

2016 年湖南省衡阳市中考数学试卷

一、选择题（共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分）

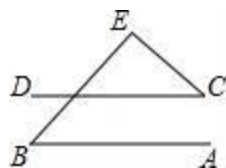
1. -4 的相反数是（ ）

- A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. -4 D. 4

2. 如果分式 $\frac{3}{x-1}$ 有意义，则 x 的取值范围是（ ）

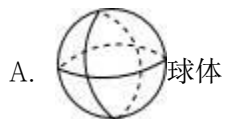
- A. 全体实数 B. $x \neq 1$ C. $x=1$ D. $x > 1$

3. 如图，直线 $AB \parallel CD$ ， $\angle B=50^\circ$ ， $\angle C=40^\circ$ ，则 $\angle E$ 等于（ ）

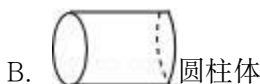


- A. 70° B. 80° C. 90° D. 100°

4. 下列几何体中，哪一个几何体的三视图完全相同（ ）



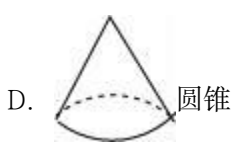
球体



圆柱体



四棱锥



圆锥

5. 下列各式中，计算正确的是（ ）

- A. $3x+5y=8xy$ B. $x^3 \cdot x^5 = x^8$ C. $x^6 \div x^3 = x^2$ D. $(-x^3)^3 = x^6$

6. 为缓解中低收入人群和新参加工作的大学生住房的需求，某市将新建保障住房 3600000 套，把 3600000 用科学记数法表示应是（ ）

- A. 0.36×10^7 B. 3.6×10^6 C. 3.6×10^7 D. 36×10^5

7. 要判断一个学生的数学考试成绩是否稳定，那么需要知道他最近连续几次数学考试成绩的（ ）

- A. 平均数 B. 中位数 C. 众数 D. 方差

8. 正多边形的一个内角是 150° ，则这个正多边形的边数为（ ）

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

9. 随着居民经济收入的不断提高以及汽车业的快速发展，家用汽车已越来越多地进入普通家庭，抽样调查显示，截止 2015 年底某市汽车拥有量为 16.9 万辆. 已知 2013 年底该市汽

车拥有量为 10 万辆，设 2013 年底至 2015 年底该市汽车拥有量的平均增长率为 x ，根据题意列方程得（ ）

- A. $10(1+x)^2=16.9$ B. $10(1+2x)=16.9$
C. $10(1-x)^2=16.9$ D. $10(1-2x)=16.9$

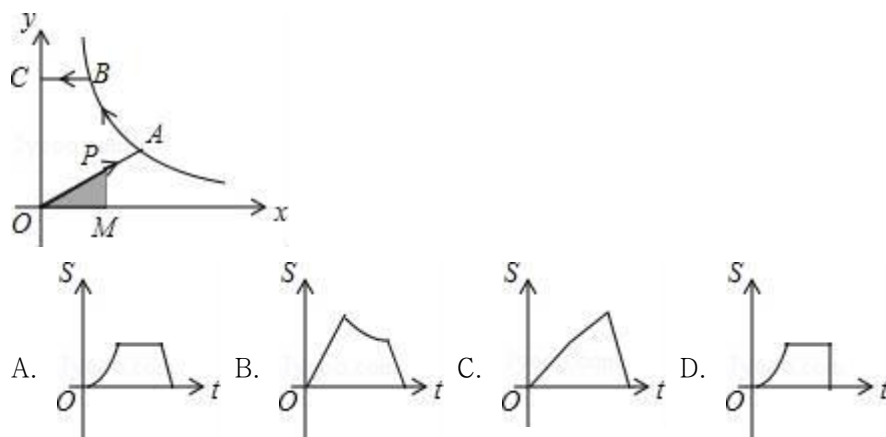
10. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+4x+k=0$ 有两个相等的实根，则 k 的值为（ ）

- A. $k=-4$ B. $k=4$ C. $k\geq -4$ D. $k\geq 4$

11. 下列命题是假命题的是（ ）

- A. 经过两点有且只有一条直线
B. 三角形的中位线平行且等于第三边的一半
C. 平行四边形的对角线相等
D. 圆的切线垂直于经过切点的半径

12. 如图，已知 A, B 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0, x>0$) 图象上的两点， $BC\parallel x$ 轴，交 y 轴于点 C ，动点 P 从坐标原点 O 出发，沿 $O\rightarrow A\rightarrow B\rightarrow C$ （图中“ $\rightarrow$ ”所示路线）匀速运动，终点为 C ，过 P 作 $PM\perp x$ 轴，垂足为 M 。设三角形 OMP 的面积为 S ， P 点运动时间为 t ，则 S 关于 t 的函数图象大致为（ ）



二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

13. 因式分解： $a^2+ab=$ _____.

14. 计算： $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=$ _____.

15. 点 $P(x-2, x+3)$ 在第一象限，则 x 的取值范围是_____.

16. 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似且面积之比为 25: 16，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的周长之比为_____.

17. 若圆锥底面圆的周长为 8π ，侧面展开图的圆心角为 90° ，则该圆锥的母线长为_____.

18. 如图所示，1 条直线将平面分成 2 个部分，2 条直线最多可将平面分成 4 个部分，3 条直线最多可将平面分成 7 个部分，4 条直线最多可将平面分成 11 个部分. 现有 n 条直线最多可将平面分成 56 个部分，则 n 的值为_____.



三、解答题（共 8 小题，满分 66 分）

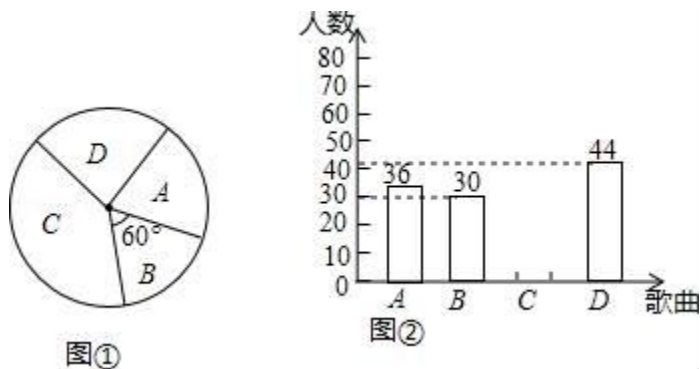
19. 先化简，再求值： $(a+b)(a-b) + (a+b)^2$ ，其中 $a = -1$ ， $b = \frac{1}{2}$.

20. 为庆祝建党 95 周年，某校团委计划在“七一”前夕举行“唱响红歌”班级歌咏比赛，要确定一首喜欢人数最多的歌曲为每班必唱歌曲. 为此提供代号为 A, B, C, D 四首备选曲目让学生选择，经过抽样调查，并将采集的数据绘制如下两幅不完整的统计图. 请根据图①，图②所提供的信息，解答下列问题：

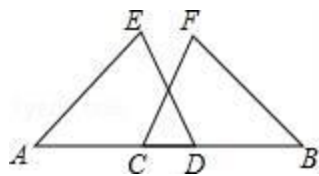
(1) 本次抽样调查中，选择曲目代号为 A 的学生占抽样总数的百分比为_____；

(2) 请将图②补充完整；

(3) 若该校共有 1530 名学生，根据抽样调查的结果估计全校共有多少学生选择此必唱歌曲？（要有解答过程）



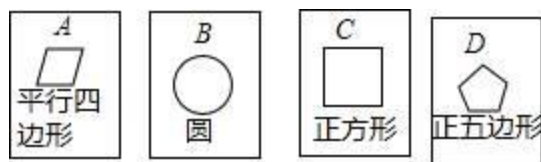
21. 如图，点 A、C、D、B 四点共线，且 $AC=BD$ ， $\angle A=\angle B$ ， $\angle ADE=\angle BCF$ ，求证： $DE=CF$ 。



22. 在四张背面完全相同的纸牌 A、B、C、D，其中正面分别画有四个不同的几何图形（如图），小华将这 4 张纸牌背面朝上洗匀后摸出一张，放回洗匀后再摸一张。

(1) 用树状图（或列表法）表示两次摸牌所有可能出现的结果（纸牌可用 A、B、C、D 表示）；

(2) 求摸出两张纸牌牌面上所画几何图形，既是轴对称图形又是中心对称图形的概率。



23. 为保障我国海外维和部队官兵的生活，现需通过 A 港口、B 港口分别运送 100 吨和 50 吨生活物资。已知该物资在甲仓库存有 80 吨，乙仓库存有 70 吨，若从甲、乙两仓库运送物资到港口的费用（元/吨）如表所示：

港口	运费（元/台）	
	甲库	乙库
A 港	14	20
B 港	10	8

(1) 设从甲仓库运送到 A 港口的物资为 x 吨，求总运费 y （元）与 x （吨）之间的函数关系式，并写出 x 的取值范围；

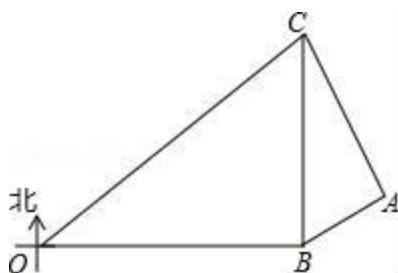
(2) 求出最低费用，并说明费用最低时的调配方案。

24. 在某次海上军事学习期间, 我军为确保 $\triangle OBC$ 海域内的安全, 特派遣三艘军舰分别在 O 、 B 、 C 处监控 $\triangle OBC$ 海域, 在雷达显示图上, 军舰 B 在军舰 O 的正东方向80海里处, 军舰 C 在军舰 B 的正北方向60海里处, 三艘军舰上装载有相同的探测雷达, 雷达的有效探测范围是半径为 r 的圆形区域. (只考虑在海平面上的探测)

(1) 若三艘军舰要对 $\triangle OBC$ 海域进行无盲点监控, 则雷达的有效探测半径 r 至少为多少海里?

(2) 现有一艘敌舰 A 从东部接近 $\triangle OBC$ 海域, 在某一时刻军舰 B 测得 A 位于北偏东 60° 方向上, 同时军舰 C 测得 A 位于南偏东 30° 方向上, 求此时敌舰 A 离 $\triangle OBC$ 海域的最短距离为多少海里?

(3) 若敌舰 A 沿最短距离的路线以 $20\sqrt{2}$ 海里/小时的速度靠近 $\triangle OBC$ 海域, 我军军舰 B 沿北偏东 15° 的方向行进拦截, 问 B 军舰速度至少为多少才能在此方向上拦截到敌舰 A ?

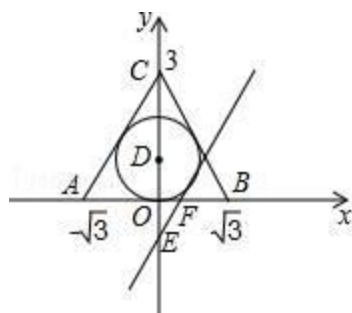


25. 在平面直角坐标中, $\triangle ABC$ 三个顶点坐标为 $A(-\sqrt{3}, 0)$ 、 $B(\sqrt{3}, 0)$ 、 $C(0, 3)$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 内切圆 $\odot D$ 的半径.

(2) 过点 $E(0, -1)$ 的直线与 $\odot D$ 相切于点 F (点 F 在第一象限), 求直线 EF 的解析式.

(3) 以(2)为条件, P 为直线 EF 上一点, 以 P 为圆心, 以 $2\sqrt{7}$ 为半径作 $\odot P$. 若 $\odot P$ 上存在一点到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离相等, 求此时圆心 P 的坐标.

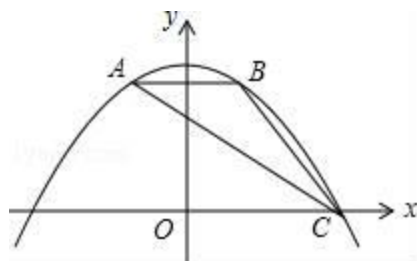


26. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $\triangle ABC$ 的三个顶点，与 y 轴相交于 $(0, \frac{9}{4})$ ，点 A 坐标为 $(-1, 2)$ ，点 B 是点 A 关于 y 轴的对称点，点 C 在 x 轴的正半轴上.

(1) 求该抛物线的函数关系表达式.

(2) 点 F 为线段 AC 上一动点，过 F 作 $FE \perp x$ 轴， $FG \perp y$ 轴，垂足分别为 E 、 G ，当四边形 $OEFG$ 为正方形时，求出 F 点的坐标.

(3) 将 (2) 中的正方形 $OEFG$ 沿 OC 向右平移，记平移中的正方形 $OEFG$ 为正方形 $DEFG$ ，当点 E 和点 C 重合时停止运动，设平移的距离为 t ，正方形的边 EF 与 AC 交于点 M ， DG 所在的直线与 AC 交于点 N ，连接 DM ，是否存在这样的 t ，使 $\triangle DMN$ 是等腰三角形？若存在，求 t 的值；若不存在请说明理由.



2016 年湖南省衡阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分）

1. -4 的相反数是（ ）

- A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. -4 D. 4

【考点】相反数.

【分析】直接利用相反数的概念：只有符号不同的两个数叫做互为相反数，进而得出答案.

【解答】解： -4 的相反数是： 4 .

故选：D.

2. 如果分式 $\frac{3}{x-1}$ 有意义，则 x 的取值范围是（ ）

- A. 全体实数 B. $x \neq 1$ C. $x=1$ D. $x > 1$

【考点】分式有意义的条件.

【分析】直接利用分式有意义的条件得出 x 的值.

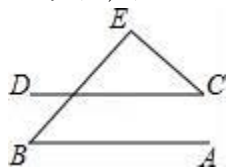
【解答】解： $\because$ 分式 $\frac{3}{x-1}$ 有意义，

$$\therefore x-1 \neq 0,$$

解得： $x \neq 1$.

故选：B.

3. 如图，直线 $AB \parallel CD$ ， $\angle B=50^\circ$ ， $\angle C=40^\circ$ ，则 $\angle E$ 等于（ ）



- A. 70° B. 80° C. 90° D. 100°

【考点】平行线的性质.

【分析】根据平行线的性质得到 $\angle 1 = \angle B = 50^\circ$ ，由三角形的内角和即可得到结论.

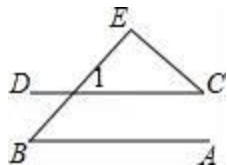
【解答】解： $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle 1 = \angle B = 50^\circ,$$

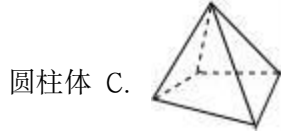
$$\because \angle C = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 180^\circ - \angle B - \angle 1 = 90^\circ,$$

故选 C.



4. 下列几何体中，哪一个几何体的三视图完全相同（ ）



圆锥

【考点】简单几何体的三视图.

【分析】根据各个几何体的三视图的图形易求解.

【解答】解：A、球体的三视图都是圆，故此选项正确；

B、圆柱的主视图和俯视图都是矩形，但左视图是一个圆形，故此选项错误；

C、四棱柱的主视图和左视图是一个三角形，俯视图是一个四边形，故此选项错误；

D、圆锥的主视图和左视图是相同的，都为一个三角形，但是俯视图是一个圆形，故此选项错误.

故选：A.

5. 下列各式中，计算正确的是（ ）

A. $3x+5y=8xy$ B. $x^3 \cdot x^5 = x^8$ C. $x^6 \div x^3 = x^2$ D. $(-x^3)^3 = x^6$

【考点】同底数幂的除法；合并同类项；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方.

【分析】分别利用同底数幂的乘法运算法则以及合并同类项法则、积的乘方运算法则分别计算得出答案.

【解答】解：A、 $3x+5y$ ，无法计算，故此选项错误；

B、 $x^3 \cdot x^5 = x^8$ ，故此选项正确；

C、 $x^6 \div x^3 = x^3$ ，故此选项错误；

D、 $(-x^3)^3 = -x^9$ ，故此选项错误；

故选：B.

6. 为缓解中低收入人群和新参加工作的大学生住房的需求，某市将新建保障住房 3600000 套，把 3600000 用科学记数法表示应是（ ）

A. 0.36×10^7 B. 3.6×10^6 C. 3.6×10^7 D. 36×10^5

【考点】科学记数法—表示较大的数.

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值大于 10 时， n 是正数；当原数的绝对值小于 1 时， n 是负数.

【解答】解： $3600000 = 3.6 \times 10^6$ ，

故选：B.

7. 要判断一个学生的数学考试成绩是否稳定, 那么需要知道他最近连续几次数学考试成绩的 ()

A. 平均数 B. 中位数 C. 众数 D. 方差

【考点】统计量的选择.

【分析】根据方差的意义: 方差是反映一组数据波动大小, 稳定程度的量; 方差越大, 表明这组数据偏离平均数越大, 即波动越大, 反之也成立. 标准差是方差的平方根, 也能反映数据的波动性; 故要判断他的数学成绩是否稳定, 那么需要知道他最近连续几次数学考试成绩的方差.

【解答】解: 方差是衡量波动大小的量, 方差越小则波动越小, 稳定性也越好.

故选: D

8. 正多边形的一个内角是 150° , 则这个正多边形的边数为 ()

A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

【考点】多边形内角与外角.

【分析】一个正多边形的每个内角都相等, 根据内角与外角互为邻补角, 因而就可以求出外角的度数. 根据任何多边形的外角和都是 360° 度, 利用 360° 除以外角的度数就可以求出外角和中外角的个数, 即多边形的边数.

【解答】解: 外角是: $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$,
 $360^\circ \div 30^\circ = 12$.

则这个正多边形是正十二边形.

故选: C.

9. 随着居民经济收入的不断提高以及汽车业的快速发展, 家用汽车已越来越多地进入普通家庭, 抽样调查显示, 截止 2015 年底某市汽车拥有量为 16.9 万辆. 已知 2013 年底该市汽车拥有量为 10 万辆, 设 2013 年底至 2015 年底该市汽车拥有量的平均增长率为 x , 根据题意列方程得 ()

A. $10(1+x)^2=16.9$ B. $10(1+2x)=16.9$ C. $10(1-x)^2=16.9$ D. $10(1-2x)=16.9$

【考点】由实际问题抽象出一元二次方程.

【分析】根据题意可得: 2013 年底该市汽车拥有量 $\times (1+\text{增长率})^2=2015$ 年底某市汽车拥有量, 根据等量关系列出方程即可.

【解答】解: 设 2013 年底至 2015 年底该市汽车拥有量的平均增长率为 x , 根据题意, 可列方程: $10(1+x)^2=16.9$,

故选: A.

10. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+4x+k=0$ 有两个相等的实根, 则 k 的值为 ()

A. $k=-4$ B. $k=4$ C. $k \geq -4$ D. $k \geq 4$

【考点】根的判别式.

【分析】根据判别式的意义得到 $\Delta=4^2-4k=0$, 然后解一次方程即可.

【解答】解: $\because$ 一元二次方程 $x^2+4x+k=0$ 有两个相等的实根,

$\therefore \Delta=4^2-4k=0$,

解得: $k=4$,

故选: B.

11. 下列命题是假命题的是 ()

- A. 经过两点有且只有一条直线
- B. 三角形的中位线平行且等于第三边的一半
- C. 平行四边形的对角线相等
- D. 圆的切线垂直于经过切点的半径

【考点】命题与定理.

【分析】根据直线公理、三角形中位线定理、切线性质定理即可判断 A、B、D 正确.

【解答】解：A、经过两点有且只有一条直线，正确.

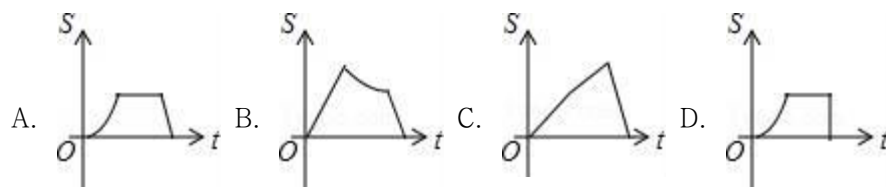
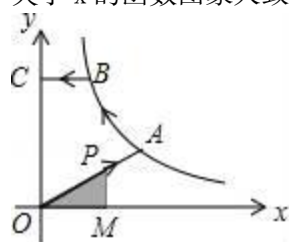
B、三角形的中位线平行且等于第三边的一半，正确.

C、平行四边形的对角线相等，错误. 矩形的对角线相等，平行四边形的对角线不一定相等.

D、圆的切线垂直于经过切点的半径，正确.

故选 C.

12. 如图，已知 A、B 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0, x > 0$) 图象上的两点，BC//x 轴，交 y 轴于点 C，动点 P 从坐标原点 O 出发，沿 O→A→B→C (图中“→”所示路线) 匀速运动，终点为 C，过 P 作 PM⊥x 轴，垂足为 M. 设三角形 OMP 的面积为 S，P 点运动时间为 t，则 S 关于 t 的函数图象大致为 ()



【考点】动点问题的函数图象.

【分析】结合点 P 的运动，将点 P 的运动路线分成 O→A、A→B、B→C 三段位置来进行分析三角形 OMP 面积的计算方式，通过图形的特点分析出面积变化的趋势，从而得到答案.

【解答】解：设 $\angle AOM = \alpha$ ，点 P 运动的速度为 a，

当点 P 从点 O 运动到点 A 的过程中， $S = \frac{(at \cdot \cos \alpha) \cdot (at \cdot \sin \alpha)}{2} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot t^2$,

由于 α 及 a 均为常量，从而可知图象本段应为抛物线，且 S 随着 t 的增大而增大；

当点 P 从 A 运动到 B 时，由反比例函数性质可知 $\triangle OPM$ 的面积为 $\frac{1}{2}k$ ，保持不变，

故本段图象应为与横轴平行的线段；

当点 P 从 B 运动到 C 过程中，OM 的长在减少， $\triangle OPM$ 的高与在 B 点时相同，

故本段图象应该为一段下降的线段；

故选：A.

二、填空题 (共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分)

13. 因式分解： $a^2 + ab = \underline{a(a+b)}$.

【考点】因式分解-提公因式法.

【分析】直接把公因式 a 提出来即可.

【解答】解: $a^2+ab=a(a+b)$.

故答案为: $a(a+b)$.

14. 计算: $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \underline{1}$.

【考点】分式的加减法.

【分析】由于两分式的分母相同, 分子不同, 故根据同分母的分式相加减的法则进行计算即可.

【解答】解: 原式 $= \frac{x-1}{x-1}$

$=1$.

故答案为: 1.

15. 点 $P(x-2, x+3)$ 在第一象限, 则 x 的取值范围是 $\underline{x > 2}$.

【考点】点的坐标.

【分析】直接利用第一象限点的坐标特征得出 x 的取值范围即可.

【解答】解: $\because$ 点 $P(x-2, x+3)$ 在第一象限,

$$\therefore \begin{cases} x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases},$$

解得: $x > 2$.

故答案为: $x > 2$.

16. 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似且面积之比为 25: 16, 则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的周长之比为 $\underline{5: 4}$.

【考点】相似三角形的性质.

【分析】根据相似三角形面积的比等于相似比的平方求出相似比, 再根据相似三角形周长的比等于相似比求解.

【解答】解: $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似且面积之比为 25: 16,

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 5: 4;

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的周长之比为 5: 4.

故答案为: 5: 4.

17. 若圆锥底面圆的周长为 8π , 侧面展开图的圆心角为 90° , 则该圆锥的母线长为 $\underline{16}$.

【考点】圆锥的计算.

【分析】设该圆锥的母线长为 l , 利用圆锥的侧面展开图为一扇形, 这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长, 扇形的半径等于圆锥的母线长和弧长公式得到 $8\pi = \frac{90 \cdot \pi \cdot l}{180}$, 然后解方程即可.

【解答】解: 设该圆锥的母线长为 l ,

根据题意得 $8\pi = \frac{90 \cdot \pi \cdot l}{180}$, 解得 $l=16$,

即该圆锥的母线长为 16.

故答案为 16.

18. 如图所示, 1 条直线将平面分成 2 个部分, 2 条直线最多可将平面分成 4 个部分, 3 条直线最多可将平面分成 7 个部分, 4 条直线最多可将平面分成 11 个部分. 现有 n 条直线最多可将平面分成 56 个部分, 则 n 的值为 10.



【考点】点、线、面、体.

【分析】 n 条直线最多可将平面分成 $S=1+1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)+1$, 依此可得等量关系: n

条直线最多可将平面分成 56 个部分, 列出方程求解即可.

【解答】解: 依题意有

$$\frac{1}{2}n(n+1)+1=56,$$

解得 $x_1=-11$ (不合题意舍去), $x_2=10$.

答: n 的值为 10.

故答案为: 10.

三、解答题 (共 8 小题, 满分 66 分)

19. 先化简, 再求值: $(a+b)(a-b)+(a+b)^2$, 其中 $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$.

【考点】整式的混合运算—化简求值.

【分析】原式利用平方差公式、完全平方公式展开后再合并同类项即可化简, 将 a 、 b 的值代入求值即可.

【解答】解: 原式 $=a^2-b^2+a^2+2ab+b^2$
 $=2a^2+2ab$,

当 $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$ 时,

$$\text{原式} = 2 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) \times \frac{1}{2}$$

$$= 2 - 1$$

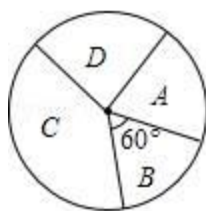
$$= 1.$$

20. 为庆祝建党 95 周年, 某校团委计划在“七一”前夕举行“唱响红歌”班级歌咏比赛, 要确定一首喜欢人数最多的歌曲为每班必唱歌曲. 为此提供代号为 A, B, C, D 四首备选曲目让学生选择, 经过抽样调查, 并将采集的数据绘制如下两幅不完整的统计图. 请根据图①, 图②所提供的信息, 解答下列问题:

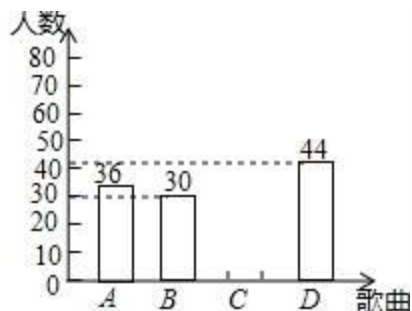
(1) 本次抽样调查中, 选择曲目代号为 A 的学生占抽样总数的百分比为 20%;

(2) 请将图②补充完整;

(3) 若该校共有 1530 名学生, 根据抽样调查的结果估计全校共有多少学生选择此必唱歌曲? (要有解答过程)



图①



图②

【考点】 条形统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

【分析】 (1) 根据条形统计图和扇形统计图可以求得选择曲目代号为 A 的学生占抽样总数的百分比；

(2) 根据条形统计图和扇形统计图可以求得选择 C 的人数，从而可以将图②补充完整；

(3) 根据条形统计图和扇形统计图可以估计全校选择此必唱歌曲的人数.

【解答】 解：(1) 由题意可得，

本次抽样调查中，选择曲目代号为 A 的学生占抽样总数的百分比为：

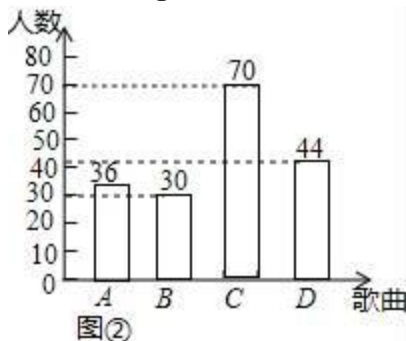
$$36 \div (30 \div \frac{60^\circ}{360^\circ}) \times 100\% = 20\%.$$

故答案为：20%；

(2) 由题意可得，

$$\text{选择 C 的人数有：} 30 \div \frac{60^\circ}{360^\circ} - 36 - 30 - 44 = 70 \text{ (人)},$$

故补全的图②如下图所示，

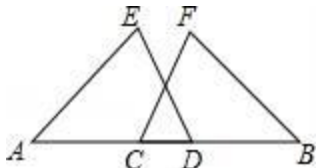


(3) 由题意可得，

$$\text{全校选择此必唱歌曲共有：} 1530 \times \frac{70}{30 \div \frac{60}{360}} = 595 \text{ (人)},$$

即全校共有 595 名学生选择此必唱歌曲.

21. 如图，点 A、C、D、B 四点共线，且 $AC=BD$ ， $\angle A=\angle B$ ， $\angle ADE=\angle BCF$ ，求证： $DE=CF$.



【考点】 全等三角形的判定与性质.

【分析】 求出 $AD=BC$ ，根据 ASA 推出 $\triangle AED \cong \triangle BFC$ ，根据全等三角形的性质得出即可.

【解答】 证明： $\because AC=BD$,

$$\therefore AC+CD=BD+CD,$$

$$\therefore AD=BC,$$

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle BFC$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle B \\ AD = BC \\ \angle ADE = \angle BCF \end{cases},$$

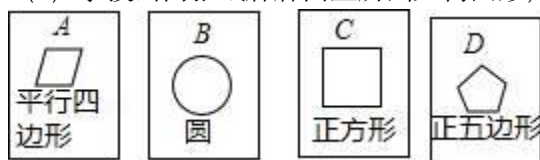
$$\therefore \triangle AED \cong \triangle BFC \text{ (ASA)},$$

$$\therefore DE=CF.$$

22. 在四张背面完全相同的纸牌 A、B、C、D，其中正面分别画有四个不同的几何图形（如图），小华将这 4 张纸牌背面朝上洗匀后摸出一张，放回洗匀后再摸一张.

(1) 用树状图（或列表法）表示两次摸牌所有可能出现的结果（纸牌可用 A、B、C、D 表示）；

(2) 求摸出两张纸牌牌面上所画几何图形，既是轴对称图形又是中心对称图形的概率.

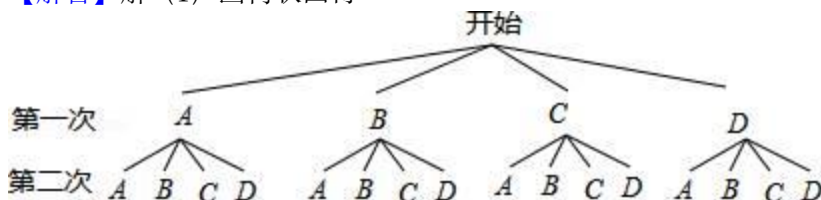


【考点】 列表法与树状图法.

【分析】 (1) 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果；

(2) 由既是轴对称图形又是中心对称图形的有 4 种情况，直接利用概率公式求解即可求得答案.

【解答】 解 (1) 画树状图得：



则共有 16 种等可能的结果；

(2) $\because$ 既是中心对称又是轴对称图形的只有 B、C,

$\therefore$ 既是轴对称图形又是中心对称图形的有 4 种情况,

$$\therefore \text{既是轴对称图形又是中心对称图形的概率为: } \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

23. 为保障我国海外维和部队官兵的生活，现需通过 A 港口、B 港口分别运送 100 吨和 50 吨生活物资. 已知该物资在甲仓库存有 80 吨，乙仓库存有 70 吨，若从甲、乙两仓库运送物资到港口的费用（元/吨）如表所示：

港口	运费（元/吨）	
	甲库	乙库
A 港	14	20
B 港	10	8

(1) 设从甲仓库运送到 A 港口的物资为 x 吨, 求总运费 y (元) 与 x (吨) 之间的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

(2) 求出最低费用, 并说明费用最低时的调配方案.

【考点】 一次函数的应用.

【分析】 (1) 根据题意表示出甲仓库和乙仓库分别运往 A、B 两港口的物资数, 再由等量关系: 总运费=甲仓库运往 A 港口的费用+甲仓库运往 B 港口的费用+乙仓库运往 A 港口的费

用+乙仓库运往 B 港口的费用列式并化简; 最后根据不等式组
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 80 - x \geq 0 \\ x - 30 \geq 0 \\ 100 - x \geq 0 \end{cases}$$
 得出 x 的取值;

(2) 因为所得的函数为一次函数, 由增减性可知: y 随 x 增大而减少, 则当 $x=80$ 时, y 最小, 并求出最小值, 写出运输方案.

【解答】 解 (1) 设从甲仓库运 x 吨往 A 港口, 则从甲仓库运往 B 港口的有 $(80-x)$ 吨, 从乙仓库运往 A 港口的有 $50-(80-x)=(x-30)$ 吨, 所以 $y=14x+20+10(80-x)+8(x-30)=-8x+2560$, x 的取值范围是 $30 \leq x \leq 80$.

(2) 由 (1) 得 $y=-8x+2560$ 随 x 增大而减少, 所以当 $x=80$ 时总运费最小, 当 $x=80$ 时, $y=-8 \times 80+2560=1920$,

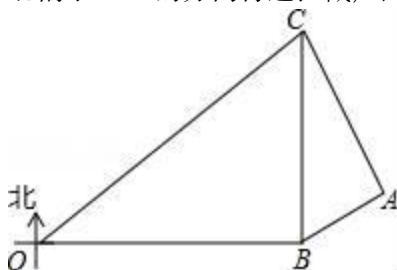
此时方案为: 把甲仓库的全部运往 A 港口, 再从乙仓库运 20 吨往 A 港口, 乙仓库的余下的全部运往 B 港口.

24. 在某次海上军事学习期间, 我军为确保 $\triangle OBC$ 海域内的安全, 特派遣三艘军舰分别在 O、B、C 处监控 $\triangle OBC$ 海域, 在雷达显示图上, 军舰 B 在军舰 O 的正东方向 80 海里处, 军舰 C 在军舰 B 的正北方向 60 海里处, 三艘军舰上装载有相同的探测雷达, 雷达的有效探测范围是半径为 r 的圆形区域. (只考虑在海平面上的探测)

(1) 若三艘军舰要对 $\triangle OBC$ 海域进行无盲点监控, 则雷达的有效探测半径 r 至少为多少海里?

(2) 现有一艘敌舰 A 从东部接近 $\triangle OBC$ 海域, 在某一时刻军舰 B 测得 A 位于北偏东 60° 方向上, 同时军舰 C 测得 A 位于南偏东 30° 方向上, 求此时敌舰 A 离 $\triangle OBC$ 海域的最短距离为多少海里?

(3) 若敌舰 A 沿最短距离的路线以 $20\sqrt{2}$ 海里/小时的速度靠近 $\triangle OBC$ 海域, 我军军舰 B 沿北偏东 15° 的方向行进拦截, 问 B 军舰速度至少为多少才能在此方向上拦截到敌舰 A?



【考点】 解直角三角形的应用-方向角问题.

【分析】 (1) 求出 OC, 由题意 $r \geq \frac{1}{2}OC$, 由此即可解决问题.

(2) 作 $AM \perp BC$ 于 M, 求出 AM 即可解决问题.

(3) 假设 B 军舰在点 N 处拦截到敌舰. 在 BM 上取一点 H, 使得 HB=HN, 设 MN=x, 先列出方程求出 x, 再求出 BN、AN 利用不等式解决问题.

【解答】 解: (1) 在 $\text{RT}\triangle OBC$ 中, $\because BO=80, BC=60, \angle OBC=90^\circ$,

$$\therefore OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100,$$

$$\therefore \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2} \times 100 = 50$$

$\therefore$ 雷达的有效探测半径 r 至少为 50 海里.

(2) 作 $AM \perp BC$ 于 M,

$$\because \angle ACB = 30^\circ, \angle CBA = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2}BC = 30,$$

在 $\text{RT}\triangle ABM$ 中, $\because \angle AMB = 90^\circ, AB = 30, \angle BAM = 30^\circ$,

$$\therefore BM = \frac{1}{2}AB = 15, AM = \sqrt{3}BM = 15\sqrt{3},$$

$\therefore$ 此时敌舰 A 离 $\triangle OBC$ 海域的最短距离为 $15\sqrt{3}$ 海里.

(3) 假设 B 军舰在点 N 处拦截到敌舰. 在 BM 上取一点 H, 使得 HB=HN, 设 MN=x,

$$\because \angle HBN = \angle HNB = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle MHN = \angle HBN + \angle HNB = 30^\circ,$$

$$\therefore HN = HB = 2x, MH = \sqrt{3}x,$$

$$\because BM = 15,$$

$$\therefore 15 = \sqrt{3}x + 2x,$$

$$x = 30 - 15\sqrt{3},$$

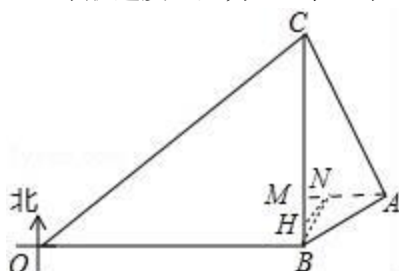
$$\therefore AN = 30\sqrt{3} - 30,$$

$$BN = \sqrt{MN^2 + BM^2} = 15(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \text{ 设 B 军舰速度为 } a \text{ 海里/小时,}$$

$$\text{由题意 } \frac{15(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{a} \leq \frac{30\sqrt{3} - 30}{20\sqrt{2}},$$

$$\therefore a \geq 20.$$

$\therefore$ B 军舰速度至少为 20 海里/小时.

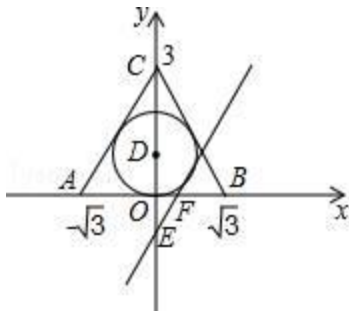


25. 在平面直角坐标中, $\triangle ABC$ 三个顶点坐标为 $A(-\sqrt{3}, 0)$ 、 $B(\sqrt{3}, 0)$ 、 $C(0, 3)$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 内切圆 $\odot D$ 的半径.

(2) 过点 $E(0, -1)$ 的直线与 $\odot D$ 相切于点 F (点 F 在第一象限), 求直线 EF 的解析式.

(3) 以 (2) 为条件, P 为直线 EF 上一点, 以 P 为圆心, 以 $2\sqrt{7}$ 为半径作 $\odot P$. 若 $\odot P$ 上存在一点到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离相等, 求此时圆心 P 的坐标.



【考点】圆的综合题.

【分析】(1) 由 A、B、C 三点坐标可知 $\angle CBO=60^\circ$ ，又因为点 D 是 $\triangle ABC$ 的内心，所以 BD 平分 $\angle CBO$ ，然后利用锐角三角函数即可求出 OD 的长度；

(2) 根据题意可知，DF 为半径，且 $\angle DFE=90^\circ$ ，过点 F 作 $FG \perp y$ 轴于点 G，求得 FG 和 OG 的长度，即可求出点 F 的坐标，然后将 E 和 F 的坐标代入一次函数解析式中，即可求出直线 EF 的解析式；

(3) $\odot P$ 上存在一点到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离相等，该点是 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心，即为点 D，所以 $DP=2\sqrt{7}$ ，又因为点 P 在直线 EF 上，所以这样的点 P 共有 2 个，且由勾股定理可知 $PF=3\sqrt{3}$.

【解答】解：(1) 连接 BD，

$$\because B(\sqrt{3}, 0), C(0, 3),$$

$$\therefore OB=\sqrt{3}, OC=3,$$

$$\therefore \tan \angle CBO = \frac{OC}{OB} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle CBO=60^\circ$$

$\because$ 点 D 是 $\triangle ABC$ 的内心，

$\therefore$ BD 平分 $\angle CBO$ ，

$$\therefore \angle DBO=30^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle DBO = \frac{OD}{OB},$$

$$\therefore OD=1,$$

$\therefore \triangle ABC$ 内切圆 $\odot D$ 的半径为 1；

(2) 连接 DF，

过点 F 作 $FG \perp y$ 轴于点 G，

$$\because E(0, -1)$$

$$\therefore OE=1, DE=2,$$

$\because$ 直线 EF 与 $\odot D$ 相切，

$$\therefore \angle DFE=90^\circ, DF=1,$$

$$\therefore \sin \angle DEF = \frac{DF}{DE},$$

$$\therefore \angle DEF=30^\circ,$$

$$\therefore \angle GDF=60^\circ,$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle DGF$ 中，

$$\angle DFG=30^\circ,$$

$$\therefore DG = \frac{1}{2},$$

由勾股定理可求得: $GF = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$$\therefore F \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

设直线 EF 的解析式为: $y = kx + b,$

$$\therefore \begin{cases} b = -1 \\ \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}k + b \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 EF 的解析式为: $y = \sqrt{3}x - 1;$

(3) $\because \odot P$ 上存在一点到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离相等,

$\therefore$ 该点必为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心,

由 (1) 可知: $\triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \triangle ABC$ 外接圆的圆心为点 D

$$\therefore DP = 2\sqrt{7},$$

设直线 EF 与 x 轴交于点 H,

$\therefore$ 令 $y=0$ 代入 $y = \sqrt{3}x - 1,$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore H \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right),$$

$$\therefore FH = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

当 P 在 x 轴上方时,

过点 P_1 作 $P_1M \perp x$ 轴于 M,

由勾股定理可求得: $P_1F = 3\sqrt{3},$

$$\therefore P_1H = P_1F + FH = \frac{10\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle DEF = \angle HP_1M = 30^\circ,$$

$$\therefore HM = \frac{1}{2}P_1H = \frac{5\sqrt{3}}{3}, P_1M = 5,$$

$$\therefore OM = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore P_1 (2\sqrt{3}, 5),$$

当 P 在 x 轴下方时,

过点 P_2 作 $P_2N \perp x$ 轴于点 N,

由勾股定理可求得: $P_2F = 3\sqrt{3},$

$$\therefore P_2H = P_2F - FH = \frac{8\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle DEF = 30^\circ$$

$$\therefore \angle OHE = 60^\circ$$

$$\therefore \sin \angle OHE = \frac{P_2N}{P_2H},$$

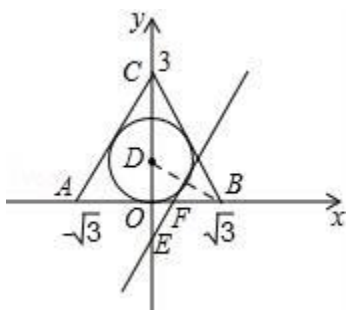
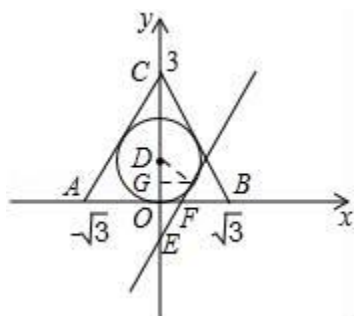
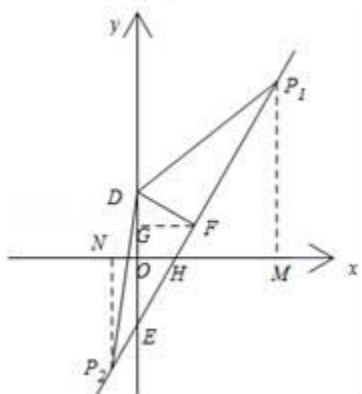
$$\therefore P_2N=4,$$

$$\text{令 } y = -4 \text{ 代入 } y = \sqrt{3}x - 1,$$

$$\therefore x = -\sqrt{3},$$

$$\therefore P_2(-\sqrt{3}, -4),$$

综上所述, 若 $\odot P$ 上存在一点到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离相等, 此时圆心 P 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 5)$ 或 $(-\sqrt{3}, -4)$.

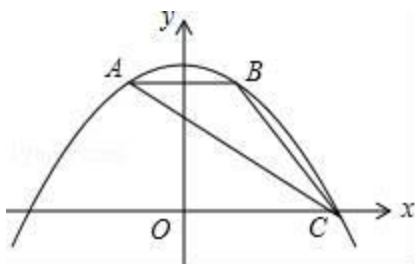


26. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $\triangle ABC$ 的三个顶点, 与 y 轴相交于 $(0, \frac{9}{4})$, 点 A 坐标为 $(-1, 2)$, 点 B 是点 A 关于 y 轴的对称点, 点 C 在 x 轴的正半轴上.

(1) 求该抛物线的函数关系表达式.

(2) 点 F 为线段 AC 上一动点, 过 F 作 $FE \perp x$ 轴, $FG \perp y$ 轴, 垂足分别为 E 、 G , 当四边形 $OEFG$ 为正方形时, 求出 F 点的坐标.

(3) 将 (2) 中的正方形 $OEFG$ 沿 OC 向右平移, 记平移中的正方形 $OEFG$ 为正方形 $DEFG$, 当点 E 和点 C 重合时停止运动, 设平移的距离为 t , 正方形的边 EF 与 AC 交于点 M , DG 所在的直线与 AC 交于点 N , 连接 DM , 是否存在这样的 t , 使 $\triangle DMN$ 是等腰三角形? 若存在, 求 t 的值; 若不存在请说明理由.



【考点】二次函数综合题.

【分析】(1) 易得抛物线的顶点为 $(0, \frac{9}{4})$, 然后只需运用待定系数法, 就可求出抛物线的函数关系表达式;

(2) ①当点 F 在第一象限时, 如图 1, 可求出点 C 的坐标, 直线 AC 的解析式, 设正方形 OEFG 的边长为 p, 则 F (p, p), 代入直线 AC 的解析式, 就可求出点 F 的坐标; ②当点 F 在第二象限时, 同理可求出点 F 的坐标, 此时点 F 不在线段 AC 上, 故舍去;

(3) 过点 M 作 $MH \perp DN$ 于 H, 如图 2, 由题可得 $0 \leq t \leq 2$. 然后只需用 t 的式子表示 DN、 DM^2 、 MN^2 , 分三种情况 (① $DN=DM$, ② $ND=NM$, ③ $MN=MD$) 讨论就可解决问题.

【解答】解: (1) $\because$ 点 B 是点 A 关于 y 轴的对称点,
 $\therefore$ 抛物线的对称轴为 y 轴,

$\therefore$ 抛物线的顶点为 $(0, \frac{9}{4})$,

故抛物线的解析式可设为 $y=ax^2+\frac{9}{4}$.

$\because$ A (-1, 2) 在抛物线 $y=ax^2+\frac{9}{4}$ 上,

$\therefore a+\frac{9}{4}=2$,

解得 $a=-\frac{1}{4}$,

$\therefore$ 抛物线的函数关系表达式为 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}$;

(2) ①当点 F 在第一象限时, 如图 1,

令 $y=0$ 得, $-\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}=0$,

解得: $x_1=3$, $x_2=-3$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 (3, 0).

设直线 AC 的解析式为 $y=mx+n$,

则有 $\begin{cases} -m+n=2 \\ 3m+n=0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} m=-\frac{1}{2} \\ n=\frac{3}{2} \end{cases}$,

∴ 直线 AC 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

设正方形 OEFG 的边长为 p, 则 F (p, p).

∵ 点 F (p, p) 在直线 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 上,

$$\therefore -\frac{1}{2}p + \frac{3}{2} = p,$$

解得 $p=1$,

∴ 点 F 的坐标为 (1, 1).

② 当点 F 在第二象限时,

同理可得: 点 F 的坐标为 (-3, 3),

此时点 F 不在线段 AC 上, 故舍去.

综上所述: 点 F 的坐标为 (1, 1);

(3) 过点 M 作 $MH \perp DN$ 于 H, 如图 2,

则 $OD=t$, $OE=t+1$.

∵ 点 E 和点 C 重合时停止运动, $\therefore 0 \leq t \leq 2$.

当 $x=t$ 时, $y = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$, 则 $N(t, -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2})$, $DN = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$.

当 $x=t+1$ 时, $y = -\frac{1}{2}(t+1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}t + 1$, 则 $M(t+1, -\frac{1}{2}t + 1)$, $ME = -\frac{1}{2}t + 1$.

在 $Rt\triangle DEM$ 中, $DM^2 = 1^2 + (-\frac{1}{2}t + 1)^2 = \frac{1}{4}t^2 - t + 2$.

在 $Rt\triangle NHM$ 中, $MH=1$, $NH = (-\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}) - (-\frac{1}{2}t + 1) = \frac{1}{2}$,

$$\therefore MN^2 = 1^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}.$$

① 当 $DN=DM$ 时,

$$(-\frac{1}{2}t + \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}t^2 - t + 2,$$

解得 $t = \frac{1}{2}$;

② 当 $ND=NM$ 时,

$$-\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

解得 $t = 3 - \sqrt{5}$;

③ 当 $MN=MD$ 时,

$$\frac{5}{4} = \frac{1}{4}t^2 - t + 2,$$

解得 $t_1=1$, $t_2=3$.

∵ $0 \leq t \leq 2$, $\therefore t=1$.

综上所述: 当 $\triangle DMN$ 是等腰三角形时, t 的值为 $\frac{1}{2}$, $3 - \sqrt{5}$ 或 1.

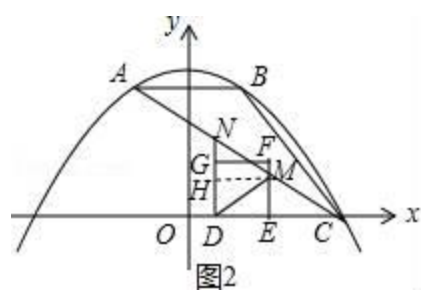


图2

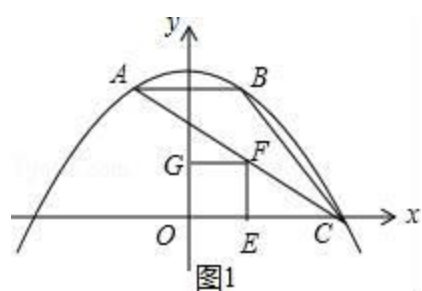


图1