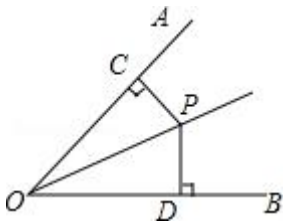


2016 年湖南省怀化市中考数学试卷

一、选择题：每小题 4 分，共 40 分

1. (4 分) $(-2)^2$ 的平方根是 ()
- A. 2 B. -2 C. ± 2 D. $\sqrt{2}$
2. (4 分) 某校进行书法比赛，有 39 名同学参加预赛，只能有 19 名同学参加决赛，他们预赛的成绩各不相同，其中一名同学想知道自己能否进入决赛，不仅要了解自己的预赛成绩，还要了解这 39 名同学预赛成绩的 ()
- A. 平均数 B. 中位数 C. 方差 D. 众数
3. (4 分) 下列计算正确的是 ()
- A. $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ B. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy - y^2$
- C. $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ D. $(x-1)^2 = x^2 - 1$
4. (4 分) 一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的根的情况为 ()
- A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根
- C. 只有一个实数根 D. 没有实数根
5. (4 分) 如图， OP 为 $\angle AOB$ 的角平分线， $PC \perp OA$ ， $PD \perp OB$ ，垂足分别是 C 、 D ，则下列结论错误的是 ()
- 
- A. $PC = PD$ B. $\angle CPD = \angle DOP$ C. $\angle CPO = \angle DPO$ D. $OC = OD$
6. (4 分) 不等式 $3(x-1) \leq 5-x$ 的非负整数解有 ()
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
7. (4 分) 二次函数 $y = x^2 + 2x - 3$ 的开口方向、顶点坐标分别是 ()
- A. 开口向上，顶点坐标为 $(-1, -4)$
- B. 开口向下，顶点坐标为 $(1, 4)$
- C. 开口向上，顶点坐标为 $(1, 4)$
- D. 开口向下，顶点坐标为 $(-1, -4)$
8. (4 分) 等腰三角形的两边长分别为 4cm 和 8cm ，则它的周长为 ()

- A. 16cm B. 17cm C. 20cm D. 16cm 或 20cm

9. (4分) 函数 $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \geq 1$ B. $x > 1$ C. $x \geq 1$ 且 $x \neq 2$ D. $x \neq 2$

10. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{4}{5}$, $AC = 6\text{cm}$, 则 BC 的长度为 ()

- A. 6cm B. 7cm C. 8cm D. 9cm

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分

11. (4分) 已知扇形的半径为 6cm, 面积为 $10\pi\text{cm}^2$, 则该扇形的弧长等于_____.

12. (4分) 旋转不改变图形的_____和_____.

13. (4分) 已知点 $P(3, -2)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象上, 则 $k =$ _____; 在第四象限, 函数值 y 随 x 的增大而_____.

14. (4分) 一个不透明的袋子, 装了除颜色不同, 其他没有任何区别的红色球 3 个, 绿色球 4 个, 黑色球 7 个, 黄色球 2 个, 从袋子中随机摸出一个球, 摸到黑色球的概率是_____.

三、解答题: 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分

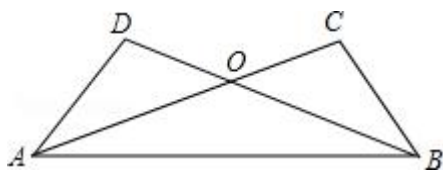
15. (8分) 计算: $2016^0 + 2|1 - \sin 30^\circ| - (\frac{1}{3})^{-1} + \sqrt{16}$.

16. (8分) 有若干只鸡和兔关在一个笼子里, 从上面数, 有 30 个头; 从下面数, 有 84 条腿, 问笼中各有几只鸡和兔?

17. (8分) 如图, 已知 $AD = BC$, $AC = BD$.

(1) 求证: $\triangle ADB \cong \triangle BCA$;

(2) OA 与 OB 相等吗? 若相等, 请说明理由.



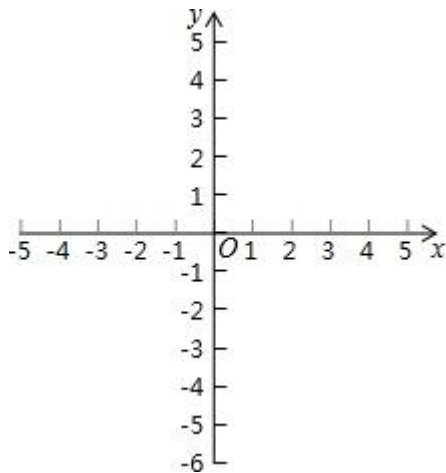
18. (8分) 已知一次函数 $y = 2x + 4$

(1) 在如图所示的平面直角坐标系中, 画出函数的图象;

(2) 求图象与 x 轴的交点 A 的坐标, 与 y 轴交点 B 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 求出 $\triangle AOB$ 的面积;

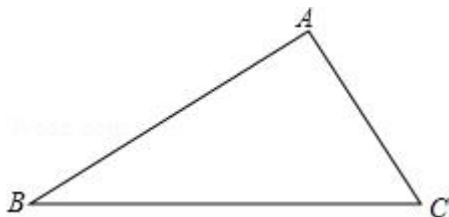
(4) 利用图象直接写出: 当 $y < 0$ 时, x 的取值范围.



19. (8分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$

(1) 先作 $\angle ACB$ 的平分线交 AB 边于点 P , 再以点 P 为圆心, PA 长为半径作 $\odot P$; (要求: 尺规作图, 保留作图痕迹, 不写作法)

(2) 请你判断 (1) 中 BC 与 $\odot P$ 的位置关系, 并证明你的结论.



20. (8分) 甲、乙两人都握有分别标记为 A 、 B 、 C 的三张牌, 两人做游戏, 游戏规则是:

若两人出的牌不同, 则 A 胜 B , B 胜 C , C 胜 A ; 若两人出的牌相同, 则为平局.

(1) 用树状图或列表等方法, 列出甲、乙两人一次游戏的所有可能的结果;

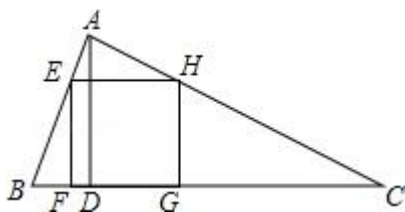
(2) 求出出现平局的概率.

21. (8分) 如图, $\triangle ABC$ 为锐角三角形, AD 是 BC 边上的高, 正方形 $EFGH$ 的一边 FG 在

BC 上, 顶点 E 、 H 分别在 AB 、 AC 上, 已知 $BC = 40\text{cm}$, $AD = 30\text{cm}$.

(1) 求证: $\triangle AEH \sim \triangle ABC$;

(2) 求这个正方形的边长与面积.



22. (8分) 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过 $A(-3, 0)$ 、 $B(5, 0)$ 、 $C(0, 5)$

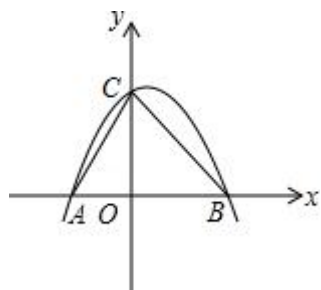
三点, O 为坐标原点.

(1) 求此抛物线的解析式；

(2) 若把抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 向下平移 $\frac{13}{3}$ 个单位长度，再向右平移 n ($n > 0$)

个单位长度得到新抛物线，若新抛物线的顶点 M 在 $\triangle ABC$ 内，求 n 的取值范围；

(3) 设点 P 在 y 轴上，且满足 $\angle OPA + \angle OCA = \angle CBA$ ，求 CP 的长.



2016 年湖南省怀化市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：每小题 4 分，共 40 分

1. 【分析】直接利用有理数的乘方化简，进而利用平方根的定义得出答案.

【解答】解： $\because (-2)^2 = 4$,

$\therefore 4$ 的平方根是： ± 2 .

故选：C.

【点评】此题主要考查了平方根，正确把握平方根的定义是解题关键.

2. 【分析】由于比赛取前 19 名参加决赛，共有 39 名选手参加，根据中位数的意义分析即可.

【解答】解：39 个不同的成绩按从小到大排序后，中位数及中位数之后的共有 19 个数，故只要知道自己的成绩和中位数就可以知道是否获奖了.

故选：B.

【点评】本题考查了中位数意义. 解题的关键是正确的求出这组数据的中位数.

3. 【分析】直接利用完全平方公式以及平方差公式分别计算得出答案.

【解答】解： A 、 $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ ，故此选项错误；

B 、 $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ ，故此选项错误；

C 、 $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ ，正确；

D 、 $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ ，故此选项错误；

故选：C.

【点评】此题主要考查了完全平方公式以及平方差公式，正确应用乘法公式是解题关键.

4. 【分析】先求出 Δ 的值，再判断出其符号即可.

【解答】解： $\because a = 1$ ， $b = -1$ ， $c = -1$ ，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ ，

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根，

故选：A.

【点评】本题考查的是根的判别式，熟知一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 Δ 的关系是解答此题的关键.

5. 【分析】先根据角平分线的性质得出 $PC = PD$ ，再利用 HL 证明 $\triangle OCP \cong \triangle ODP$ ，根据全等三角形的性质得出 $\angle CPO = \angle DPO$ ， $OC = OD$.

【解答】解：∵ OP 为 $\angle AOB$ 的角平分线， $PC \perp OA$ ， $PD \perp OB$ ，垂足分别是 C 、 D ，

∴ $PC = PD$ ，故 A 正确；

在 $\text{Rt}\triangle OCP$ 与 $\text{Rt}\triangle ODP$ 中，

$$\begin{cases} OP=OP \\ PC=PD \end{cases},$$

∴ $\triangle OCP \cong \triangle ODP$ ，

∴ $\angle CPO = \angle DPO$ ， $OC = OD$ ，故 C 、 D 正确．

不能得出 $\angle CPD = \angle DOP$ ，故 B 错误．

故选： B ．

【点评】本题考查了角平分线的性质：角的平分线上的点到角的两边的距离相等．也考查了全等三角形的判定与性质，得出 $PC = PD$ 是解题的关键．

6. 【分析】根据解不等式得基本步骤依次去括号、移项、合并同类项求得不等式的解集，在解集内找到非负整数即可．

【解答】解：去括号，得： $3x - 3 \leq 5 - x$ ，

移项、合并，得： $4x \leq 8$ ，

系数化为 1，得： $x \leq 2$ ，

∴ 不等式的非负整数解有 0、1、2 这 3 个，

故选： C ．

【点评】本题主要考查解不等式的基本技能和不等式的整数解，求出不等式的解集是解题的关键．

7. 【分析】根据 $a > 0$ 确定出二次函数开口向上，再将函数解析式整理成顶点式形式，然后写出顶点坐标．

【解答】解：∵ 二次函数 $y = x^2 + 2x - 3$ 的二次项系数为 $a = 1 > 0$ ，

∴ 函数图象开口向上，

$$\because y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4,$$

∴ 顶点坐标为 $(-1, -4)$ ．

故选： A ．

【点评】本题考查了二次函数的性质，主要是开口方向与顶点坐标的求解，熟记性质是解题的关键．

8. 【分析】根据等腰三角形的性质，本题要分情况讨论．当腰长为 4cm 或是腰长为 8cm 两

种情况.

【解答】解：等腰三角形的两边长分别为 4cm 和 8cm ,

当腰长是 4cm 时, 则三角形的三边是 4cm , 4cm , 8cm , $4\text{cm}+4\text{cm}=8\text{cm}$ 不满足三角形的三边关系;

当腰长是 8cm 时, 三角形的三边是 8cm , 8cm , 4cm , 三角形的周长是 20cm .

故选: C.

【点评】本题考查了等腰三角形的性质和三角形的三边关系; 已知没有明确腰和底边的题目一定要想到两种情况, 进行分类讨论, 还应验证各种情况是否能构成三角形进行解答, 这点非常重要, 也是解题的关键.

9. 【分析】根据分式的分母不为零、被开方数是非负数来求 x 的取值范围.

【解答】解：依题意得: $x-1 \geq 0$ 且 $x-2 \neq 0$,

解得 $x \geq 1$ 且 $x \neq 2$.

故选: C.

【点评】本题考查了函数自变量的取值范围. 本题属于易错题, 同学们往往忽略分母 $x-2 \neq 0$ 这一限制性条件而解错.

10. 【分析】根据三角函数的定义求得 BC 和 AB 的比值, 设出 BC 、 AB , 然后利用勾股定理即可求解.

【解答】解: $\because \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$,

$\therefore$ 设 $BC = 4x$, $AB = 5x$,

又 $\because AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$\therefore 6^2 + (4x)^2 = (5x)^2$,

解得: $x = 2$ 或 $x = -2$ (舍),

则 $BC = 4x = 8\text{cm}$,

故选: C.

【点评】本题考查了三角函数与勾股定理, 正确理解三角函数的定义是关键.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分

11. 【分析】设扇形的弧长为 $l\text{cm}$, 再由扇形的面积公式即可得出结论.

【解答】解: 设扇形的弧长为 $l\text{cm}$,

$\therefore$ 扇形的半径为 6cm , 面积为 $10\pi\text{cm}^2$,

$$\therefore \frac{1}{2}l \times 6 = 10\pi, \text{ 解得 } l = \frac{10\pi}{3} \text{ cm}.$$

故答案为: $\frac{10\pi}{3} \text{ cm}$.

【点评】 本题考查的是扇形面积的计算, 熟记扇形的面积公式是解答此题的关键.

12. **【分析】** 根据旋转的性质 (旋转不改变图形的大小与形状, 只改变图形的位置. 也就是旋转前后图形全等, 对应点与旋转中心所连线段间的夹角为旋转角) 即可得出答案.

【解答】 解: 旋转不改变图形的形状和大小, 只改变图形的位置,

故答案为: 形状, 大小.

【点评】 本题考查了有关旋转的性质的应用, 注意: (1) 旋转是指一个图形绕一点沿一定方向旋转一定的角度, 它有三要素: ①旋转中心 (绕着转的那个点), ②旋转方向 (顺时针还是逆时针) ③旋转的角度; (2) 旋转的性质是: ①旋转不改变图形的大小与形状, 只改变图形的位置, 也就是旋转前后图形全等; ②对应点与旋转中心所连线段间的夹角为旋转角.

13. **【分析】** 由点的坐标结合反比例函数图象上点的坐标特征可求出 k 值, 根据 k 值结合反比例函数的性质即可得出其函数图象在每个象限内的增减性, 由此即可得出结论.

【解答】 解: $\because$ 点 $P(3, -2)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象上,

$$\therefore k = 3 \times (-2) = -6.$$

$$\therefore k = -6 < 0,$$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{-6}{x}$ 的图象在第二、四象限, 且在每个象限内均单增,

$\therefore$ 在第四象限, 函数值 y 随 x 的增大而增大.

故答案为: -6 ; 增大.

【点评】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征以及反比例函数的性质, 解题的关键是求出 k 值. 本题属于基础题, 难度不大, 解决该题型题目时, 由点的坐标利用反比例函数图象上点的坐标特征求出反比例函数系数 k 是关键.

14. **【分析】** 先求出球的总数, 再根据概率公式即可得出结论.

【解答】 解: $\because$ 红色球 3 个, 绿色球 4 个, 黑色球 7 个, 黄色球 2 个,

$$\therefore \text{球的总数} = 3 + 4 + 7 + 2 = 16,$$

$$\therefore \text{摸到黑色球的概率} = \frac{7}{16}.$$

故答案为: $\frac{7}{16}$.

【点评】 本题考查的是概率公式, 熟知随机事件 A 的概率 $P(A)$ = 事件 A 可能出现的结果数与所有可能出现的结果数的商是解答此题的关键.

三、解答题: 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分

15. **【分析】** 根据实数的运算顺序, 首先计算乘方、开方, 然后计算乘法, 最后从左向右依次计算, 求出算式 $2016^0 + 2|1 - \sin 30^\circ| - (\frac{1}{3})^{-1} + \sqrt{16}$ 的值是多少即可.

【解答】 解: $2016^0 + 2|1 - \sin 30^\circ| - (\frac{1}{3})^{-1} + \sqrt{16}$

$$= 1 + 2 \times |1 - \frac{1}{2}| - 3 + 4$$
$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 1$$
$$= 1 + 1 + 1$$
$$= 3.$$

【点评】 (1) 此题主要考查了实数的运算, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: 在进行实数运算时, 和有理数运算一样, 要从高级到低级, 即先算乘方、开方, 再算乘除, 最后算加减, 有括号的要先算括号里面的, 同级运算要按照从左到右的顺序进行. 另外, 有理数的运算律在实数范围内仍然适用.

(2) 此题还考查了零指数幂的运算, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: ① $a^0 = 1$ ($a \neq 0$); ② $0^0 \neq 1$.

(3) 此题还考查了特殊角的三角函数值, 要牢记 30° 、 45° 、 60° 角的各种三角函数值.

(4) 此题还考查了负整数指数幂的运算, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: ① $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$, p 为正整数); ② 计算负整数指数幂时, 一定要根据负整数指数幂的意义计算; ③ 当底数是分数时, 只要把分子、分母颠倒, 负指数就可变为正指数.

16. **【分析】** 设这个笼中的鸡有 x 只, 兔有 y 只, 根据“从上面数, 有 30 个头; 从下面数, 有 84 条腿”列出方程组, 解方程组即可.

【解答】 解: 设这个笼中的鸡有 x 只, 兔有 y 只,

根据题意得:
$$\begin{cases} x+y=30 \\ 2x+4y=84 \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} x=18 \\ y=12 \end{cases};$$

答: 笼子里鸡有 18 只, 兔有 12 只.

【点评】此题考查了二元一次方程组的应用；根据题意列出方程组是解决问题的关键的关键；注意鸡有两只脚，兔有四只脚．

17. 【分析】（1）根据 SSS 定理推出全等即可；

（2）根据全等得出 $\angle OAB = \angle OBA$ ，根据等角对等边得出即可．

【解答】（1）证明： $\because$ 在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle BCA$ 中，

$$\begin{cases} AD=BC \\ AB=BA, \\ BD=AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle BCA$ (SSS);

（2）解： $OA = OB$,

理由是： $\because \triangle ADB \cong \triangle BCA$,

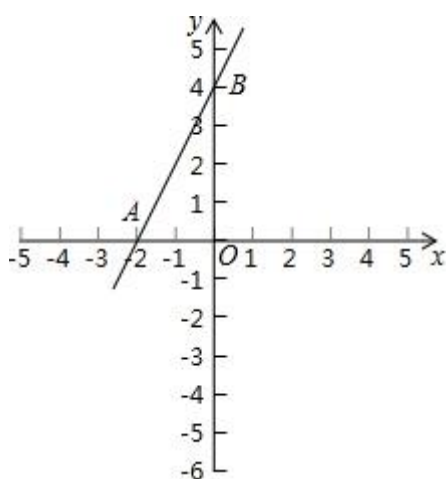
$\therefore \angle ABD = \angle BAC$,

$\therefore OA = OB$.

【点评】本题考查了全等三角形的性质和判定，等腰三角形的判定的应用，能正确运用定理进行推理是解此题的关键．

18. 【分析】（1）利用两点法就可以画出函数图象；（2）利用函数解析式分别代入 $x = 0$ 与 $y = 0$ 的情况就可以求出交点坐标；（3）通过交点坐标就能求出面积；（4）观察函数图象与 x 轴的交点就可以得出结论．

【解答】解：（1）当 $x = 0$ 时 $y = 4$ ，当 $y = 0$ 时， $x = -2$ ，则图象如图所示



（2）由上题可知 $A(-2, 0)$ $B(0, 4)$,

（3） $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$,

(4) $x < -2$.

【点评】 本题考查了一次函数的图象和一次函数图象上点的坐标特征. 正确求出一次数与 x 轴与 y 轴的交点是解题的关键.

19. **【分析】** (1) 根据题意作出图形, 如图所示;

(2) BC 与 $\odot P$ 相切, 理由为: 过 P 作 $PD \perp BC$, 交 BC 于点 P , 利用角平分线定理得到 $PD = PA$, 而 PA 为圆 P 的半径, 即可得证.

【解答】 解: (1) 如图所示, $\odot P$ 为所求的圆;

(2) BC 与 $\odot P$ 相切, 理由为:

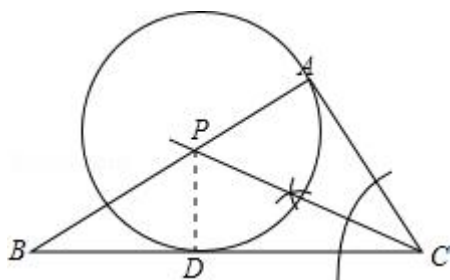
过 P 作 $PD \perp BC$, 垂足为 D ,

$\because CP$ 为 $\angle ACB$ 的平分线, 且 $PA \perp AC$, $PD \perp CB$,

$\therefore PD = PA$,

$\because PA$ 为 $\odot P$ 的半径.

$\therefore BC$ 与 $\odot P$ 相切.

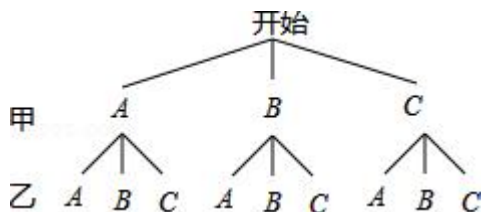


【点评】 此题考查了直线与圆的位置关系, 以及作图 - 复杂作图, 证明切线的方法有两种: 一种是连接证明垂直; 一种是作垂线, 证明垂线段等于半径.

20. **【分析】** (1) 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果;

(2) 由 (1) 可求得出现平局的情况, 再利用概率公式求解即可求得答案.

【解答】 解: (1) 画树状图得:



则共有 9 种等可能的结果;

(2) $\because$ 出现平局的有 3 种情况,

∴ 出现平局的概率为： $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

【点评】 此题考查了列表法或树状图法求概率. 用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比.

21. **【分析】** (1) 根据 $EH \parallel BC$ 即可证明.

(2) 如图设 AD 与 EH 交于点 M , 首先证明四边形 $EFDM$ 是矩形, 设正方形边长为 x , 再利用 $\triangle AEH \sim \triangle ABC$, 得 $\frac{EH}{BC} = \frac{AM}{AD}$, 列出方程即可解决问题.

【解答】 (1) 证明: ∵ 四边形 $EFGH$ 是正方形,

∴ $EH \parallel BC$,

∴ $\angle AEH = \angle B$, $\angle AHE = \angle C$,

∴ $\triangle AEH \sim \triangle ABC$.

(2) 解: 如图设 AD 与 EH 交于点 M .

∵ $\angle EFD = \angle FEM = \angle FDM = 90^\circ$,

∴ 四边形 $EFDM$ 是矩形,

∴ $EF = DM$, 设正方形 $EFGH$ 的边长为 x ,

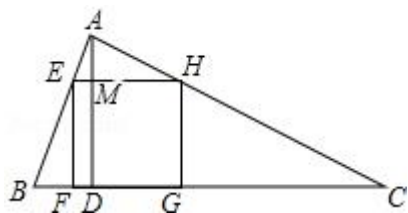
∵ $\triangle AEH \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{EH}{BC} = \frac{AM}{AD},$$

$$\therefore \frac{x}{40} = \frac{30-x}{30},$$

$$\therefore x = \frac{120}{7},$$

∴ 正方形 $EFGH$ 的边长为 $\frac{120}{7} \text{ cm}$, 面积为 $\frac{14400}{49} \text{ cm}^2$.



【点评】 本题考查正方形的性质、相似三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是利用相似三角形的相似比对于高的比, 学会用方程的思想解决问题, 属于中考常考题型.

22. **【分析】** (1) 根据 A 、 B 、 C 三点的坐标, 利用待定系数法可求得抛物线的解析式;

(2) 可先求得抛物线的顶点坐标, 再利用坐标平移, 可得平移后的坐标为 $(1+n, 1)$,

再由 B 、 C 两点的坐标可求得直线 BC 的解析式, 可求得 $y = 1$ 时, 对应的 x 的值, 从而

可求得 n 的取值范围;

(3) 当点 P 在 y 轴负半轴上时, 过 P 作 $PD \perp AC$, 交 AC 的延长线于点 D , 根据条件可知 $\angle PAD = 45^\circ$, 设 $PD = DA = m$, 由 $\triangle COA \sim \triangle CDP$, 可求出 m 和 PC 的长, 此时可求得 $PO = 12$, 利用等腰三角形的性质, 可知当 P 点在 y 轴正半轴上时, 则有 $OP = 12$, 从而可求得 $PC = 5$.

【解答】解:

(1) 把 A 、 B 、 C 三点的坐标代入函数解析式可得

$$\begin{cases} 9a-3b+c=0 \\ 25a+5b+c=0 \\ c=5 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=5 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 5$;

$$(2) \because y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 5,$$

$\therefore$ 抛物线顶点坐标为 $(1, \frac{16}{3})$,

$\therefore$ 当抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 向下平移 $\frac{13}{3}$ 个单位长度, 再向右平移 n ($n > 0$) 个单位长度后, 得到的新抛物线的顶点 M 坐标为 $(1+n, 1)$,

设直线 BC 解析式为 $y = kx + m$, 把 B 、 C 两点坐标代入可得 $\begin{cases} 5k+m=0 \\ m=5 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k=-1 \\ m=5 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -x + 5$,

令 $y = 1$, 代入可得 $1 = -x + 5$, 解得 $x = 4$,

$\therefore$ 新抛物线的顶点 M 在 $\triangle ABC$ 内,

$\therefore 1+n < 4$, 且 $n > 0$, 解得 $0 < n < 3$,

即 n 的取值范围为 $0 < n < 3$;

(3) 当点 P 在 y 轴负半轴上时, 如图 1, 过 P 作 $PD \perp AC$, 交 AC 的延长线于点 D ,

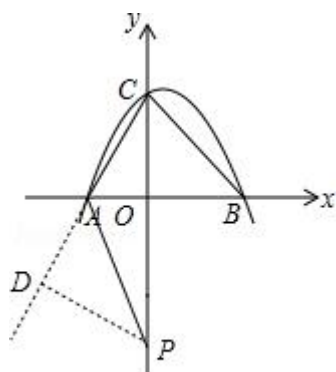


图1

由题意可知 $OB = OC = 5$,

$$\therefore \angle CBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PAD = \angle OPA + \angle OCA = \angle CBA = 45^\circ,$$

$$\therefore AD = PD,$$

在 $\text{Rt}\triangle OAC$ 中, $OA = 3$, $OC = 5$, 可求得 $AC = \sqrt{34}$,

设 $PD = AD = m$, 则 $CD = AC + AD = \sqrt{34} + m$,

$$\because \angle ACO = \angle PCD, \angle COA = \angle PDC,$$

$$\therefore \triangle COA \sim \triangle CDP,$$

$$\therefore \frac{CO}{CD} = \frac{AO}{PD} = \frac{AC}{PC}, \text{ 即 } \frac{5}{\sqrt{34}+m} = \frac{3}{m} = \frac{\sqrt{34}}{PC},$$

$$\text{由 } \frac{5}{\sqrt{34}+m} = \frac{3}{m} \text{ 可求得 } m = \frac{3\sqrt{34}}{2},$$

$$\therefore \frac{3}{\frac{3\sqrt{34}}{2}} = \frac{\sqrt{34}}{PC}, \text{ 解得 } PC = 17;$$

可求得 $PO = PC - OC = 17 - 5 = 12$,

如图 2, 在 y 轴正半轴上截取 $OP' = OP = 12$, 连接 AP' ,

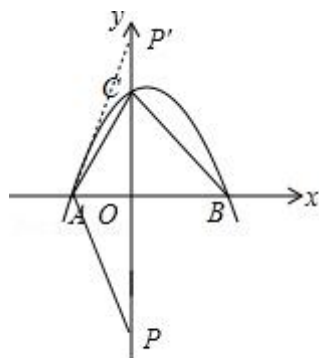


图2

则 $\angle OP'A = \angle OPA$,

$$\therefore \angle OP'A + \angle OCA = \angle OPA + \angle OCA = \angle CBA,$$

$\therefore P'$ 也满足题目条件, 此时 $P'C = OP' - OC = 12 - 5 = 7$,

综上所述 PC 的长为 7 或 17.

【点评】 本题主要考查二次函数的综合应用, 涉及到的知识点有待定系数法、坐标的平移、三角形的外角、等腰三角形的性质、相似三角形的判定和性质以及分类讨论等. 在 (2) 中确定出 M 点向右平移的最大位置是解题的关键, 在 (3) 中利用 $\angle OPA + \angle OCA = \angle CBA = 45^\circ$ 构造三角形相似是解题的关键. 本题目考查知识点多, 综合性强, 特别是第 (3) 问难度很大.