

2015 年湖南省长沙市中考数学试卷

一、选择题（共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分）

1. (3 分) (2015•长沙) 下列实数中，为无理数的是 ()

- A 0.2 B $\frac{1}{2}$ C $\sqrt{2}$ D -5

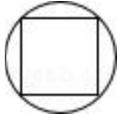
2. (3 分) (2015•长沙) 下列运算中，正确的是 ()

- A $x^3+x=x^4$ B $(x^2)^3=x^6$ C $3x-2x=1$ D $(a-b)^2=a^2-b^2$

3. (3 分) (2015•长沙) 2014 年，长沙地铁 2 号线的开通运营，极大地缓解了城市中心的交通压力，为我市再次获评“中国最具幸福感城市”提供了有力支撑，据统计，长沙地铁 2 号线每天承动力约为 185000 人次，则数据 185000 用科学记数法表示为 ()

- A 1.85×10^5 B 1.85×10^4 C 1.8×10^5 D 18.5×10^4

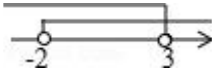
4. (3 分) (2015•长沙) 下列图形中，是轴对称图形，但不是中心对称图形的是 ()

- A  B  C  D 

5. (3 分) (2015•长沙) 下列命题中，为真命题的是 ()

- A 六边形的内角和为 360 度 B 多边形的外角和与边数有关
C 矩形的对角线互相垂直 D 三角形两边的和大于第三边

6. (3 分) (2015•长沙) 在数轴上表示不等式组 $\begin{cases} 2+x > 0 \\ 2x-6 \leq 0 \end{cases}$ 的解集，正确的是 ()

- A  B  C  D 

7. (3 分) (2015•长沙) 一家鞋店在一段时间内销售了某种女鞋 30 双，各种尺码鞋的销售量如下表所示，你认为商家更应该关注鞋子尺码的 ()

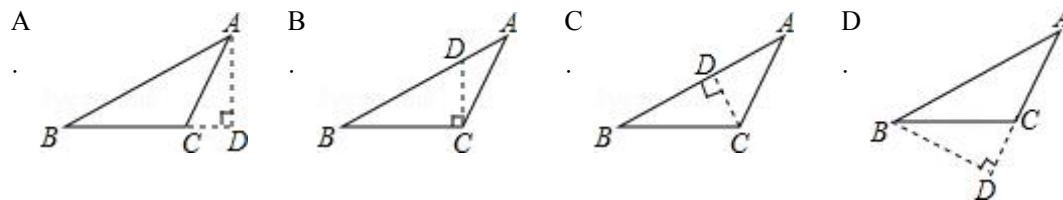
尺码/cm	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25
销售量/双	4	6	6	10	2	1	1

- A 平均数 B 中位数 C 众数 D 方差

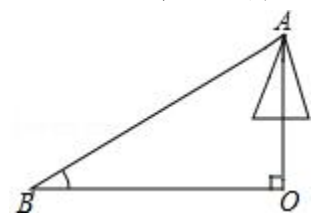
8. (3分) (2015•长沙) 下列说法中正确的是 ()
- A. “打开电视机, 正在播放《动物世界》”是必然事件
- B. 某种彩票的中奖概率为 $\frac{1}{1000}$, 说明每买 1000 张, 一定有一张中奖
- C. 抛掷一枚质地均匀的硬币一次, 出现正面朝上的概率为 $\frac{1}{3}$
- D. 想了解长沙市所有城镇居民的人均年收入水平, 宜采用抽样调查

9. (3分) (2015•长沙) 一次函数 $y = -2x + 1$ 的图象不经过 ()
- A 第一象限 B 第二象限 C 第三象限 D 第四象限

10. (3分) (2015•长沙) 如图, 过 $\triangle ABC$ 的顶点 A, 作 BC 边上的高, 以下作法正确的是 ()



11. (3分) (2015•长沙) 如图, 为测量一棵与地面垂直的树 OA 的高度, 在距离树的底端 30 米的 B 处, 测得树顶 A 的仰角 $\angle ABO$ 为 α , 则树 OA 的高度为 ()



- A $\frac{30}{\tan \alpha}$ 米 B $30 \sin \alpha$ 米 C $30 \tan \alpha$ 米 D $30 \cos \alpha$ 米

12. (3分) (2015•长沙) 长沙红星大市场某种高端品牌的家用电器, 若按标价打八折销售该电器一件, 则可获利润 500 元, 其利润率为 20%. 现如果按同一标价打九折销售该电器一件, 那么获得的纯利润为 ()

- A 562.5 元 B 875 元 C 550 元 D 750 元

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

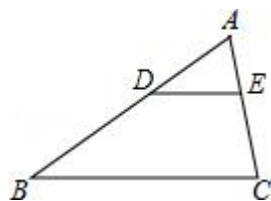
13. (3分) (2015•长沙) 一个不透明的袋子中只装有 3 个黑球, 2 个白球, 这些球的形状、大小、质地等完全相同, 即除颜色外无其他差别. 在看不到球的条件下, 随机从袋中摸出 1 个球, 则摸出白球的概率是_____.

14. (3分) (2015•长沙) 圆心角是 60° 且半径为 2 的扇形面积为_____ (结果保留 π).

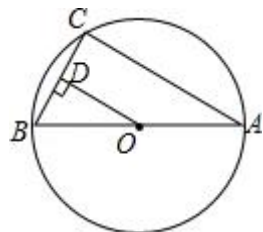
15. (3分) (2015•长沙) 把 $\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ 进行化简, 得到的最简结果是_____ (结果保留根号).

16. (3分) (2015•长沙) 分式方程 $\frac{5}{x} - \frac{7}{x-2}$ 的解是 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. (3分) (2015•长沙) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$, $DE = 6$, 则 BC 的长是_____.



18. (3分) (2015•长沙) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 是 $\odot O$ 上的一点, 若 $BC = 6$, $AB = 10$, $OD \perp BC$ 于点 D , 则 OD 的长为_____.



三、解答题 (共 8 小题, 第 19、20 题每小题 6 分, 第 21、22 题每小题 6 分, 第 23、24 题每小题 6 分, 第 25、26 题每小题 6 分, 满分 66 分. 解答应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. (6分) (2015•长沙) 计算: $(\frac{1}{2})^{-1} + 4\cos 60^\circ - |-3| + \sqrt{9}$.

20. (6分) (2015•长沙) 先化简, 再求值: $(x+y)(x-y) - x(x+y) + 2xy$, 其中 $x = (3 - \pi)^0$, $y = 2$.

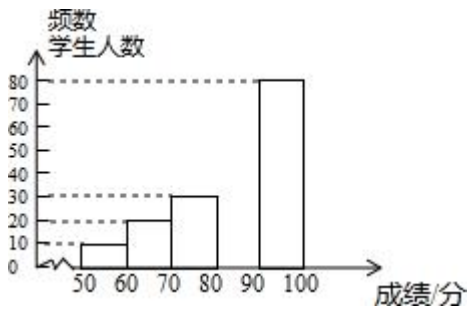
21. (8分) (2015•长沙) 中华文明, 源远流长: 中华汉字, 寓意深广, 为了传承优秀传统文化, 某校团委组织了一次全校 3000 名学生参加的“汉字听写”大赛, 赛后发现所有参赛学生的成绩均不低于 50 分. 为了更好地了解本次大赛的成绩分布情况, 随机抽取了其中 200 名学生的成绩 (成绩 x 取整数, 总分 100 分) 作为样本进行整理, 得到下列不完整的统计图表:

成绩 x /分	频数	频率
$50 \leq x < 60$	10	0.05
$60 \leq x < 70$	20	0.10
$70 \leq x < 80$	30	b

$80 \leq x < 90$	a	0.30
$90 \leq x \leq 100$	80	0.40

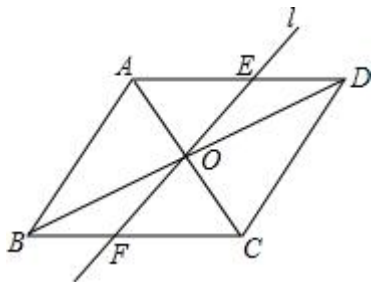
请根据所给信息，解答下列问题：

- (1) $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) 请补全频数分布直方图;
- (3) 这次比赛成绩的中位数会落在 $\underline{\hspace{2cm}}$ 分数段;
- (4) 若成绩在 90 分以上 (包括 90 分) 的为“优”等, 则该校参加这次比赛的 3000 名学生中成绩“优”等约有多少人?



22. (8 分) (2015•长沙) 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $\angle ABC=60^\circ$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 将对角线 AC 所在的直线绕点 O 顺时针旋转角 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 后得直线 l , 直线 l 与 AD 、 BC 两边分别相交于点 E 和点 F .

- (1) 求证: $\triangle AOE \cong \triangle COF$;
- (2) 当 $\alpha=30^\circ$ 时, 求线段 EF 的长度.

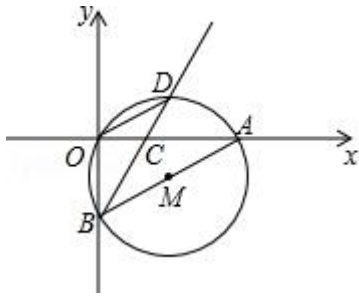


23. (9 分) (2015•长沙) 现代互联网技术的广泛应用, 催生了快递行业的高度发展, 据调查, 长沙市某家小型“大学生自主创业”的快递公司, 今年三月份与五月份完成投递的快递总件数分别为 10 万件和 12.1 万件, 现假定该公司每月投递的快递总件数的增长率相同.

- (1) 求该快递公司投递总件数的月平均增长率;
- (2) 如果平均每人每月最多可投递 0.6 万件, 那么该公司现有的 21 名快递投递业务员能否完成今年 6 月份的快递投递任务? 如果不能, 请问至少需要增加几名业务员?

24. (9 分) (2015•长沙) 如图, 在直角坐标系中, $\odot M$ 经过原点 $O(0, 0)$, 点 $A(\sqrt{6}, 0)$ 与点 $B(0, -\sqrt{2})$, 点 D 在劣弧 $\widehat{OA}$ 上, 连接 BD 交 x 轴于点 C , 且 $\angle COD = \angle CBO$.

- (1) 求 $\odot M$ 的半径;
- (2) 求证: BD 平分 $\angle ABO$;
- (3) 在线段 BD 的延长线上找一点 E , 使得直线 AE 恰好为 $\odot M$ 的切线, 求此时点 E 的坐标.



25. (10 分) (2015•长沙) 在直角坐标系中, 我们不妨将横坐标, 纵坐标均为整数的点称之为“中国结”.

(1) 求函数 $y=\sqrt{3}x+2$ 的图象上所有“中国结”的坐标;

(2) 若函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$, k 为常数) 的图象上有且只有两个“中国结”, 试求出常数 k 的值与相应“中国结”的坐标;

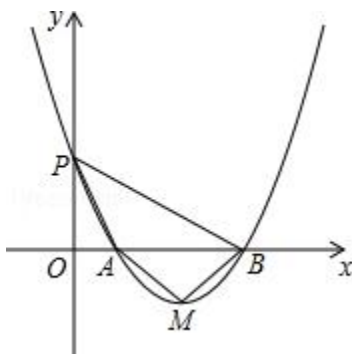
(3) 若二次函数 $y=(k^2-3k+2)x^2+(2k^2-4k+1)x+k^2-k$ (k 为常数) 的图象与 x 轴相交得到两个不同的“中国结”, 试问该函数的图象与 x 轴所围成的平面图形中 (含边界), 一共包含有多少个“中国结”?

26. (10 分) (2015•长沙) 若关于 x 的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$, $c>0$, a , b , c 是常数) 与 x 轴交于两个不同的点 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ ($0<x_1<x_2$), 与 y 轴交于点 P , 其图象顶点为点 M , 点 O 为坐标原点.

(1) 当 $x_1=c=2$, $a=\frac{1}{3}$ 时, 求 x_2 与 b 的值;

(2) 当 $x_1=2c$ 时, 试问 $\triangle ABM$ 能否为等边三角形? 判断并证明你的结论;

(3) 当 $x_1=mc$ ($m>0$) 时, 记 $\triangle MAB$, $\triangle PAB$ 的面积分别为 S_1 , S_2 , 若 $\triangle BPO \sim \triangle PAO$, 且 $S_1=S_2$, 求 m 的值.



2015 年湖南省长沙市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分）

1. (3 分) (2015•长沙) 下列实数中，为无理数的是 ()

A 0.2

B $\frac{1}{2}$

C $\sqrt{2}$

D -5

考点：无理数.

分析：有理数能写成有限小数和无限循环小数，而无理数只能写成无限不循环小数，据此判断出无理数有哪些即可.

解答：解：∵ -5 是整数，

∴ -5 是有理数；

∴ 0.2 是有限小数，

∴ 0.2 是有理数；

∴ $\frac{1}{2}=0.5$ ，0.5 是有限小数，

∴ $\frac{1}{2}$ 是有理数；

∴ $\sqrt{2}=1.414\cdots$ 是无限不循环小数，

∴ $\sqrt{2}$ 是无理数.

故选：C.

点评：此题主要考查了无理数和有理数的特征和区别，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：有理数能写成有限小数和无限循环小数，而无理数只能写成无限不循环小数.

2. (3 分) (2015•长沙) 下列运算中，正确的是 ()

A $x^3+x=x^4$

B $(x^2)^3=x^6$

C $3x-2x=1$

D $(a-b)^2=a^2-b^2$

考点：幂的乘方与积的乘方；合并同类项；完全平方公式.

分析：根据同类项、幂的乘方和完全平方公式计算即可.

解答：解：A、 x^3 与 x 不能合并，错误；

B、 $(x^2)^3=x^6$ ，正确；

C、 $3x-2x=x$ ，错误；

D、 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ，错误；

故选 B

点评：此题考查同类项、幂的乘方和完全平方公式，关键是根据法则进行计算.

3. (3 分) (2015•长沙) 2014 年，长沙地铁 2 号线的开通运营，极大地缓解了城市中心的交通压力，为我市再次获评“中国最具幸福感城市”提供了有力支撑，据统计，长沙地铁 2 号线每天承动力约为 185000 人次，则数据 185000 用科学记数法表示为 ()

A 1.85×10^5

B 1.85×10^4

C 1.8×10^5

D 18.5×10^4

考点：科学记数法—表示较大的数.

分析：科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

解答：解：将 185000 用科学记数法表示为 1.85×10^5 .
故选 A.

点评：此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. (3 分) (2015•长沙) 下列图形中，是轴对称图形，但不是中心对称图形的是 ()



考点：中心对称图形；轴对称图形.

分析：根据轴对称图形和中心对称图形的定义可直接得到答案.

解答：解：A、既是轴对称图形也是中心对称图形，故此选项错误；
B、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项正确；
C、既是轴对称图形也是中心对称图形，故此选项错误；
D、既是轴对称图形也是中心对称图形，故此选项错误；
故选：B.

点评：此题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：
轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；
中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合.

5. (3 分) (2015•长沙) 下列命题中，为真命题的是 ()

- A 六边形的内角和为 360 度 B 多边形的外角和与边数有关
C 矩形的对角线互相垂直 D 三角形两边的和大于第三边

考点：命题与定理.

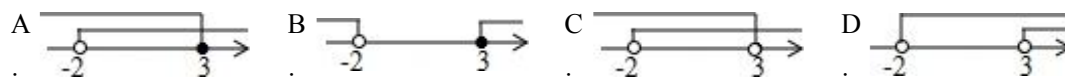
分析：根据六边形的内角和、多边形的外角和、矩形的性质和三角形三边关系判断即可.

解答：解：A、六边形的内角和为 720° ，错误；
B、多边形的外角和与边数无关，都等于 360° ，错误；
C、矩形的对角线相等，错误；
D、三角形的两边之和大于第三边，正确；
故选 D.

点评：本题考查命题的真假性，是易错题.

注意对六边形的内角和、多边形的外角和、矩形的性质和三角形三边关系的准确掌握.

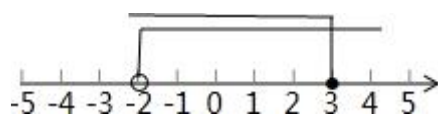
6. (3分) (2015•长沙) 在数轴上表示不等式组 $\begin{cases} 2+x>0 \\ 2x-6\leq 0 \end{cases}$ 的解集, 正确的是 ()



考点: 在数轴上表示不等式的解集; 解一元一次不等式组.

分析: 先求出不等式组中每一个不等式的解集, 再求出它们的公共部分, 然后把不等式的解集表示在数轴上即可. 本题解不等式组得: $\begin{cases} x>-2 \\ x\leq 3 \end{cases}$, 再分别表示在数轴上即可得解.

解答: 解: 由 $x+2>0$ 得 $x>-2$,
由 $2x-6\leq 0$, 得 $x\leq 3$,
把解集画在数轴上为:



故选 A.

点评: 本题考查了解一元一次不等式组以及在数轴上表示不等式组的解集, 把每个不等式的解集在数轴上表示出来 ($>$, $\geq$ 向右画; $<$, $\leq$ 向左画), 数轴上表示出来 ($>$, $\geq$ 向右画; $<$, $\leq$ 向左画), 数轴上的点把数轴分成若干段, 如果数轴的某一段上面表示解集的线的条数与不等式的个数一样, 那么这段就是不等式组的解集. 有几个就要几个. 在表示解集时“ $\geq$ ”, “ $\leq$ ”要用实心圆点表示; “ $<$ ”, “ $>$ ”要用空心圆点表示.

7. (3分) (2015•长沙) 一家鞋店在一段时间内销售了某种女鞋 30 双, 各种尺码鞋的销售量如下表所示, 你认为商家更应该关注鞋子尺码的 ()

尺码/cm	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25
销售量/双	4	6	6	10	2	1	1

A 平均数 B 中位数 C 众数 D 方差

考点: 统计量的选择.

分析: 根据平均数、中位数、众数、方差的意义分析判断即可, 得出鞋店老板最关心的数据.

解答: 解: $\because$ 众数体现数据的最集中的一点, 这样可以确定进货的数量,
 $\therefore$ 鞋店最喜欢的是众数.
故选: C.

点评: 此题主要考查了统计的有关知识, 主要是众数的意义. 反映数据集中程度的统计量有平均数、中位数、众数、方差等, 各有局限性, 因此要对统计量进行合理的选择和恰当的运用.

8. (3分) (2015•长沙) 下列说法中正确的是 ()

A “打开电视机, 正在播放《动物世界》”是必然事件

B 某种彩票的中奖概率为 $\frac{1}{1000}$ ，说明每买 1000 张，一定有一张中奖

C 抛掷一枚质地均匀的硬币一次，出现正面朝上的概率为 $\frac{1}{3}$

D 想了解长沙市所有城镇居民的人均年收入水平，宜采用抽样调查

考点：概率的意义；全面调查与抽样调查；随机事件；概率公式.

分析：根据随机事件，可判断 A；根据概率的意义，可判断 B、C；根据调查方式，可判断 D.

解答：解：A、“打开电视机，正在播放《动物世界》”是随机事件，故 A 错误；

B、某种彩票的中奖概率为 $\frac{1}{1000}$ ，说明每买 1000 张，有可能中奖，也有可能不中奖，故 B 错误；

C、抛掷一枚质地均匀的硬币一次，出现正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}$ ，故 C 错误；

D、想了解长沙市所有城镇居民的人均年收入水平，宜采用抽样调查，故 D 正确；
故选：D.

点评：本题考查了全面调查与抽样调查，正确区分全面调查与抽样调查是解题关键，注意概率时事件发生可能性的大小，并不一定发生.

9. (3 分) (2015•长沙) 一次函数 $y = -2x + 1$ 的图象不经过 ()

A 第一象限

B 第二象限

C 第三象限

D 第四象限

考点：一次函数图象与系数的关系.

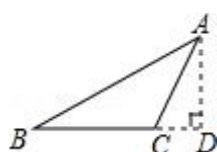
分析：先根据一次函数 $y = -2x + 1$ 中 $k = -2$ ， $b = 1$ 判断出函数图象经过的象限，进而可得出结论.

解答：解： $\because$ 一次函数 $y = -2x + 1$ 中 $k = -2 < 0$ ， $b = 1 > 0$ ，
 $\therefore$ 此函数的图象经过一、二、四象限，不经过第三象限.
故选 C

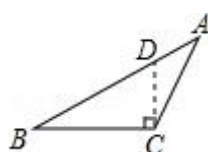
点评：本题考查的是一次函数的性质，即一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 中，当 $k < 0$ ， $b > 0$ 时，函数图象经过一、二、四象限.

10. (3 分) (2015•长沙) 如图，过 $\triangle ABC$ 的顶点 A，作 BC 边上的高，以下作法正确的是 ()

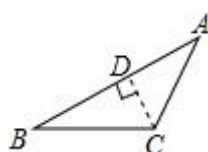
A



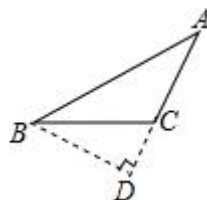
B



C



D



考点：三角形的角平分线、中线和高的.

分析：根据三角形高线的定义：过三角形的顶点向对边引垂线，顶点和垂足之间的线段叫做

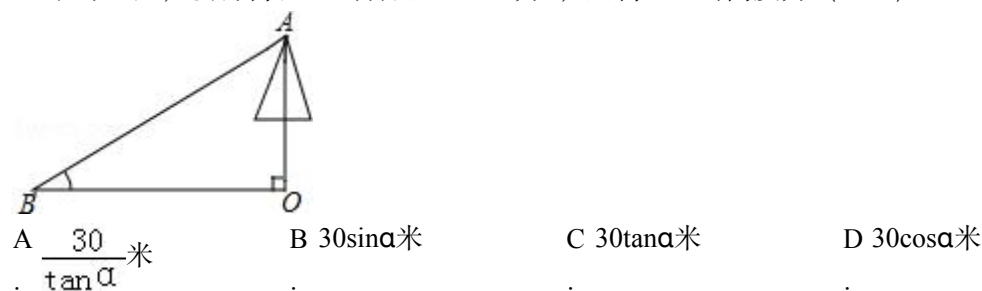
三角形的高线解答.

解答: 解: 为 $\triangle ABC$ 中BC边上的高的是A选项.

故选A.

点评: 本题考查了三角形的角平分线、中线、高线, 熟记高线的定义是解题的关键.

11. (3分) (2015•长沙) 如图, 为测量一棵与地面垂直的树OA的高度, 在距离树的底端30米的B处, 测得树顶A的仰角 $\angle ABO$ 为 α , 则树OA的高度为 ()



考点: 解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

分析: 根据题意, 在 $Rt\triangle ABO$ 中, $BO=30$ 米, $\angle ABO$ 为 α , 利用三角函数求解.

解答: 解: 在 $Rt\triangle ABO$ 中,

$\because BO=30$ 米, $\angle ABO$ 为 α ,

$\therefore AO=BO\tan \alpha=30\tan \alpha$ (米).

故选C.

点评: 本题考查了解直角三角形的应用, 解答本题的关键是根据仰角构造直角三角形, 利用三角函数求解.

12. (3分) (2015•长沙) 长沙红星大市场某种高端品牌的家用电器, 若按标价打八折销售该电器一件, 则可获利润500元, 其利润率为20%. 现如果按同一标价打九折销售该电器一件, 那么获得的纯利润为 ()

- A 562.5元 B 875元 C 550元 D 750元

考点: 一元一次方程的应用.

分析: 设进价为x元, 则该商品的标价为1.5x元, 根据“按标价打八折销售该电器一件, 则可获利润500元”可以得到x的值; 然后计算打九折销售该电器一件所获得的利润.

解答: 解: 设进价为x元, 则该商品的标价为1.5x元, 由题意得

$$1.5x \times 0.8 - x = 500,$$

解得: $x=2500$.

则标价为 $1.5 \times 2500 = 3750$ (元).

则 $3750 \times 0.9 - 2500 = 875$ (元).

故选: B.

点评: 此题考查一元一次方程的实际运用, 掌握销售中的基本数量关系是解决问题的关键.

二、填空题 (共6小题, 每小题3分, 满分18分)

13. (3分) (2015•长沙) 一个不透明的袋子中只装有3个黑球, 2个白球, 这些球的形状、大小、质地等完全相同, 即除颜色外无其他差别. 在看不到球的条件下, 随机从袋中摸出1个球, 则摸出白球的概率是 $\frac{2}{5}$.

考点: 概率公式.

分析: 由一个不透明的袋子中只装有3个黑球, 2个白球, 这些球的形状、大小、质地等完全相同, 即除颜色外无其他差别, 直接利用概率公式求解即可求得答案.

解答: 解: $\because$ 一个不透明的袋子中只装有3个黑球, 2个白球, 这些球的形状、大小、质地等完全相同, 即除颜色外无其他差别,

$\therefore$ 随机从袋中摸出1个球, 则摸出白球的概率是: $\frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$.

故答案为: $\frac{2}{5}$.

点评: 此题考查了概率公式的应用. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

14. (3分) (2015•长沙) 圆心角是 60° 且半径为2的扇形面积为 $\frac{2}{3}\pi$ (结果保留 π).

考点: 扇形面积的计算.

分析: 根据扇形的面积公式代入, 再求出即可.

解答: 解: 由扇形面积公式得: $S = \frac{60\pi \times 2^2}{360} = \frac{2}{3}\pi$.

故答案为: $\frac{2}{3}\pi$.

点评: 本题考查了扇形面积公式的应用, 注意: 圆心角为 n° , 半径为 r 的扇形的面积为

$$S = \frac{n\pi R^2}{360}.$$

15. (3分) (2015•长沙) 把 $\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ 进行化简, 得到的最简结果是 $2\sqrt{2}$ (结果保留根号).

考点: 二次根式的混合运算.

分析: 先进行二次根式的化简, 然后合并.

解答: 解: 原式 $= \sqrt{2} + \sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{2}$.

故答案为: $2\sqrt{2}$.

点评: 本题考查了二次根式的混合运算, 解答本题的关键是掌握二次根式的化简.

16. (3分) (2015•长沙) 分式方程 $\frac{5}{x} - \frac{7}{x-2}$ 的解是 $x = -5$.

考点: 解分式方程.

专题: 计算题.

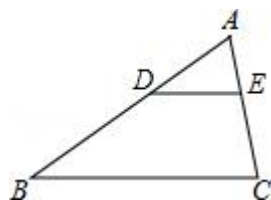
分析：本题考查解分式方程的能力，观察可得方程最简公分母为 $x(x-2)$ ，去分母，化为整式方程求解.

解答：解：去分母，得 $5(x-2)=7x$,

解得： $x=-5$ ，经检验： $x=-5$ 是原方程的解.

点评：解分式方程的关键是两边同乘最简公分母，将分式方程转化为整式方程，易错点是忽视检验.

17. (3 分) (2015•长沙) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$ ， $DE=6$ ，则 BC 的长是 18.



考点：相似三角形的判定与性质.

分析：由平行可得到 $DE:BC=AD:AB$ ，由 $DE=6$ 可求得 BC .

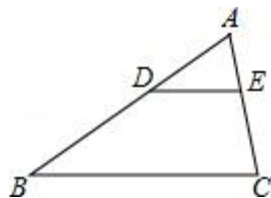
解答：解： $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore DE:BC=AD:AB=\frac{1}{3},$$

$$\text{即 } 6:BC=1:3,$$

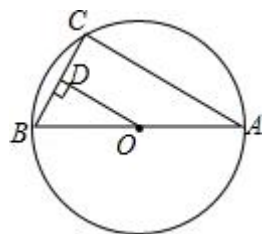
$$\therefore BC=18.$$

故答案为：18.



点评：本题主要考查平行线分线段成比例定理，掌握平行线分线段所得线段对应成比例是解题的关键.

18. (3 分) (2015•长沙) 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 是 $\odot O$ 上的一点，若 $BC=6$ ， $AB=10$ ， $OD \perp BC$ 于点 D ，则 OD 的长为 4.



考点：垂径定理；勾股定理.

分析：根据垂径定理求得 BD ，然后根据勾股定理求得即可.

解答：解： $\because OD \perp BC$,

$$\therefore BD=CD=\frac{1}{2}BC=3,$$

$$\therefore OB=\frac{1}{2}AB=5,$$

$$\therefore OD=\sqrt{OB^2-BD^2}=4.$$

故答案为 4.

点评: 题考查了垂径定理、勾股定理, 本题非常重要, 学生要熟练掌握.

三、解答题 (共 8 小题, 第 19、20 题每小题 6 分, 第 21、22 题每小题 6 分, 第 23、24 题每小题 6 分, 第 25、26 题每小题 6 分, 满分 66 分. 解答应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. (6 分) (2015•长沙) 计算: $(\frac{1}{2})^{-1}+4\cos 60^\circ - |-3|+\sqrt{9}$.

考点: 实数的运算; 零指数幂; 负整数指数幂; 特殊角的三角函数值.

分析: 原式第一项利用负整数指数幂法则计算, 第二项利用特殊角的三角函数值计算, 第三项利用绝对值的代数意义化简, 最后一项利用算术平方根定义计算即可得到结果.

解答: 解: 原式 $=2+4\times\frac{1}{2}-3+3=4$.

点评: 此题考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (6 分) (2015•长沙) 先化简, 再求值: $(x+y)(x-y) - x(x+y) + 2xy$, 其中 $x = (3-\pi)^0$, $y=2$.

考点: 整式的混合运算—化简求值; 零指数幂.

分析: 首先去掉括号, 然后合并同类项, 最后把 $x=1$, $y=2$ 代入化简式进行计算即可.

解答: 解: $(x+y)(x-y) - x(x+y) + 2xy$
 $=x^2 - y^2 - x^2 - xy + 2xy$
 $=xy - y^2,$
 $\therefore x = (3-\pi)^0 = 1, y=2,$
 $\therefore$ 原式 $=2 - 4 = -2$.

点评: 本题主要考查了整式的化简求值的知识, 解答本题的关键是掌握平方差公式以及单项式乘以多项式的运算法则, 此题难度不大.

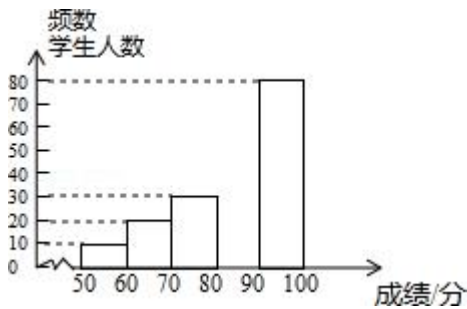
21. (8 分) (2015•长沙) 中华文明, 源远流长: 中华汉字, 寓意深广, 为了传承优秀传统文化, 某校团委组织了一次全校 3000 名学生参加的“汉字听写”大赛, 赛后发现所有参赛学生的成绩均不低于 50 分. 为了更好地了解本次大赛的成绩分布情况, 随机抽取了其中 200 名学生的成绩 (成绩 x 取整数, 总分 100 分) 作为样本进行整理, 得到下列不完整的统计图表:

成绩 x /分	频数	频率
$50 \leq x < 60$	10	0.05
$60 \leq x < 70$	20	0.10
$70 \leq x < 80$	30	b

$80 \leq x < 90$	a	0.30
$90 \leq x \leq 100$	80	0.40

请根据所给信息，解答下列问题：

- (1) $a = \underline{60}$ ， $b = \underline{0.15}$ ；
- (2) 请补全频数分布直方图；
- (3) 这次比赛成绩的中位数会落在 $\underline{80 \leq x < 90}$ 分数段；
- (4) 若成绩在 90 分以上（包括 90 分）的为“优”等，则该校参加这次比赛的 3000 名学生中成绩“优”等约有多少人？



考点：频数（率）分布直方图；用样本估计总体；频数（率）分布表；中位数.

分析：（1）根据第一组的频数是 10，频率是 0.05，求得数据总数，再用数据总数乘以第四组频率可得 a 的值，用第三组频数除以数据总数可得 b 的值；

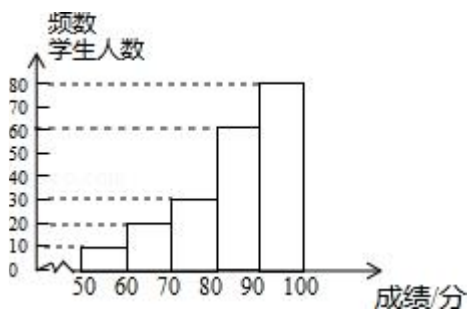
（2）根据（1）的计算结果即可补全频数分布直方图；

（3）根据中位数的定义，将这组数据按照从小到大的顺序排列后，处于中间位置的数据（或中间两数据的平均数）即为中位数；

（4）利用总数 3000 乘以“优”等学生的所占的频率即可.

解答：解：（1）样本容量是： $10 \div 0.05 = 200$ ，
 $a = 200 \times 0.30 = 60$ ， $b = 30 \div 200 = 0.15$ ；

（2）补全频数分布直方图，如下：



（3）一共有 200 个数据，按照从小到大的顺序排列后，第 100 个与第 101 个数据都落在第四个分数段，

所以这次比赛成绩的中位数会落在 $80 \leq x < 90$ 分数段；

（4） $3000 \times 0.40 = 1200$ （人）.

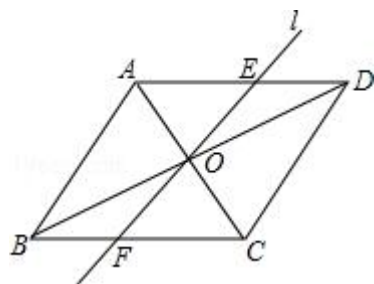
即该校参加这次比赛的 3000 名学生中成绩“优”等的大约有 1200 人.

故答案为 60，0.15； $80 \leq x < 90$ ；1200.

点评: 本题考查读频数（率）分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力；利用统计图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能作出正确的判断和解决问题。也考查了中位数和利用样本估计总体。

22. (8分) (2015•长沙) 如图，在菱形 ABCD 中，AB=2， $\angle ABC=60^\circ$ ，对角线 AC、BD 相交于点 O，将对角线 AC 所在的直线绕点 O 顺时针旋转角 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 后得直线 l，直线 l 与 AD、BC 两边分别相交于点 E 和点 F。

- (1) 求证： $\triangle AOE \cong \triangle COF$ ；
 (2) 当 $\alpha=30^\circ$ 时，求线段 EF 的长度。



考点: 菱形的性质；全等三角形的判定与性质；旋转的性质。

分析: (1) 首先证明 $AE=CF$ ， $OE=OF$ ，结合 $AO=CO$ ，利用 SSS 证明 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ ；
 (2) 首先画出 $\alpha=30^\circ$ 时的图形，根据菱形的性质得到 $EF \perp AD$ ，解三角形即可求出 OE 的长，进而得到 EF 的长。

解答: 解：(1) $\because$ 四边形 ABCD 是菱形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $AO=OC$ ，

$$\therefore \frac{AE}{CF} = \frac{OE}{OF} = \frac{AO}{OC} = 1,$$

$\therefore AE=CF$ ， $OE=OF$ ，

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$$\begin{cases} AO=CO \\ OE=OF \\ AE=CF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$ 。

(2) 当 $\alpha=30^\circ$ 时，即 $\angle AOE=30^\circ$ ，

$\because$ 四边形 ABCD 是菱形， $\angle ABC=60^\circ$ ，

$\therefore \angle OAD=60^\circ$ ，

$\therefore \angle AEO=90^\circ$ ，

在 $Rt\triangle AOB$ 中，

$$\sin \angle ABO = \frac{AO}{AB} = \frac{AO}{2} = \frac{1}{2},$$

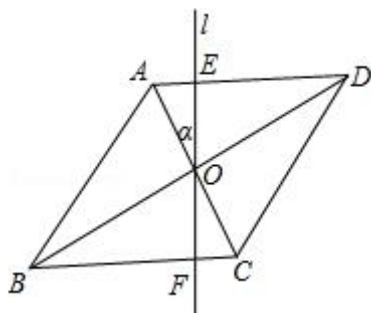
$\therefore AO=1$ ，

在 $Rt\triangle AEO$ 中，

$$\cos \angle AOE = \cos 30^\circ = \frac{OE}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore OE = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore EF = 2OE = \sqrt{3}.$$



点评: 本题主要考查了菱形的性质以及解三角形的知识, 解答本题的关键是熟练掌握菱形的性质, 解答 (2) 问时需要正确作出图形, 此题难度不大.

23. (9 分) (2015•长沙) 现代互联网技术的广泛应用, 催生了快递行业的高度发展, 据调查, 长沙市某家小型“大学生自主创业”的快递公司, 今年三月份与五月份完成投递的快递总件数分别为 10 万件和 12.1 万件, 现假定该公司每月投递的快递总件数的增长率相同.

(1) 求该快递公司投递总件数的月平均增长率;

(2) 如果平均每人每月最多可投递 0.6 万件, 那么该公司现有的 21 名快递投递业务员能否完成今年 6 月份的快递投递任务? 如果不能, 请问至少需要增加几名业务员?

考点: 一元二次方程的应用; 一元一次不等式的应用.

专题: 增长率问题.

分析: (1) 设该快递公司投递总件数的月平均增长率为 x , 根据“今年三月份与五月份完成投递的快递总件数分别为 10 万件和 12.1 万件, 现假定该公司每月投递的快递总件数的增长率相同”建立方程, 解方程即可;

(2) 首先求出今年 6 月份的快递投递任务, 再求出 21 名快递投递业务员能完成的快递投递任务, 比较得出该公司不能完成今年 6 月份的快递投递任务, 进而求出至少需要增加业务员的人数.

解答: 解: (1) 设该快递公司投递总件数的月平均增长率为 x , 根据题意得

$$10(1+x)^2 = 12.1,$$

解得 $x_1 = 0.1$, $x_2 = -2.2$ (不合题意舍去).

答: 该快递公司投递总件数的月平均增长率为 10%;

(2) 今年 6 月份的快递投递任务是 $12.1 \times (1+10\%) = 13.31$ (万件).

$\therefore$ 平均每人每月最多可投递 0.6 万件,

$\therefore$ 21 名快递投递业务员能完成的快递投递任务是: $0.6 \times 21 = 12.6 < 13.31$,

$\therefore$ 该公司现有的 21 名快递投递业务员不能完成今年 6 月份的快递投递任务

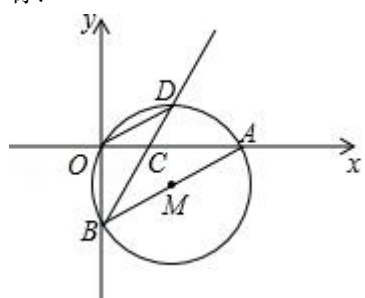
$\therefore$ 需要增加业务员 $(13.31 - 12.6) \div 0.6 = 1\frac{11}{60} \approx 2$ (人).

答: 该公司现有的 21 名快递投递业务员不能完成今年 6 月份的快递投递任务, 至少需要增加 2 名业务员.

点评: 本题考查了一元二次方程的应用, 解题关键是要读懂题目的意思, 根据题目给出的条件, 找出合适的等量关系, 列出方程, 再求解.

24. (9分) (2015•长沙) 如图, 在直角坐标系中, $\odot M$ 经过原点 $O(0, 0)$, 点 $A(\sqrt{6}, 0)$ 与点 $B(0, -\sqrt{2})$, 点 D 在劣弧 $\widehat{OA}$ 上, 连接 BD 交 x 轴于点 C , 且 $\angle COD = \angle CBO$.

- (1) 求 $\odot M$ 的半径;
- (2) 求证: BD 平分 $\angle ABO$;
- (3) 在线段 BD 的延长线上找一点 E , 使得直线 AE 恰好为 $\odot M$ 的切线, 求此时点 E 的坐标.



考点: 圆的综合题.

分析: (1) 由点 $A(\sqrt{6}, 0)$ 与点 $B(0, -\sqrt{2})$, 可求得线段 AB 的长, 然后由 $\angle AOB = 90^\circ$, 可得 AB 是直径, 继而求得 $\odot M$ 的半径;

(2) 由圆周角定理可得: $\angle COD = \angle ABC$, 又由 $\angle COD = \angle CBO$, 即可得 BD 平分 $\angle ABO$;

(3) 首先过点 A 作 $AE \perp AB$, 垂足为 A , 交 BD 的延长线于点 E , 过点 E 作 $EF \perp OA$ 于点 F , 易得 $\triangle AEC$ 是等边三角形, 继而求得 EF 与 AF 的长, 则可求得点 E 的坐标.

解答: 解: (1) $\because$ 点 $A(\sqrt{6}, 0)$ 与点 $B(0, -\sqrt{2})$,

$$\therefore OA = \sqrt{6}, OB = \sqrt{2},$$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$\therefore AB$ 是直径,

$$\therefore \odot M \text{ 的半径为: } \sqrt{2};$$

$$(2) \because \angle COD = \angle CBO, \angle COD = \angle CBA,$$

$$\therefore \angle CBO = \angle CBA,$$

即 BD 平分 $\angle ABO$;

(3) 如图, 过点 A 作 $AE \perp AB$, 垂足为 A , 交 BD 的延长线于点 E , 过点 E 作 $EF \perp OA$ 于点 F , 即 AE 是切线,

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AOB \text{ 中, } \tan \angle OAB = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle OAB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = 90^\circ - \angle OAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABO = 30^\circ,$$

$x + (k-1) = 0$, 求出 x_1 、 x_2 的值是多少; 然后根据 x_1 、 x_2 的值是整数, 求出 k 的值是多少; 最后根据横坐标, 纵坐标均为整数的点称之为“中国结”, 判断出该函数的图象与 x 轴所围成的平面图形中 (含边界), 一共包含有多少个“中国结”即可.

解答: 解: (1) $\because x$ 是整数, $x \neq 0$ 时, $\sqrt{3}x$ 是一个无理数,
 $\therefore x \neq 0$ 时, $\sqrt{3}x+2$ 不是整数,
 $\therefore x=0$, $y=2$,
 即函数 $y=\sqrt{3}x+2$ 的图象上“中国结”的坐标是 $(0, 2)$.

(2) ①当 $k=1$ 时, 函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$, k 为常数) 的图象上有且只有两个“中国结”:

$(1, 1)$ 、 $(-1, -1)$;

②当 $k=-1$ 时, 函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$, k 为常数) 的图象上有且只有两个“中国结”:

$(1, -1)$ 、 $(-1, 1)$.

③当 $k \neq \pm 1$ 时, 函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$, k 为常数) 的图象上最少有 4 个“中国结”:

$(1, k)$ 、 $(-1, -k)$ 、 $(k, 1)$ 、 $(-k, -1)$, 这与函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$, k 为常数) 的图象上有且只有两个“中国结”矛盾,

综上所述, $k=1$ 时, 函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$, k 为常数) 的图象上有且只有两个“中国结”: $(1, 1)$ 、 $(-1, -1)$;

$k=-1$ 时, 函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$, k 为常数) 的图象上有且只有两个“中国结”: $(1, -1)$ 、 $(-1, 1)$.

(3) 令 $(k^2 - 3k + 2)x^2 + (2k^2 - 4k + 1)x + k^2 - k = 0$,
 则 $[(k-1)x + k][(k-2)x + (k-1)] = 0$,

$$\therefore \begin{cases} x_1 = \frac{k}{1-k} \\ x_2 = \frac{k-1}{2-k} \end{cases}$$

$$\therefore k = \frac{x_1}{x_1+1} = \frac{2x_2+1}{x_2+1},$$

整理, 可得

$$x_1x_2 + 2x_2 + 1 = 0,$$

$$\therefore x_2(x_1 + 2) = -1,$$

$\because x_1$ 、 x_2 都是整数,

$$\therefore \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 + 2 = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -1 \\ x_1 + 2 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \text{ 时,}$$

$$\therefore \frac{k-1}{2-k} = 1,$$

$$\therefore k = \frac{3}{2};$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \text{ 时,}$$

$$\therefore \frac{k}{1-k} = -1,$$

$$\therefore k = k - 1, \text{ 无解;}$$

综上, 可得

$$k = \frac{3}{2}, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 1,$$

$$y = (k^2 - 3k + 2)x^2 + (2k^2 - 4k + 1)x + k^2 - k$$

$$= \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 - 3 \times \frac{3}{2} + 2 \right] x^2 + \left[2 \times \left(\frac{3}{2} \right)^2 - 4 \times \frac{3}{2} + 1 \right] x + \left(\frac{3}{2} \right)^2 - \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } x = -2 \text{ 时,}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} \times (-2)^2 - \frac{1}{2} \times (-2) + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } x = -1 \text{ 时,}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} \times (-1)^2 - \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{3}{4}$$

$$= 1$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } x = 0 \text{ 时, } y = \frac{3}{4},$$

综上, 可得

若二次函数 $y = (k^2 - 3k + 2)x^2 + (2k^2 - 4k + 1)x + k^2 - k$ (k 为常数) 的图象与 x 轴相交得到两个不同的“中国结”,

该函数的图象与 x 轴所围成的平面图形中 (含边界), 一共包含有 6 个“中国结”: $(-3, 0)$ 、 $(-2, 0)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(-1, 1)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$.

点评: (1) 此题主要考查了反比例函数问题, 考查了分类讨论思想的应用, 要熟练掌握反比例函数的图象和性质.

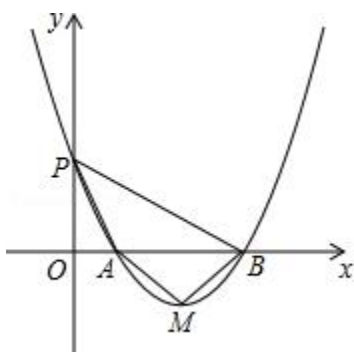
(2) 此题还考查了对新定义“中国结”的理解和掌握, 解答此题的关键是要明确: 横坐标, 纵坐标均为整数的点称之为“中国结”.

26. (10 分) (2015•长沙) 若关于 x 的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$, $c>0$, a, b, c 是常数) 与 x 轴交于两个不同的点 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ ($0<x_1<x_2$), 与 y 轴交于点 P , 其图象顶点为点 M , 点 O 为坐标原点.

(1) 当 $x_1=c=2$, $a=\frac{1}{3}$ 时, 求 x_2 与 b 的值;

(2) 当 $x_1=2c$ 时, 试问 $\triangle ABM$ 能否为等边三角形? 判断并证明你的结论;

(3) 当 $x_1=mc$ ($m>0$) 时, 记 $\triangle MAB$, $\triangle PAB$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 若 $\triangle BPO \sim \triangle PAO$, 且 $S_1=S_2$, 求 m 的值.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 设 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1, x_2 , 把 a, c 代入得: $\frac{1}{3}x^2+bx+2=0$, 根据 $x_1=2$ 是它

的一个根, 求出 b , 再根据 $\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 2 = 0$, 即可求出另一个根,

(2) 根据 $x_1=2c$ 时, $x_2=\frac{1}{2a}$, 得出 $b=-(2ac+\frac{1}{2})$, $4ac=-2b-1$, 根据 M 的坐标为

$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$, 得出当 $\triangle ABM$ 为等边三角形时 $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{1}{2a}-2c)$,

求出 $b_1=-1$, $b_2=2\sqrt{3}-1$ (舍去), 最后根据 $4ac=-2b-1=1$, 得出 $2c=\frac{1}{2a}$, A, B 重合, $\triangle ABM$ 不可能为等边三角形;

(3) 根据 $\triangle BPO \sim \triangle PAO$, 得出 $\frac{OP}{AO} = \frac{BO}{OP}$, $ac=1$, 由 $S_1=S_2$ 得出 $b^2=4a \cdot 2c=8ac=8$, 求

出 $b=-2\sqrt{2}$, 最后根据 $\frac{1}{c}x^2 - 2\sqrt{2}x + c = 0$ 得出 $x=(\sqrt{2}-1)c$, 从而求出 m .

解答: 解: (1) 设 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1, x_2 ,

把 $a=\frac{1}{3}$, $c=2$ 代入得: $\frac{1}{3}x^2+bx+2=0$,

$\therefore x_1=2$ 是它的一个根,

$$\therefore \frac{1}{3}x^2 + 2b + 2 = 0,$$

$$\text{解得: } b = -\frac{5}{3},$$

$$\therefore \text{方程为: } \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 2 = 0,$$

$$\therefore \text{另一个根为 } x_2 = 3;$$

$$(2) \text{ 当 } x_1 = 2c \text{ 时, } x_2 = \frac{\frac{c}{a}}{x_1} = \frac{1}{2a},$$

$$\text{此时 } b = -a(x_1 + x_2) = -(2ac + \frac{1}{2}), \quad 4ac = -2b - 1,$$

$$\therefore M(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}),$$

$$\text{当 } \triangle ABM \text{ 为等边三角形时 } |\frac{4ac - b^2}{4a}| = \frac{\sqrt{3}}{2} AB,$$

$$\text{即 } \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\frac{1}{2a} - 2c),$$

$$\therefore \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + 2b + 1}{2a},$$

$$\therefore b^2 + 2b + 1 = \sqrt{3}(1 + 2b + 1),$$

$$\text{解得: } b_1 = -1, \quad b_2 = 2\sqrt{3} - 1 \text{ (舍去)},$$

$$\text{此时 } 4ac = -2b - 1 = 1, \text{ 即 } 2c = \frac{1}{2a}, \text{ A、B 重合,}$$

$$\therefore \triangle ABM \text{ 不可能为等边三角形;}$$

$$(3) \because \triangle BPO \sim \triangle PAO,$$

$$\therefore \frac{OP}{AO} = \frac{BO}{OP}, \text{ 即 } x_1 x_2 = c^2 = \frac{c}{a},$$

$$\therefore ac = 1,$$

$$\text{由 } S_1 = S_2 \text{ 得 } c = |\frac{4ac - b^2}{4a}| = \frac{b^2}{4a} - c,$$

$$\therefore b^2 = 4a \cdot 2c = 8ac = 8,$$

$$\therefore b_1 = -2\sqrt{2}, \quad b_2 = 2\sqrt{2} \text{ (舍去)},$$

$$\text{方程可解为 } \frac{1}{c}x^2 - 2\sqrt{2}x + c = 0,$$

$$\therefore x_1 = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{4}}{2 \cdot \frac{1}{c}} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2 \cdot \frac{1}{c}} = (\sqrt{2} - 1)c,$$

$$\therefore m = \sqrt{2} - 1.$$

点评: 此题考查了二次函数综合，用到的知识点是二次函数的图象与性质、相似三角形的判定与性质、等边三角形的性质、一元二次方程，关键是综合运用有关知识求解，注意把不合题意的解舍去.