

2016 年湖南省益阳市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

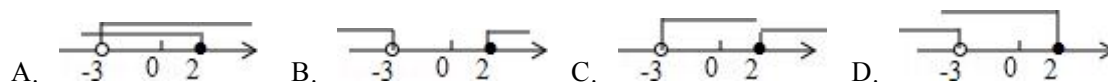
1. (5 分) (2016•益阳) $-\frac{1}{2016}$ 的相反数是 ()

- A. 2016 B. -2016 C. $\frac{1}{2016}$ D. $-\frac{1}{2016}$

2. (5 分) (2016•益阳) 下列运算正确的是 ()

- A. $2x+y=2xy$ B. $x \cdot 2y^2=2xy^2$ C. $2x \div x^2=2x$ D. $4x-5x=-1$

3. (5 分) (2016•益阳) 不等式组 $\begin{cases} -x < 3 \\ 2x-1 \leq 3 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



4. (5 分) (2016•益阳) 下列判断错误的是 ()

- A. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形
B. 四个内角都相等的四边形是矩形
C. 四条边都相等的四边形是菱形
D. 两条对角线垂直且平分的四边形是正方形

5. (5 分) (2016•益阳) 小军为了了解本校运动员百米短跑所用步数的情况，对校运会中百米短跑决赛的 8 名男运动员的步数进行了统计，记录的数据如下：66、68、67、68、67、69、68、71，这组数据的众数和中位数分别为 ()

- A. 67、68 B. 67、67 C. 68、68 D. 68、67

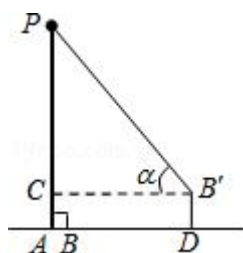
6. (5 分) (2016•益阳) 将一矩形纸片沿一条直线剪成两个多边形，那么这两个多边形的内角和之和不可能是 ()

- A. 360° B. 540° C. 720° D. 900°

7. (5 分) (2016•益阳) 关于抛物线 $y=x^2-2x+1$ ，下列说法错误的是 ()

- A. 开口向上 B. 与 x 轴有两个重合的交点
C. 对称轴是直线 $x=1$ D. 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小

8. (5 分) (2016•益阳) 小明利用测角仪和旗杆的拉绳测量学校旗杆的高度．如图，旗杆 PA 的高度与拉绳 PB 的长度相等．小明将 PB 拉到 PB' 的位置，测得 $\angle PB'C=\alpha$ ($B'C$ 为水平线)，测角仪 B'D 的高度为 1 米，则旗杆 PA 的高度为 ()



- A. $\frac{1}{1-\sin\alpha}$ B. $\frac{1}{1+\sin\alpha}$ C. $\frac{1}{1-\cos\alpha}$ D. $\frac{1}{1+\cos\alpha}$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡中对应题号后的横线上）

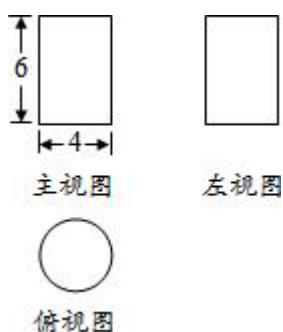
9. (5 分) (2016•益阳) 将正比例函数 $y=2x$ 的图象向上平移 3 个单位，所得的直线不经过第_____象限.

10. (5 分) (2016•益阳) 某学习小组为了探究函数 $y=x^2-|x|$ 的图象和性质，根据以往学习函数的经验，列表确定了该函数图象上一些点的坐标，表格中的 $m=_____$.

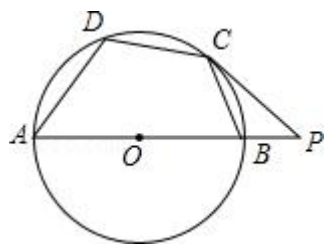
x	...	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	...
y	...	2	0.75	0	0.25	0	0.25	0	m	2	...

11. (5 分) (2016•益阳) 我们把直角坐标系中横坐标与纵坐标都是整数的点称为整点. 反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象上有一些整点，请写出其中一个整点的坐标_____.

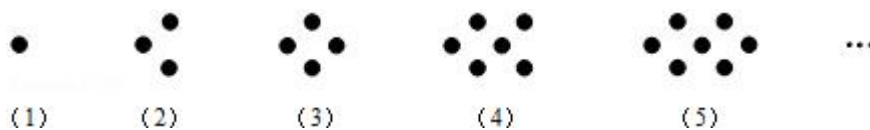
12. (5 分) (2016•益阳) 如图是一个圆柱体的三视图，由图中数据计算此圆柱体的侧面积为_____．(结果保留 π)



13. (5 分) (2016•益阳) 如图，四边形 ABCD 内接于 $\odot O$ ，AB 是直径，过 C 点的切线与 AB 的延长线交于 P 点，若 $\angle P=40^\circ$ ，则 $\angle D$ 的度数为_____.



14. (5分) (2016•益阳) 小李用围棋子排成下列一组有规律的图案，其中第1个图案有1枚棋子，第2个图案有3枚棋子，第3个图案有4枚棋子，第4个图案有6枚棋子，...，那么第9个图案的棋子数是_____枚.

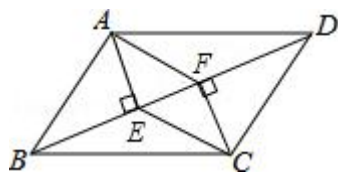


三、解答题 (本大题共3小题，每小题8分，共24分)

15. (8分) (2016•益阳) 计算: $(-1)^3 + |-\frac{1}{2}| - (-\frac{3}{2})^0 \times (-\frac{2}{3})$.

16. (8分) (2016•益阳) 先化简，再求值: $(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x}) \div \frac{x^2}{1-x^2}$, 其中 $x = -\frac{1}{2}$.

17. (8分) (2016•益阳) 如图，在□ABCD中，AE⊥BD于E，CF⊥BD于F，连接AF，CE. 求证: AF=CE.

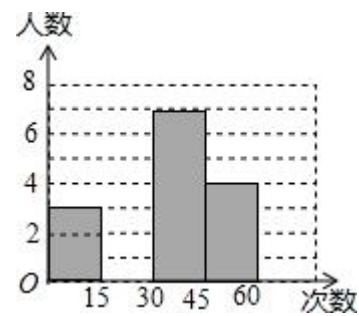


四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

18. (10 分) (2016•益阳) 在大课间活动中，体育老师随机抽取了七年级甲、乙两班部分女学生进行仰卧起坐的测试，并对成绩进行统计分析，绘制了频数分布表和统计图，请你根据图表中的信息完成下列问题：

分 组	频数	频率
第一组 ($0 \leq x < 15$)	3	0.15
第二组 ($15 \leq x < 30$)	6	a
第三组 ($30 \leq x < 45$)	7	0.35
第四组 ($45 \leq x < 60$)	b	0.20

- (1) 频数分布表中 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{1cm}}$ ，并将统计图补充完整；
- (2) 如果该校七年级共有女生 180 人，估计仰卧起坐能够一分钟完成 30 或 30 次以上的女学生有多少人？
- (3) 已知第一组中只有一个甲班学生，第四组中只有一个乙班学生，老师随机从这两个组中各选一名学生谈心得体会，则所选两人正好都是甲班学生的概率是多少？



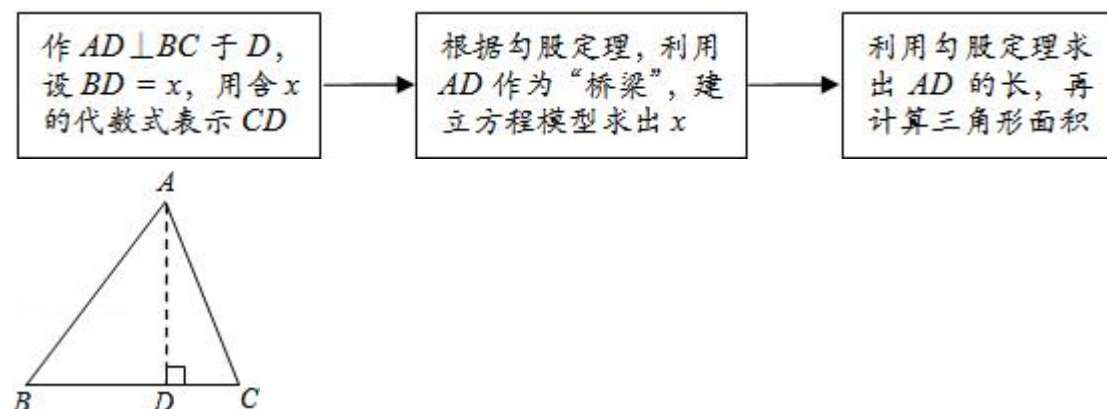
19. (10 分) (2016•益阳) 某职业高中机电班共有学生 42 人, 其中男生人数比女生人数的 2 倍少 3 人.

(1) 该班男生和女生各有多少人?

(2) 某工厂决定到该班招录 30 名学生, 经测试, 该班男、女生每天能加工的零件数分别为 50 个和 45 个, 为保证他们每天加工的零件总数不少于 1460 个, 那么至少要招录多少名男学生?

20. (10 分) (2016•益阳) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=15$, $BC=14$, $AC=13$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

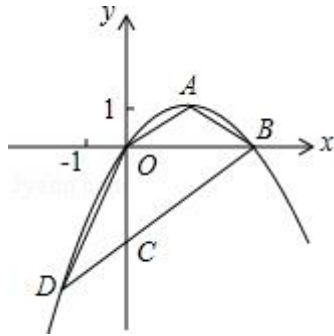
某学习小组经过合作交流, 给出了下面的解题思路, 请你按照他们的解题思路完成解答过程.



五、解答题 (本题满分 12 分)

21. (12 分) (2016•益阳) 如图, 顶点为 $A(\sqrt{3}, 1)$ 的抛物线经过坐标原点 O , 与 x 轴交于点 B .

- (1) 求抛物线对应的二次函数的表达式;
- (2) 过 B 作 OA 的平行线交 y 轴于点 C , 交抛物线于点 D , 求证: $\triangle OCD \cong \triangle OAB$;
- (3) 在 x 轴上找一点 P , 使得 $\triangle PCD$ 的周长最小, 求出 P 点的坐标.



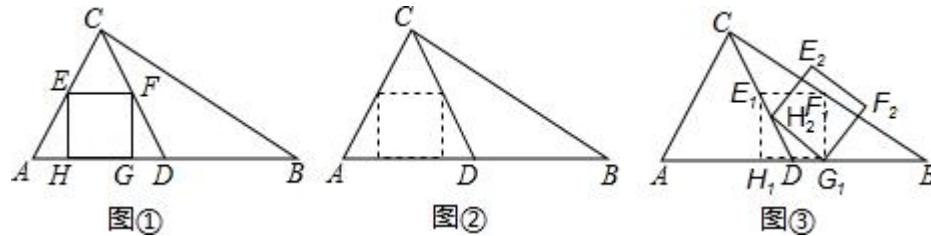
六、解答题 (本题满分 14 分)

22. (14 分) (2016·益阳) 如图①, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle B=30^\circ$, $AC=1$, D 为 AB 的中点, EF 为 $\triangle ACD$ 的中位线, 四边形 $EFGH$ 为 $\triangle ACD$ 的内接矩形 (矩形的四个顶点均在 $\triangle ACD$ 的边上).

(1) 计算矩形 $EFGH$ 的面积;

(2) 将矩形 $EFGH$ 沿 AB 向右平移, F 落在 BC 上时停止移动. 在平移过程中, 当矩形与 $\triangle CBD$ 重叠部分的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{16}$ 时, 求矩形平移的距离;

(3) 如图③, 将 (2) 中矩形平移停止时所得的矩形记为矩形 $E_1F_1G_1H_1$, 将矩形 $E_1F_1G_1H_1$ 绕 G_1 点按顺时针方向旋转, 当 H_1 落在 CD 上时停止转动, 旋转后的矩形记为矩形 $E_2F_2G_1H_2$, 设旋转角为 α , 求 $\cos\alpha$ 的值.



2016 年湖南省益阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. (5 分) (2016•益阳) $-\frac{1}{2016}$ 的相反数是 ()

- A. 2016 B. -2016 C. $\frac{1}{2016}$ D. $-\frac{1}{2016}$

【分析】直接利用相反数的定义分析得出答案．

【解答】解：∵ $-\frac{1}{2016} + \frac{1}{2016} = 0$,

∴ $-\frac{1}{2016}$ 的相反数是 $\frac{1}{2016}$.

故选：C.

2. (5 分) (2016•益阳) 下列运算正确的是 ()

- A. $2x+y=2xy$ B. $x \cdot 2y^2=2xy^2$ C. $2x \div x^2=2x$ D. $4x-5x=-1$

【分析】直接利用合并同类项法则和整式的乘除运算法则分别化简求出答案．

【解答】解：A、 $2x+y$ 无法计算，故此选项错误；

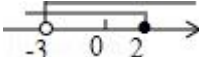
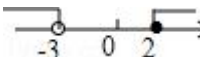
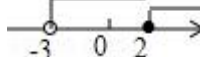
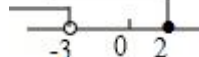
B、 $x \cdot 2y^2=2xy^2$ ，正确；

C、 $2x \div x^2 = \frac{2}{x}$ ，故此选项错误；

D、 $4x-5x=-x$ ，故此选项错误；

故选：B.

3. (5 分) (2016•益阳) 不等式组 $\begin{cases} -x < 3 \\ 2x-1 \leq 3 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()

- A.  B.  C.  D. 

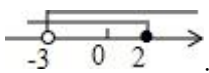
【分析】分别求出各不等式的解集，再在数轴上表示出来即可．

【解答】解： $\begin{cases} -x < 3 \text{ ①} \\ 2x-1 \leq 3 \text{ ②} \end{cases}$

由①得， $x > -3$ ，

由②得， $x \leq 2$ ，

故不等式组的解集为： $-3 < x \leq 2$ ，

在数轴上表示为：  .

故选 A.

4. (5 分) (2016•益阳) 下列判断错误的是 ()

- A. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形
- B. 四个内角都相等的四边形是矩形
- C. 四条边都相等的四边形是菱形
- D. 两条对角线垂直且平分的四边形是正方形

【分析】根据平行四边形的判定、矩形的判定、菱形的判定以及正方形的判定对各选项分析判断即可得解.

【解答】解: A、两组对边分别相等的四边形是平行四边形, 正确, 故本选项错误;
B、四个内角都相等的四边形是矩形, 正确, 故本选项错误;
C、四条边都相等的四边形是菱形, 正确, 故本选项错误;
D、两条对角线垂直且平分的四边形是正方形, 错误, 应该是菱形, 故本选项正确.
故选 D.

5. (5 分) (2016•益阳) 小军为了了解本校运动员百米短跑所用步数的情况, 对校运会中百米短跑决赛的 8 名男运动员的步数进行了统计, 记录的数据如下: 66、68、67、68、67、69、68、71, 这组数据的众数和中位数分别为 ()

- A. 67、68
- B. 67、67
- C. 68、68
- D. 68、67

【分析】根据次数出现最多的数是众数, 根据中位数的定义即可解决问题.

【解答】解: 因为 68 出现了 3 次, 出现次数最多, 所以这组数据的众数是 68.
将这组数据从小到大排列得到: 66, 67, 67, 68, 68, 68, 69, 71,
所以这组数据的中位数为 68.
故选 C.

6. (5 分) (2016•益阳) 将一矩形纸片沿一条直线剪成两个多边形, 那么这两个多边形的内角和之和不可能为 ()

- A. 360°
- B. 540°
- C. 720°
- D. 900°

【分析】根据题意列出可能情况, 再分别根据多边形的内角和定理进行解答即可.

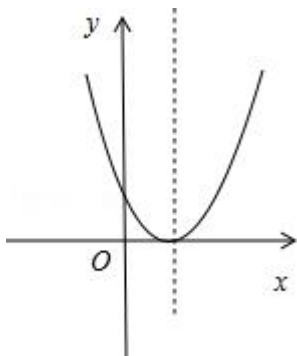
【解答】解: ①将矩形沿对角线剪开, 得到两个三角形, 两个多边形的内角和为:
 $180^\circ+180^\circ=360^\circ$;
②将矩形从一顶点剪向对边, 得到一个三角形和一个四边形, 两个多边形的内角和为:
 $180^\circ+360^\circ=540^\circ$;
③将矩形沿一组对边剪开, 得到两个四边形, 两个多边形的内角和为: $360^\circ+360^\circ=720^\circ$;
故选: D.

7. (5 分) (2016•益阳) 关于抛物线 $y=x^2-2x+1$, 下列说法错误的是 ()

- A. 开口向上
- B. 与 x 轴有两个重合的交点
- C. 对称轴是直线 $x=1$
- D. 当 $x>1$ 时, y 随 x 的增大而减小

【分析】根据抛物线的解析式画出抛物线的图象, 根据二次函数的性质结合二次函数的图象, 逐项分析四个选项, 即可得出结论.

【解答】解: 画出抛物线 $y=x^2-2x+1$ 的图象, 如图所示.



A、 $\because a=1$,

$\therefore$ 抛物线开口向上, A 正确;

B、 $\because$ 令 $x^2 - 2x + 1 = 0$, $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$,

$\therefore$ 该抛物线与 x 轴有两个重合的交点, B 正确;

C、 $\because -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times 1} = 1$,

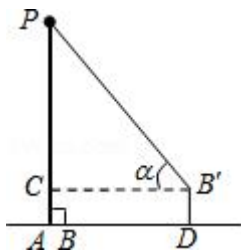
$\therefore$ 该抛物线对称轴是直线 $x=1$, C 正确;

D、 $\because$ 抛物线开口向上, 且抛物线的对称轴为 $x=1$,

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而增大, D 不正确.

故选 D.

8. (5 分) (2016•益阳) 小明利用测角仪和旗杆的拉绳测量学校旗杆的高度. 如图, 旗杆 PA 的高度与拉绳 PB 的长度相等. 小明将 PB 拉到 PB' 的位置, 测得 $\angle PB'C = \alpha$ ($B'C$ 为水平线), 测角仪 $B'D$ 的高度为 1 米, 则旗杆 PA 的高度为 ()



A. $\frac{1}{1 - \sin \alpha}$ B. $\frac{1}{1 + \sin \alpha}$ C. $\frac{1}{1 - \cos \alpha}$ D. $\frac{1}{1 + \cos \alpha}$

【分析】 设 $PA = PB = PB' = x$, 在 $RT\triangle PCB'$ 中, 根据 $\sin \alpha = \frac{PC}{PB'}$, 列出方程即可解决问题.

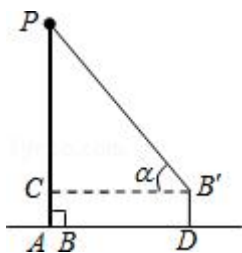
【解答】 解: 设 $PA = PB = PB' = x$,

在 $RT\triangle PCB'$ 中, $\sin \alpha = \frac{PC}{PB'}$,

$$\therefore \frac{x - 1}{x} = \sin \alpha,$$

$$\therefore x = \frac{1}{1 - \sin \alpha}.$$

故选 A.



二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡中对应题号后的横线上）

9. (5 分) (2016•益阳) 将正比例函数 $y=2x$ 的图象向上平移 3 个单位，所得的直线不经过第 四 象限.

【分析】根据平移的性质找出平移后的一次函数的解析式，再根据该函数的系数结合一次函数图象与系数的关系找出该一次函数图象经过的象限即可得出结论.

【解答】解：将正比例函数 $y=2x$ 的图象向上平移 3 个单位后得到的一次函数的解析式为：

$$y=2x+3,$$

$$\therefore k=2>0, \quad b=3>0,$$

$\therefore$ 该一次函数图象经过第一、二、三象限，即该一次函数图象不经过第四象限.

故答案为：四.

10. (5 分) (2016•益阳) 某学习小组为了探究函数 $y=x^2-|x|$ 的图象和性质，根据以往学习函数的经验，列表确定了该函数图象上一些点的坐标，表格中的 $m=$ 0.75 .

x	...	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	...
y	...	2	0.75	0	0.25	0	0.25	0	m	2	...

【分析】当 $x>0$ 时，去掉绝对值符号，找出此时 y 关于 x 的函数关系式，将 $x=1.5$ 代入其中即可得出 m 的值.

【解答】解：当 $x>0$ 时，函数 $y=x^2-|x|=x^2-x$,

$$\text{当 } x=1.5 \text{ 时, } y=1.5^2-1.5=0.75,$$

则 $m=0.75$.

故答案为：0.75.

11. (5 分) (2016•益阳) 我们把直角坐标系中横坐标与纵坐标都是整数的点称为整点. 反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象上有一些整点，请写出其中一个整点的坐标 (1, -3) .

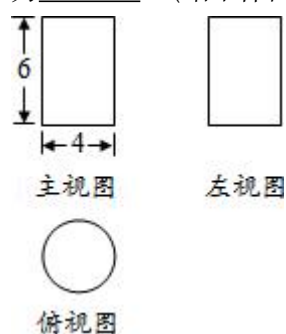
【分析】根据反比例函数的定义，取一个整数横坐标代入解析式中就可以求出一个符合要求的坐标了.

【解答】解：任意取一个整数值如 $x=1$ ，将 $x=1$ 代入解析式得： $y=-\frac{3}{1}=-3$,

得到点坐标为 $(1, -3)$ ，则这个点坐标的横纵坐标都为整数，是符合要求的答案，本题可有多多个答案.

故答案为： $(1, -3)$ (答案不唯一).

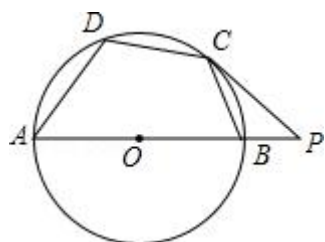
12. (5分) (2016•益阳) 如图是一个圆柱体的三视图, 由图中数据计算此圆柱体的侧面积为 24π . (结果保留 π)



【分析】根据主视图确定出圆柱体的底面直径与高, 然后根据圆柱体的侧面积公式列式计算即可得解.

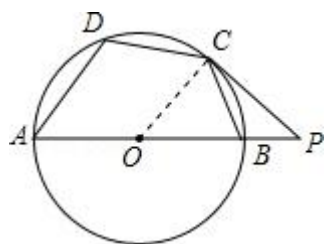
【解答】解: 由图可知, 圆柱体的底面直径为 4, 高为 6,
所以, 侧面积 $= 4 \cdot \pi \times 6 = 24\pi$.
故答案为: 24π .

13. (5分) (2016•益阳) 如图, 四边形 ABCD 内接于 $\odot O$, AB 是直径, 过 C 点的切线与 AB 的延长线交于 P 点, 若 $\angle P = 40^\circ$, 则 $\angle D$ 的度数为 115° .

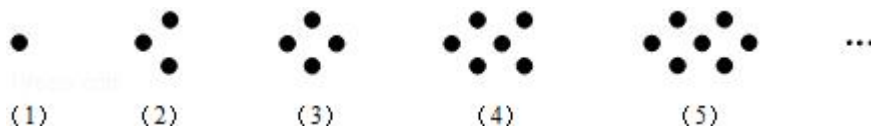


【分析】根据过 C 点的切线与 AB 的延长线交于 P 点, $\angle P = 40^\circ$, 可以求得 $\angle OCP$ 和 $\angle OBC$ 的度数, 又根据圆内接四边形对角互补, 可以求得 $\angle D$ 的度数, 本题得以解决.

【解答】解: 连接 OC, 如右图所示,
由题意可得, $\angle OCP = 90^\circ$, $\angle P = 40^\circ$,
 $\therefore \angle COB = 50^\circ$,
 $\because OC = OB$,
 $\therefore \angle OCB = \angle OBC = 65^\circ$,
 $\because$ 四边形 ABCD 是圆内接四边形,
 $\therefore \angle D + \angle ABC = 180^\circ$,
 $\therefore \angle D = 115^\circ$,
故答案为: 115° .



14. (5分) (2016•益阳) 小李用围棋子排成下列一组有规律的图案, 其中第1个图案有1枚棋子, 第2个图案有3枚棋子, 第3个图案有4枚棋子, 第4个图案有6枚棋子, ..., 那么第9个图案的棋子数是 13 枚.



【分析】设第 n 个图形有 a_n 个旗子, 罗列出部分 a_n 的值, 根据数值的变化找出变化规律 “ $a_{2n+1}=3n+1$, $a_{2n+2}=3(n+1)$ (n 为自然数)”, 依次规律即可解决问题.

【解答】解: 设第 n 个图形有 a_n 个旗子,
观察, 发现规律: $a_1=1$, $a_2=1+2=3$, $a_3=3+1=4$, $a_4=4+2=6$, $a_5=6+1=7$, ...,
 $a_{2n+1}=3n+1$, $a_{2n+2}=3(n+1)$ (n 为自然数).
当 $n=4$ 时, $a_9=3 \times 4+1=13$.
故答案为: 13.

三、解答题 (本大题共3小题, 每小题8分, 共24分)

15. (8分) (2016•益阳) 计算: $(-1)^3 + |-\frac{1}{2}| - (-\frac{3}{2})^0 \times (-\frac{2}{3})$.

【分析】原式利用乘方的意义, 绝对值的代数意义, 零指数幂法则计算即可得到结果.

【解答】解: 原式 $= -1 + \frac{1}{2} - 1 \times (-\frac{2}{3})$
 $= -1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$
 $= \frac{1}{6}$.

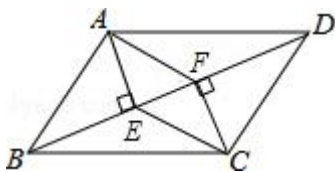
16. (8分) (2016•益阳) 先化简, 再求值: $(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x}) \div \frac{x^2}{1-x^2}$, 其中 $x = -\frac{1}{2}$.

【分析】先括号内通分, 然后计算除法, 最后代入化简即可.

【解答】解: 原式 $= \frac{1-x-(1+x)}{1-x^2} \times \frac{1-x^2}{x^2} = -\frac{2}{x}$.

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 原式 $= 4$.

17. (8分) (2016•益阳) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AE \perp BD$ 于 E , $CF \perp BD$ 于 F , 连接 AF , CE . 求证: $AF=CE$.



【分析】首先证明 $AE \parallel CF$, $\triangle ABE \cong \triangle CDF$, 再根据全等三角形的性质可得 $AE=CF$, 然后再根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形可得四边形 $AECF$ 是平行四边形, 根据平行四边形的性质可得 $AF=CE$.

【解答】证明：∵ 四边形 ABCD 是平行四边形，

∴ $AB=CD$ ， $AB\parallel CD$ ，

∴ $\angle ABE=\angle CDF$ ．

又∵ $AE\perp BD$ ， $CF\perp BD$ ，

∴ $\angle AEB=\angle CFD=90^\circ$ ， $AE\parallel CF$ ，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABE=\angle CDF \\ \angle AEB=\angle CFD \\ AB=CD \end{cases},$$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$ (AAS)．

∴ $AE=CF$ ，

∴ $AE\parallel CF$ ，

∴ 四边形 AECF 是平行四边形，

∴ $AF=CE$ ．

四、解答题 (本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分)

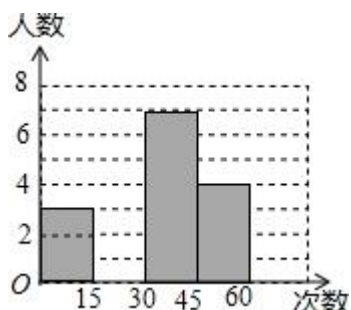
18. (10 分) (2016•益阳) 在大课间活动中，体育老师随机抽取了七年级甲、乙两班部分女学生进行仰卧起坐的测试，并对成绩进行统计分析，绘制了频数分布表和统计图，请你根据图表中的信息完成下列问题：

分 组	频数	频率
第一组 ($0\leq x < 15$)	3	0.15
第二组 ($15\leq x < 30$)	6	a
第三组 ($30\leq x < 45$)	7	0.35
第四组 ($45\leq x < 60$)	b	0.20

(1) 频数分布表中 $a=$ 0.3， $b=$ 4，并将统计图补充完整；

(2) 如果该校七年级共有女生 180 人，估计仰卧起坐能够一分钟完成 30 或 30 次以上的女学生有多少人？

(3) 已知第一组中只有一个甲班学生，第四组中只有一个乙班学生，老师随机从这两个组中各选一名学生谈心得体会，则所选两人正好都是甲班学生的概率是多少？



【分析】(1) 由统计图易得 a 与 b 的值，继而将统计图补充完整；

(2) 利用用样本估计总体的知识求解即可求得答案；

(3) 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与所选两人正好都是甲班学生的情况，再利用概率公式即可求得答案．

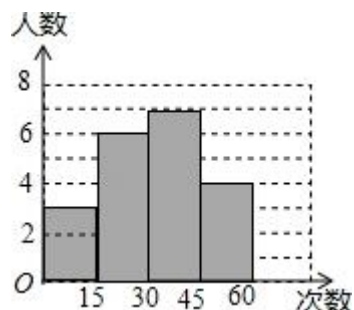
【解答】解：(1) $a=1-0.15-0.35-0.20=0.3$;

$\therefore$ 总人数为： $3 \div 0.15=20$ (人)，

$\therefore b=20 \times 0.20=4$ (人)；

故答案为：0.3，4；

补全统计图得：



(2) 估计仰卧起坐能够一分钟完成 30 或 30 次以上的女学生有： $180 \times (0.35+0.20)=99$ (人)；

(3) 画树状图得：



$\therefore$ 共有 12 种等可能的结果，所选两人正好都是甲班学生的有 3 种情况，

$\therefore$ 所选两人正好都是甲班学生的概率是： $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

19. (10 分) (2016•益阳) 某职业高中机电班共有学生 42 人，其中男生人数比女生人数的 2 倍少 3 人。

(1) 该班男生和女生各有多少人？

(2) 某工厂决定到该班招录 30 名学生，经测试，该班男、女生每天能加工的零件数分别为 50 个和 45 个，为保证他们每天加工的零件总数不少于 1460 个，那么至少要招录多少名男学生？

【分析】(1) 设该班男生有 x 人，女生有 y 人，根据男女生人数的关系以及全班共有 42 人，可得出关于 x 、 y 的二元一次方程组，解方程组即可得出结论；

(2) 设招录的男生为 m 名，则招录的女生为 $(30-m)$ 名，根据“每天加工零件数=男生每天加工数量 $\times$ 男生人数+女生每天加工数量 $\times$ 女生人数”，即可得出关于 m 的一元一次不等式，解不等式即可得出结论。

【解答】解：(1) 设该班男生有 x 人，女生有 y 人，

$$\text{依题意得：} \begin{cases} x+y=42 \\ x=2y-3 \end{cases}, \text{解得：} \begin{cases} x=27 \\ y=15 \end{cases}.$$

$\therefore$ 该班男生有 27 人，女生有 15 人。

(2) 设招录的男生为 m 名，则招录的女生为 $(30-m)$ 名，

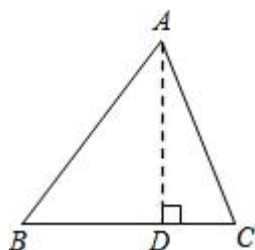
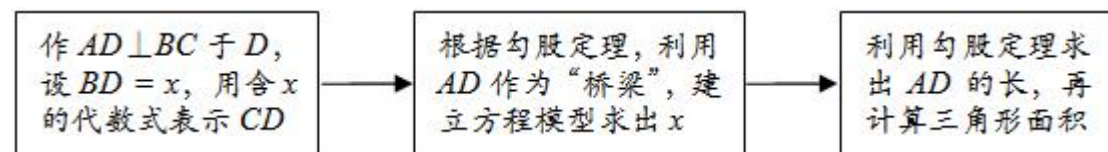
依题意得： $50m+45(30-m) \geq 1460$ ，即 $5m+1350 \geq 1460$ ，

解得: $m \geq 22$,

答: 工厂在该班至少要招录 22 名男生.

20. (10 分) (2016•益阳) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=15$, $BC=14$, $AC=13$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

某学习小组经过合作交流, 给出了下面的解题思路, 请你按照他们的解题思路完成解答过程.



【分析】根据题意利用勾股定理表示出 AD^2 的值, 进而得出等式求出答案.

【解答】解: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=15$, $BC=14$, $AC=13$,

设 $BD=x$, 则 $CD=14-x$,

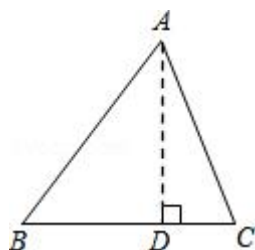
由勾股定理得: $AD^2=AB^2-BD^2=15^2-x^2$, $AD^2=AC^2-CD^2=13^2-(14-x)^2$,

故 $15^2-x^2=13^2-(14-x)^2$,

解之得: $x=9$.

$\therefore AD=12$.

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$.



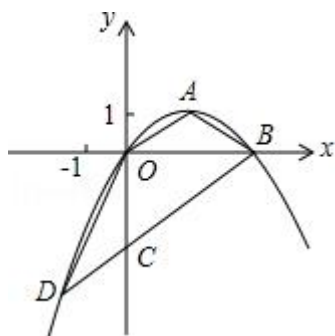
五、解答题 (本题满分 12 分)

21. (12 分) (2016•益阳) 如图, 顶点为 $A(\sqrt{3}, 1)$ 的抛物线经过坐标原点 O , 与 x 轴交于点 B .

(1) 求抛物线对应的二次函数的表达式;

(2) 过 B 作 OA 的平行线交 y 轴于点 C , 交抛物线于点 D , 求证: $\triangle OCD \cong \triangle OAB$;

(3) 在 x 轴上找一点 P , 使得 $\triangle PCD$ 的周长最小, 求出 P 点的坐标.



【分析】 (1) 用待定系数法求出抛物线解析式,

(2) 先求出直线 OA 对应的一次函数的表达式为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 再求出直线 BD 的表达式为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

- 2. 最后求出交点坐标 C, D 即可;

(3) 先判断出 C'D 与 x 轴的交点即为点 P, 它使得 $\triangle PCD$ 的周长最小. 作辅助线判断出 $\triangle C'PO \sim \triangle C'DQ$ 即可.

【解答】 解: (1) $\because$ 抛物线顶点为 A $(\sqrt{3}, 1)$,

设抛物线解析式为 $y = a(x - \sqrt{3})^2 + 1$,

将原点坐标 $(0, 0)$ 在抛物线上,

$$\therefore 0 = a(\sqrt{3})^2 + 1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{3}.$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为: } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x.$$

$$(2) \text{ 令 } y=0, \text{ 得 } 0 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x,$$

$$\therefore x=0 \text{ (舍), 或 } x=2\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{B 点坐标为: } (2\sqrt{3}, 0),$$

设直线 OA 的表达式为 $y=kx$,

$$\because \text{A } (\sqrt{3}, 1) \text{ 在直线 OA 上,}$$

$$\therefore \sqrt{3}k=1,$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{直线 OA 对应的一次函数的表达式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

$$\because BD \parallel AO,$$

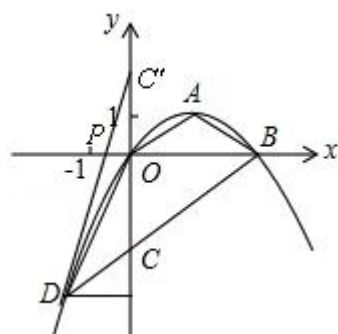
$$\text{设直线 BD 对应的一次函数的表达式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b,$$

$$\because \text{B } (2\sqrt{3}, 0) \text{ 在直线 BD 上,}$$

$$\therefore 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2\sqrt{3} + b,$$

$$\therefore b = -2,$$

$$\therefore \text{直线 BD 的表达式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2.$$



$$\text{由} \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 2 \\ y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$$

得交点 D 的坐标为 $(-\sqrt{3}, -3)$,

令 $x=0$ 得, $y=-2$,

$\therefore$ C 点的坐标为 $(0, -2)$,

由勾股定理, 得: $OA=2=OC$, $AB=2=CD$, $OB=2\sqrt{3}=OD$.

在 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 中,

$$\begin{cases} OA=OC \\ AB=CD, \\ OB=OD \end{cases}$$

$\therefore \triangle OAB \cong \triangle OCD$.

(3) 点 C 关于 x 轴的对称点 C' 的坐标为 $(0, 2)$,

$\therefore$ C'D 与 x 轴的交点即为点 P, 它使得 $\triangle PCD$ 的周长最小.

过点 D 作 $DQ \perp y$, 垂足为 Q,

$\therefore PO \parallel DQ$.

$\therefore \triangle C'PO \sim \triangle C'DQ$.

$$\therefore \frac{PO}{DQ} = \frac{C'O}{C'Q},$$

$$\therefore \frac{PO}{\sqrt{3}} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore PO = \frac{2\sqrt{3}}{5},$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-\frac{2\sqrt{3}}{5}, 0)$.

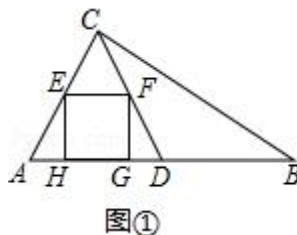
六、解答题 (本题满分 14 分)

22. (14 分) (2016·益阳) 如图①, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle B=30^\circ$, $AC=1$, D 为 AB 的中点, EF 为 $\triangle ACD$ 的中位线, 四边形 EFGH 为 $\triangle ACD$ 的内接矩形 (矩形的四个顶点均在 $\triangle ACD$ 的边上).

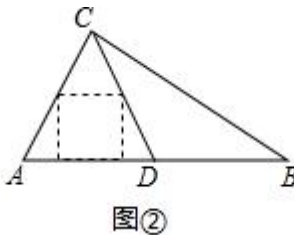
(1) 计算矩形 EFGH 的面积;

(2) 将矩形 EFGH 沿 AB 向右平移, F 落在 BC 上时停止移动. 在平移过程中, 当矩形与 $\triangle CBD$ 重叠部分的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{16}$ 时, 求矩形平移的距离;

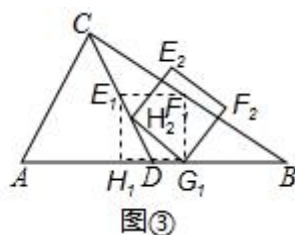
(3) 如图③, 将 (2) 中矩形平移停止时所得的矩形记为矩形 $E_1F_1G_1H_1$, 将矩形 $E_1F_1G_1H_1$ 绕 G_1 点按顺时针方向旋转, 当 H_1 落在 CD 上时停止转动, 旋转后的矩形记为矩形 $E_2F_2G_1H_2$, 设旋转角为 α , 求 $\cos\alpha$ 的值.



图①



图②



图③

【分析】 (1) 根据已知, 由直角三角形的性质可知 $AB=2$, 从而求得 AD , CD , 利用中位线的性质可得 EF , DF , 利用三角函数可得 GF , 由矩形的面积公式可得结果;

(2) 首先利用分类讨论的思想, 分析当矩形与 $\triangle CBD$ 重叠部分为三角形时 ($0 < x \leq \frac{1}{4}$), 利用三角函数和三角形的面积公式可得结果; 当矩形与 $\triangle CBD$ 重叠部分为直角梯形时

($\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}$), 列出方程解得 x ;

(3) 作 $H_2Q \perp AB$ 于 Q , 设 $DQ=m$, 则 $H_2Q=\sqrt{3}m$, 又 $DG_1=\frac{1}{4}$, $H_2G_1=\frac{1}{2}$, 利用勾股定理可得 m , 在 $Rt\triangle QH_2G_1$ 中, 利用三角函数解得 $\cos\alpha$.

【解答】 解: (1) 如图①, 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\because \angle ACB=90^\circ, \angle B=30^\circ, AC=1,$$

$$\therefore AB=2,$$

又 $\because D$ 是 AB 的中点,

$$\therefore AD=1, CD=\frac{1}{2}AB=1,$$

又 $\because EF$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线,

$$\therefore EF=DF=\frac{1}{2},$$

在 $\triangle ACD$ 中, $AD=CD$, $\angle A=60^\circ$,

$$\therefore \angle ADC=60^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle FGD \text{ 中, } GF=DF \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore \text{矩形 } EFGH \text{ 的面积 } S=EF \cdot GF = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8};$$

(2) 如图②, 设矩形移动的距离为 x , 则 $0 < x \leq \frac{1}{2}$,

当矩形与 $\triangle CBD$ 重叠部分为三角形时,

$$\text{则 } 0 < x \leq \frac{1}{4}, S = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{16},$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{4} > \frac{1}{4} \text{ (舍去),}$$

当矩形与 $\triangle CBD$ 重叠部分为直角梯形时, 则 $\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}$,

$$\text{重叠部分的面积 } S = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16},$$

$$\therefore x = \frac{3}{8},$$

即矩形移动的距离为 $\frac{3}{8}$ 时, 矩形与 $\triangle CBD$ 重叠部分的面积是 $\frac{\sqrt{3}}{16}$;

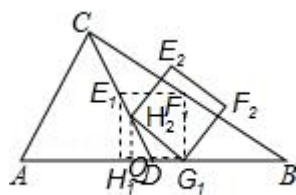
(3) 如图③, 作 $H_2Q \perp AB$ 于 Q ,

设 $DQ = m$, 则 $H_2Q = \sqrt{3}m$, 又 $DG_1 = \frac{1}{4}$, $H_2G_1 = \frac{1}{2}$.

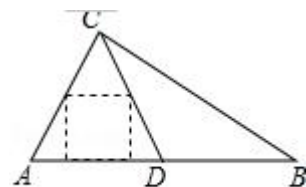
在 $\text{Rt}\triangle H_2QG_1$ 中, $(\sqrt{3}m)^2 + (m + \frac{1}{4})^2 = (\frac{1}{2})^2$,

解之得 $m = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{16}$ (负的舍去).

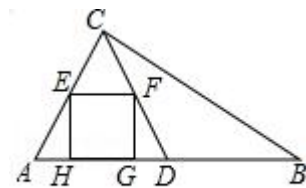
$$\therefore \cos \alpha = \frac{QG_1}{H_2G_1} = \frac{\frac{-1 + \sqrt{13}}{16} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3 + \sqrt{13}}{8}.$$



图③



图②



图①

参与本试卷答题和审题的老师有：sd2011； gbl210； CJX； 星期八； 弯弯的小河； 三界无我；
曹先生； 唐唐来了； zgm666； sks； wdzyszmsy@126.com； zcx； 星月相随； fangcao（排名不
分先后）

菁优网

2016 年 9 月 21 日