解：∵ 一次函数 $y = -x + 2$ 中 $k = -1 < 0$ ， $b = 2 > 0$ ，

∴ 该函数图象经过第一、二、四象限.

故选 C.

6. 分式方程 $\frac{3}{x} = \frac{4}{x+1}$ 的解是 ()

- A. $x = -1$ B. $x = 1$ C. $x = 2$ D. $x = 3$

【考点】分式方程的解.

【分析】观察可得最简公分母是 $x(x+1)$ ，方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解.

【解答】解：两边都乘以 $x(x+1)$ 得： $3(x+1) = 4x$ ，

去括号，得： $3x + 3 = 4x$ ，

移项、合并，得： $x = 3$ ，

经检验 $x = 3$ 是原分式方程的解，

故选： D.

7. 一元二次方程 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根的情况是 ()

- A. 有两个相等的实数根 B. 有两个不相等的实数根
C. 只有一个实数根 D. 没有实数根

【考点】根的判别式.

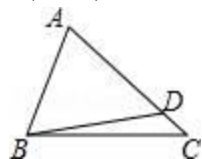
【分析】代入数据求出根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的值, 根据 Δ 的正负即可得出结论.

【解答】解: $\because \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$,

$\therefore$ 该方程有两个不相等的实数根.

故选 B.

8. 如图所示, 点 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上一点 (不含端点), $AD=BD$, 则下列结论正确的是 ()



- A. $AC > BC$ B. $AC = BC$ C. $\angle A > \angle ABC$ D. $\angle A = \angle ABC$

【考点】等腰三角形的性质.

【分析】根据等腰三角形的两个底角相等, 由 $AD=BD$ 得到 $\angle A = \angle ABD$, 所以 $\angle ABC > \angle A$, 则对各 C、D 选项进行判断; 根据大边对大角可对 A、B 进行判断.

【解答】解: $\because AD=BD$,

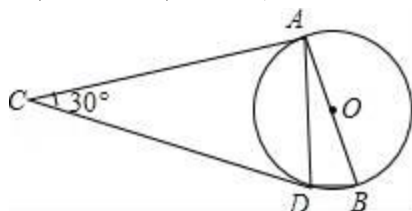
$\therefore \angle A = \angle ABD$,

$\therefore \angle ABC > \angle A$, 所以 C 选项和 D 选项错误;

$\therefore AC > BC$, 所以 A 选项正确; B 选项错误.

故选 A.

9. 如图所示, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 为 $\odot O$ 外一点, CA, CD 是 $\odot O$ 的切线, A, D 为切点, 连接 BD, AD. 若 $\angle ACD = 30^\circ$, 则 $\angle DBA$ 的大小是 ()



- A. 15° B. 30° C. 60° D. 75°

【考点】切线的性质; 圆周角定理.

【分析】首先连接 OD, 由 CA, CD 是 $\odot O$ 的切线, $\angle ACD = 30^\circ$, 即可求得 $\angle AOD$ 的度数, 又由 $OB=OD$, 即可求得答案.

【解答】解: 连接 OD,

$\because$ CA, CD 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OA \perp AC$, $OD \perp CD$,

$\therefore \angle OAC = \angle ODC = 90^\circ$,

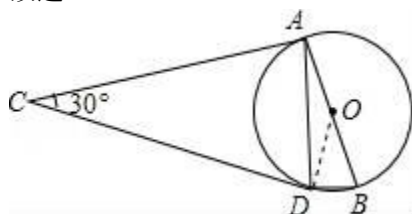
$\because \angle ACD = 30^\circ$,

$\therefore \angle AOD = 360^\circ - \angle C - \angle OAC - \angle ODC = 150^\circ$,

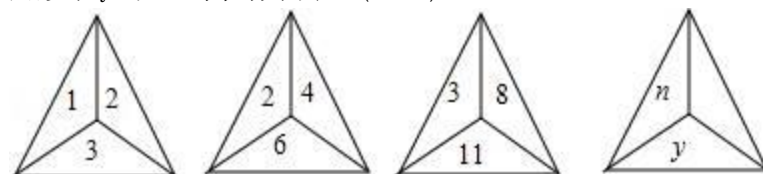
$\because OB=OD$,

$\therefore \angle DBA = \angle ODB = \frac{1}{2} \angle AOD = 75^\circ$.

故选 D.



10. 如图所示, 下列各三角形中的三个数之间均具有相同的规律, 根据此规律, 最后一个三角形中 y 与 n 之间的关系是 ()



A. $y=2n+1$ B. $y=2^n+n$ C. $y=2^{n+1}+n$ D. $y=2^n+n+1$

【考点】规律型: 数字的变化类.

【分析】由题意可得下边三角形的数字规律为: $n+2^n$, 继而求得答案.

【解答】解: $\because$ 观察可知: 左边三角形的数字规律为: 1, 2, $\dots$, n ,
右边三角形的数字规律为: 2, 2^2 , $\dots$, 2^n ,
下边三角形的数字规律为: $1+2$, $2+2^2$, $\dots$, $n+2^n$,
 $\therefore y=2^n+n$.

故选 B.

二、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分

11. 将多项式 $m^3 - mn^2$ 因式分解的结果是 $m(m+n)(m-n)$.

【考点】提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】原式提取公因式后, 利用平方差公式分解即可.

【解答】解: 原式 $=m(m^2 - n^2) = m(m+n)(m-n)$.

故答案为: $m(m+n)(m-n)$

12. 学校射击队计划从甲、乙两人中选拔一人参加运动会射击比赛, 在选拔过程中, 每人射击 10 次, 计算他们的平均成绩及方差如下表:

选手	甲	乙
平均数 (环)	9.5	9.5
方差	0.035	0.015

请你根据上表中的数据选一人参加比赛, 最适合的人选是 乙.

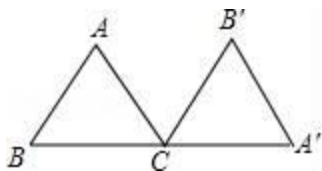
【考点】方差; 算术平均数.

【分析】根据方差的定义, 方差越小数据越稳定.

【解答】解: 因为 $S_{甲}^2=0.035 > S_{乙}^2=0.015$, 方差小的为乙,
所以本题中成绩比较稳定的是乙.

故答案为乙.

13. 将等边 $\triangle CBA$ 绕点 C 顺时针旋转 $\angle \alpha$ 得到 $\triangle CB'A'$, 使得 B, C, A' 三点在同一直线上, 如图所示, 则 $\angle \alpha$ 的大小是 120° .



【考点】旋转的性质；等边三角形的性质.

【分析】根据旋转的性质和等边三角形的性质解答即可.

【解答】解：∵ 三角形 ABC 是等边三角形，

$$\therefore \angle ACB = 60^\circ,$$

∵ 等边 $\triangle CBA$ 绕点 C 顺时针旋转 $\angle \alpha$ 得到 $\triangle CB'A'$ ，使得 B, C, A' 三点在同一直线上，

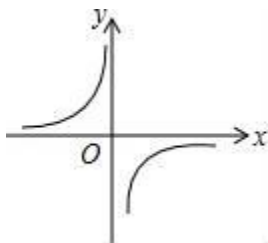
$$\therefore \angle BCA' = 180^\circ, \angle B'CA' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle \alpha = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ,$$

故答案为： 120° .

14. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象如图所示，则 k 的值可能是 -1 (写一个即可).



【考点】反比例函数的性质.

【分析】利用反比例函数的性质得到 $k < 0$ ，然后在此范围内取一个值即可.

【解答】解：∵ 双曲线的两支分别位于第二、第四象限，

$$\therefore k < 0,$$

$$\therefore k \text{ 可取 } -1.$$

故答案为 -1.

15. 不等式组 $\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ 5x > 3x-4 \end{cases}$ 的解集是 $-2 < x \leq 1$.

【考点】解一元一次不等式组.

【分析】分别求出各不等式的解集，再求出其公共解集即可.

$$\begin{cases} x-1 \leq 0 \text{ ①} \\ 5x > 3x-4 \text{ ②} \end{cases}$$

【解答】解：

由①得， $x \leq 1$,

由②得， $x > -2$,

故不等式组的解集为： $-2 < x \leq 1$.

故答案为： $-2 < x \leq 1$.

16. 2015 年 7 月，第四十五届“世界超级计算机 500 强排行榜”榜单发布，我国国防科技大学研制的“天河二号”以每秒 3386×10^{13} 次的浮点运算速度第五次蝉联冠军，若将 3386×10^{13} 用科学记数法表示成 $a \times 10^n$ 的形式，则 n 的值是 16。



【考点】 科学记数法—表示较大的数.

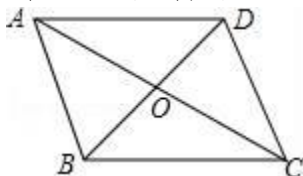
【分析】 直接利用科学记数法的表示方法分析得出 n 的值.

【解答】 解: $3386 \times 10^{13} = 3.386 \times 10^{16}$,

则 $n=16$.

故答案为: 16.

17. 如图所示，四边形 ABCD 的对角线相交于点 O，若 $AB \parallel CD$ ，请添加一个条件 $AD \parallel BC$ (写一个即可)，使四边形 ABCD 是平行四边形.



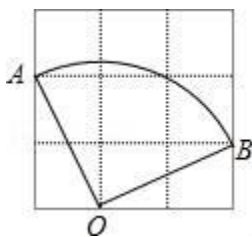
【考点】 平行四边形的判定.

【分析】 根据平行四边形的定义或判定定理即可解答.

【解答】 解: 可以添加: $AD \parallel BC$ (答案不唯一).

故答案是: $AD \parallel BC$.

18. 如图所示，在 3×3 的方格纸中，每个小方格都是边长为 1 的正方形，点 O，A，B 均为格点，则扇形 OAB 的面积大小是 $\frac{5\pi}{4}$ 。



【考点】 扇形面积的计算.

【分析】 根据题意知，该扇形的圆心角是 90° 。根据勾股定理可以求得 $OA=OB=\sqrt{5}$ ，由扇形面积公式可得出结论.

【解答】 解: $\because$ 每个小方格都是边长为 1 的正方形,

$$\therefore OA=OB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},$$

$$\therefore S_{\text{扇形 OAB}} = \frac{90\pi \times (\sqrt{5})^2}{360} = \frac{90\pi \times 5}{360} = \frac{5\pi}{4}.$$

故答案为: $\frac{5\pi}{4}$.

三、解答题: 本大题共 3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分

19. 计算: $(-2)^2 + 2\cos 60^\circ - (\sqrt{10} - \pi)^0$.

【考点】实数的运算; 零指数幂; 特殊角的三角函数值.

【分析】原式利用乘方的意义, 特殊角的三角函数值, 以及零指数幂法则计算即可得到结果.

【解答】解: 原式 $= 4 + 2 \times \frac{1}{2} - 1$

$= 4 + 1 - 1$

$= 4$.

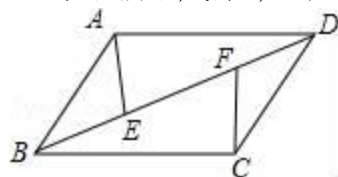
20. 先化简, 再求值: $(m-n)^2 - m(m-2n)$, 其中 $m = \sqrt{3}$, $n = \sqrt{2}$.

【考点】整式的混合运算—化简求值.

【分析】原式利用完全平方公式, 以及单项式乘以多项式法则计算, 去括号合并得到最简结果, 把 m 与 n 的值代入计算即可求出值.

【解答】解: 原式 $= m^2 - 2mn + n^2 - m^2 + 2mn = n^2$,
当 $n = \sqrt{2}$ 时, 原式 $= 2$.

21. 如图所示, 点 E, F 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 BD 上的点, $BF = DE$, 求证: $AE = CF$.



【考点】平行四边形的性质; 全等三角形的判定与性质.

【分析】根据平行四边形的性质可得 $AD \parallel BC$, $AD = BC$, 根据平行线的性质可得 $\angle EDA = \angle FBC$, 再加上条件 $ED = BF$ 可利用 SAS 判定 $\triangle AED \cong \triangle CFB$, 进而可得 $AE = CF$.

【解答】证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AD = BC$,

$\therefore \angle EDA = \angle FBC$,

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle CFB$ 中,

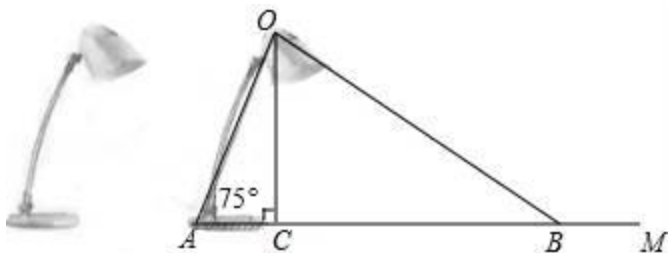
$$\begin{cases} AD = BC \\ \angle ADE = \angle CBF \\ BF = DE \end{cases},$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle CFB$ (SAS),

$\therefore AE = CF$.

四、解答题: 本大题共 3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分

22. 如图为放置在水平桌面上的台灯的平面示意图, 灯臂 AO 长为 40cm, 与水平面所形成的夹角 $\angle OAM$ 为 75° . 由光源 O 射出的边缘光线 OC , OB 与水平面所形成的夹角 $\angle OCA$, $\angle OBA$ 分别为 90° 和 30° , 求该台灯照亮水平面的宽度 BC (不考虑其他因素, 结果精确到 0.1cm. 温馨提示: $\sin 75^\circ \approx 0.97$, $\cos 75^\circ \approx 0.26$, $\sqrt{3} \approx 1.73$).



【考点】解直角三角形的应用.

【分析】根据 $\sin 75^\circ = \frac{OC}{OA} = \frac{OC}{40}$, 求出 OC 的长, 根据 $\tan 30^\circ = \frac{OC}{BC}$, 再求出 BC 的长, 即可求解.

【解答】解: 在直角三角形 ACO 中, $\sin 75^\circ = \frac{OC}{OA} = \frac{OC}{40} \approx 0.97$,

解得 $OC \approx 38.8$,

在直角三角形 BCO 中, $\tan 30^\circ = \frac{OC}{BC} = \frac{38.8}{BC} \approx \frac{1.73}{3}$,

解得 $BC \approx 67.3$.

答: 该台灯照亮水平面的宽度 BC 大约是 67.3cm.

23. 为了响应“足球进校园”的目标, 某校计划为学校足球队购买一批足球, 已知购买 2 个 A 品牌的足球和 3 个 B 品牌的足球共需 380 元; 购买 4 个 A 品牌的足球和 2 个 B 品牌的足球共需 360 元.

(1) 求 A, B 两种品牌的足球的单价.

(2) 求该校购买 20 个 A 品牌的足球和 2 个 B 品牌的足球的总费用.



【考点】二元一次方程组的应用.

【分析】(1) 设一个 A 品牌的足球需 x 元, 则一个 B 品牌的足球需 y 元, 根据“购买 2 个 A 品牌的足球和 3 个 B 品牌的足球共需 380 元; 购买 4 个 A 品牌的足球和 2 个 B 品牌的足球共需 360 元”列出方程组并解答;

(2) 把 (1) 中的数据代入求值即可.

【解答】解: (1) 设一个 A 品牌的足球需 x 元, 则一个 B 品牌的足球需 y 元,

依题意得:
$$\begin{cases} 2x+3y=380 \\ 4x+2y=360 \end{cases}$$

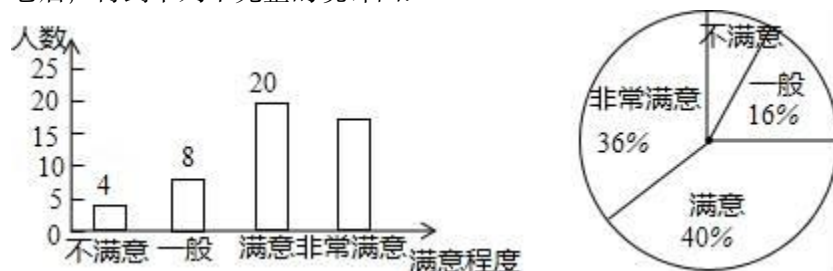
解得
$$\begin{cases} x=90 \\ y=100 \end{cases}$$

答: 一个 A 品牌的足球需 90 元, 则一个 B 品牌的足球需 100 元;

(2) 依题意得: $20 \times 90 + 2 \times 100 = 1900$ (元).

答: 该校购买 20 个 A 品牌的足球和 2 个 B 品牌的足球的总费用是 1900 元.

24. 为了解市民对全市创卫工作的满意程度，某中学教学兴趣小组在全市甲、乙两个区内进行了调查统计，将调查结果分为不满意，一般，满意，非常满意四类，回收、整理好全部问卷后，得到下列不完整的统计图.



请结合图中信息，解决下列问题：

(1) 求此次调查中接受调查的人数.

(2) 求此次调查中结果为非常满意的人数.

(3) 兴趣小组准备从调查结果为不满意的 4 位市民中随机选择 2 为进行回访，已知 4 为市民中有 2 位来自甲区，另 2 位来自乙区，请用列表或用画树状图的方法求出选择的市民均来自甲区的概率.

【考点】 列表法与树状图法；扇形统计图；条形统计图.

【分析】 (1) 由满意的有 20 人，占 40%，即可求得此次调查中接受调查的人数.

(2) 由 (1)，即可求得此次调查中结果为非常满意的人数.

(3) 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与选择的市民均来自甲区的情况，再利用概率公式即可求得答案.

【解答】 解：(1) $\because$ 满意的有 20 人，占 40%，

$\therefore$ 此次调查中接受调查的人数： $20 \div 40\% = 50$ (人)；

(2) 此次调查中结果为非常满意的人数为： $50 - 4 - 8 - 20 = 18$ (人)；

(3) 画树状图得：



$\therefore$ 共有 12 种等可能的结果，选择的市民均来自甲区的有 2 种情况，

$\therefore$ 选择的市民均来自甲区的概率为： $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

五、综合题： 本大题共 2 小题，其中 25 题 8 分，26 题 10 分，共 18 分

25. 尤秀同学遇到了这样一个问题：如图 1 所示，已知 AF，BE 是 $\triangle ABC$ 的中线，且 $AF \perp BE$ ，垂足为 P，设 $BC=a$ ， $AC=b$ ， $AB=c$.

求证： $a^2 + b^2 = 5c^2$

该同学仔细分析后，得到如下解题思路：

先连接 EF, 利用 EF 为 $\triangle ABC$ 的中位线得到 $\triangle EPF \sim \triangle BPA$, 故 $\frac{EP}{BP} = \frac{PF}{PA} = \frac{EF}{BA} = \frac{1}{2}$, 设 $PF=m$, $PE=n$, 用 m, n 把 PA, PB 分别表示出来, 再在 $Rt\triangle APE, Rt\triangle BPF$ 中利用勾股定理计算, 消去 m, n 即可得证

(1) 请你根据以上解题思路帮优秀同学写出证明过程.

(2) 利用题中的结论, 解答下列问题:

在边长为 3 的菱形 $ABCD$ 中, O 为对角线 AC, BD 的交点, E, F 分别为线段 AO, DO 的中点, 连接 BE, CF 并延长交于点 M , BM, CM 分别交 AD 于点 G, H , 如图 2 所示, 求 MG^2+MH^2 的值.

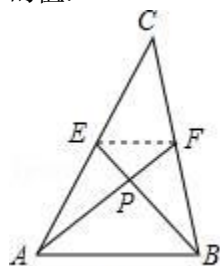


图1

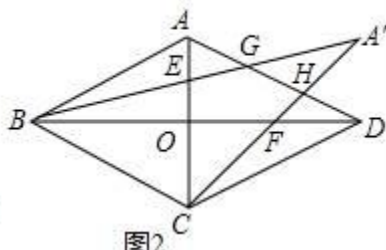


图2

【考点】 相似三角形的判定; 三角形中位线定理.

【分析】 (1) 设 $PF=m, PE=n$, 连结 EF , 如图 1, 根据三角形中位线性质得 $EF \parallel AB$, $EF = \frac{1}{2}c$, 则可判断 $\triangle EFP \sim \triangle BPA$, 利用相似比得到 $PB=2n, PA=2m$, 接着根据勾股定理得到 $n^2+4m^2 = \frac{1}{4}b^2, m^2+4n^2 = \frac{1}{4}a^2$, 则 $5(n^2+m^2) = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$, 而 $n^2+m^2=EF^2 = \frac{1}{4}c^2$, 所以 $a^2+b^2=5c^2$;

(2) 利用 (1) 的结论得 $MB^2+MC^2=5BC^2=5 \times 3^2=45$, 再利用 $\triangle AEG \sim \triangle CEB$ 可计算出 $AG=1$, 同理可得 $DH=1$, 则 $GH=1$, 然后利用 $GH \parallel BC$, 根据平行线分线段长比例定理得到 $MB=3GM, MC=3MH$, 然后等量代换后可得 $MG^2+MH^2=5$.

【解答】 解: (1) 设 $PF=m, PE=n$, 连结 EF , 如图 1,

$\because AF, BE$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore EF$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线, $AE = \frac{1}{2}b, BF = \frac{1}{2}a$,

$\therefore EF \parallel AB, EF = \frac{1}{2}c$,

$\therefore \triangle EFP \sim \triangle BPA$,

$\therefore \frac{EP}{BP} = \frac{PF}{PA} = \frac{EF}{BA} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{n}{PB} = \frac{m}{PA} = \frac{1}{2}$,

$\therefore PB=2n, PA=2m$,

在 $Rt\triangle AEP$ 中, $\therefore PE^2+PA^2=AE^2$,

$\therefore n^2+4m^2 = \frac{1}{4}b^2$ ①,

在 $Rt\triangle BFP$ 中, $\therefore PF^2+PB^2=BF^2$,

$\therefore m^2+4n^2 = \frac{1}{4}a^2$ ②,

①+②得 $5(n^2+m^2) = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$,

在 $Rt\triangle EFP$ 中, $\therefore PE^2+PF^2=EF^2$,

$$\therefore n^2+m^2=EF^2=\frac{1}{4}c^2,$$

$$\therefore 5 \cdot \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2),$$

$$\therefore a^2+b^2=5c^2;$$

(2) $\because$ 四边形 ABCD 为菱形,

$$\therefore BD \perp AC,$$

$\because$ E, F 分别为线段 AO, DO 的中点,

由 (1) 的结论得 $MB^2+MC^2=5BC^2=5 \times 3^2=45$,

$$\therefore AG \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle CEB,$$

$$\therefore \frac{AG}{BC} = \frac{AE}{CE} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AG=1,$$

同理可得 $DH=1$,

$$\therefore GH=1,$$

$$\therefore GH \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{MG}{MB} = \frac{MH}{MC} = \frac{GH}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore MB=3GM, MC=3MH,$$

$$\therefore 9MG^2+9MH^2=45,$$

$$\therefore MG^2+MH^2=5.$$

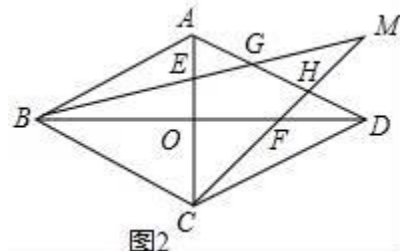


图2

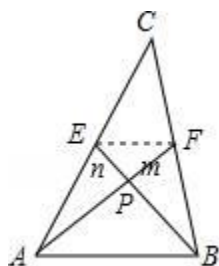


图1

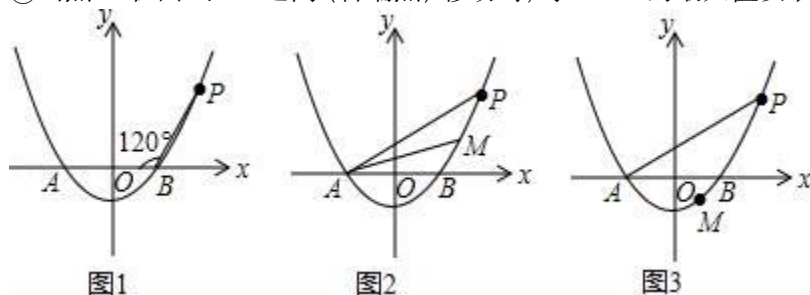
26. 已知抛物线 $y=ax^2-4a$ ($a>0$) 与 x 轴相交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 点 P 是抛物线上一点, 且 $PB=AB$, $\angle PBA=120^\circ$, 如图所示.

(1) 求抛物线的解析式.

(2) 设点 M (m, n) 为抛物线上的一个动点, 且在曲线 PA 上移动.

①当点 M 在曲线 PB 之间 (含端点) 移动时, 是否存在点 M 使 $\triangle APM$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$? 若存在, 求点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

②当点 M 在曲线 BA 之间(含端点)移动时,求 $|m|+|n|$ 的最大值及取得最大值时点 M 的坐标.



【考点】二次函数综合题.

【分析】(1) 先求出 A、B 两点坐标, 然后过点 P 作 $PC \perp x$ 轴于点 C, 根据 $\angle PBA = 120^\circ$, $PB = AB$, 分别求出 BC 和 PC 的长度即可得出点 P 的坐标, 最后将点 P 的坐标代入二次函数解析式即;

(2) ①过点 M 作 $ME \perp x$ 轴于点 E, 交 AP 于点 D, 分别用含 m 的式子表示点 D、M 的坐标, 然后代入 $\triangle APM$ 的面积公式 $\frac{1}{2}DM \cdot AC$, 根据题意列出方程求出 m 的值;

②根据题意可知: $n < 0$, 然后对 m 的值进行分类讨论, 当 $-2 \leq m \leq 0$ 时, $|m| = -m$; 当 $0 < m \leq 2$ 时, $|m| = m$, 列出函数关系式即可求得 $|m|+|n|$ 的最大值.

【解答】解: (1) 如图 1, 令 $y=0$ 代入 $y=ax^2-4a$,

$$\therefore 0 = ax^2 - 4a,$$

$$\because a > 0,$$

$$\therefore x^2 - 4 = 0,$$

$$\therefore x = \pm 2,$$

$$\therefore A(-2, 0), B(2, 0),$$

$$\therefore AB = 4,$$

过点 P 作 $PC \perp x$ 轴于点 C,

$$\therefore \angle PBC = 180^\circ - \angle PBA = 60^\circ,$$

$$\because PB = AB = 4,$$

$$\therefore \cos \angle PBC = \frac{BC}{PB},$$

$$\therefore BC = 2,$$

由勾股定理可求得: $PC = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore OC = OB + BC = 4,$$

$$\therefore P(4, 2\sqrt{3}),$$

把 $P(4, 2\sqrt{3})$ 代入 $y = ax^2 - 4a$,

$$\therefore 2\sqrt{3} = 16a - 4a,$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为: } y = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

(2) $\because$ 点 M 在抛物线上,

$$\therefore n = \frac{\sqrt{3}}{6}m^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore M \text{ 的坐标为 } (m, \frac{\sqrt{3}}{6} m^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}),$$

①当点 M 在曲线 PB 之间 (含端点) 移动时,

$$\therefore 2 \leq m \leq 4,$$

如图 2, 过点 M 作 $ME \perp x$ 轴于点 E, 交 AP 于点 D,

设直线 AP 的解析式为 $y=kx+b$,

把 A $(-2, 0)$ 与 P $(4, 2\sqrt{3})$ 代入 $y=kx+b$,

$$\text{得: } \begin{cases} 0 = -2k + b \\ 2\sqrt{3} = 4k + b, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 AP 的解析式为: } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{令 } x=m \text{ 代入 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}m + \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore D \text{ 的坐标为 } (m, \frac{\sqrt{3}}{3}m + \frac{2\sqrt{3}}{3}),$$

$$\therefore DM = (\frac{\sqrt{3}}{3}m + \frac{2\sqrt{3}}{3}) - (\frac{\sqrt{3}}{6}m^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{6}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}m + \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle APM} = \frac{1}{2}DM \cdot AE + \frac{1}{2}DM \cdot CE$$

$$= \frac{1}{2}DM (AE + CE)$$

$$= \frac{1}{2}DM \cdot AC$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}m^2 + \sqrt{3}m + 4\sqrt{3}$$

$$\text{当 } S_{\triangle APM} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ 时,}$$

$$\therefore \frac{5\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}m^2 + \sqrt{3}m + 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{解得 } m=3 \text{ 或 } m=-1,$$

$$\therefore 2 \leq m \leq 4,$$

$$\therefore m=3,$$

$$\text{此时, } M \text{ 的坐标为 } (3, \frac{5\sqrt{3}}{6});$$

②当点 M 在曲线 BA 之间 (含端点) 移动时,

$$\therefore -2 \leq m \leq 2, \quad n < 0,$$

当 $-2 \leq m \leq 0$ 时,

$$\therefore |m| + |n| = -m - n = -\frac{\sqrt{3}}{6}m^2 - m + \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(m + \sqrt{3})^2 + \frac{7\sqrt{3}}{6},$$

当 $m = -\sqrt{3}$ 时,

$$\therefore |m| + |n| \text{ 可取得最大值, 最大值为 } \frac{7\sqrt{3}}{6},$$

此时, M 的坐标为 $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$,

当 $0 < m \leq 2$ 时,

$$\therefore |m| + |n| = m - n = -\frac{\sqrt{3}}{6}m^2 + m + \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(m - \sqrt{3})^2 + \frac{7\sqrt{3}}{6},$$

当 $m = \sqrt{3}$ 时,

$$\therefore |m| + |n| \text{ 可取得最大值, 最大值为 } \frac{7\sqrt{3}}{6},$$

此时, M 的坐标为 $(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$,

综上所述, 当点 M 在曲线 BA 之间 (含端点) 移动时, M 的坐标为 $(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$ 或 $(-\sqrt{3},$

$-\frac{\sqrt{3}}{6})$ 时, $|m| + |n|$ 的最大值为 $\frac{7\sqrt{3}}{6}$.

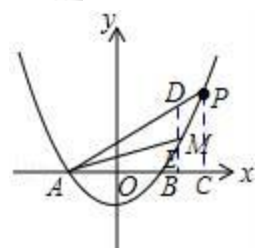


图2

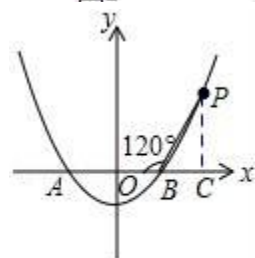


图1