

2015 年湖南省郴州市中考数学试卷

一、选择题（共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分）

1. (3 分) (2015•郴州) 2 的相反数是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

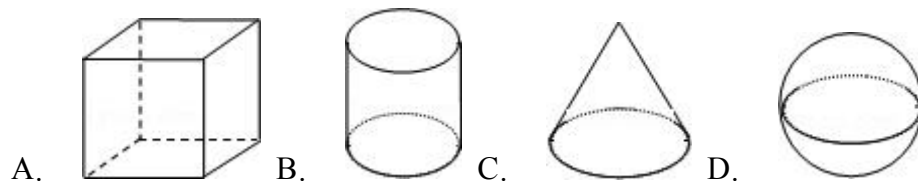
2. (3 分) (2015•郴州) 计算 $(-3)^2$ 的结果是 ()

- A. -6 B. 6 C. -9 D. 9

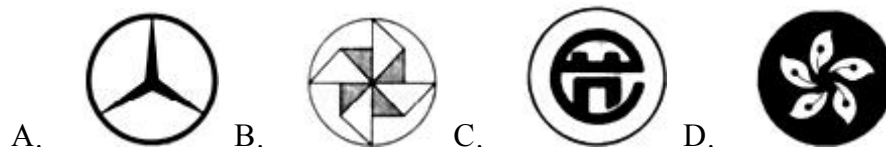
3. (3 分) (2015•郴州) 下列计算正确的是 ()

- A. $x^3+x=x^4$ B. $x^2 \cdot x^3=x^5$ C. $(x^2)^3=x^5$ D. $x^9 \div x^3=x^3$

4. (3 分) (2015•郴州) 下列四个几何体中，它们的主视图、左视图、俯视图都是正方形的是 ()



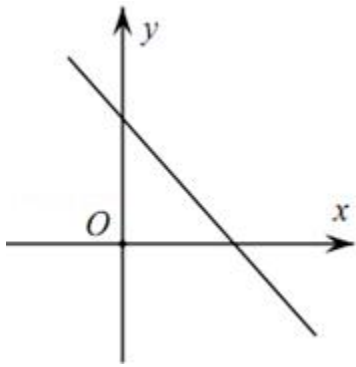
5. (3 分) (2015•郴州) 下列图案是轴对称图形的是 ()



6. (3 分) (2015•郴州) 某同学在一次期末测试中，七科的成绩分别是 92, 100, 96, 93, 96, 98, 95, 则这位同学成绩的中位数和众数分别是 ()

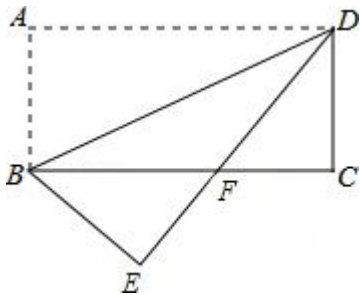
- A. 93, 96 B. 96, 96 C. 96, 100 D. 93, 100

7. (3 分) (2015•郴州) 如图为一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象，则下列正确的是 ()



- A. $k > 0, b > 0$ B. $k > 0, b < 0$ C. $k < 0, b > 0$ D. $k < 0, b < 0$

8. (3 分) (2015•郴州) 如图，在矩形 ABCD 中， $AB=3$ ，将 $\triangle ABD$ 沿对角线 BD 对折，得到 $\triangle EBD$ ，DE 与 BC 交于点 F， $\angle ADB=30^\circ$ ，则 EF= ()



- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 3 D. $3\sqrt{3}$

二、填空题 (共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分)

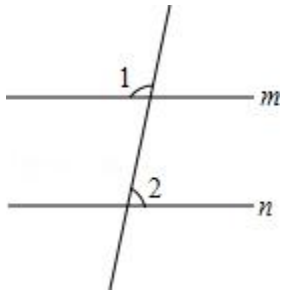
9. (3 分) (2015•郴州) 2015 年 5 月在郴州举行的第三届中国 (湖南) 国际矿物宝石博览会中，成交额高达 32 亿元，3200000000 用科学记数法表示为_____.

10. (3 分) (2015•郴州) 已知圆锥的底面半径是 1cm，母线长为 3cm，则该圆锥的侧面积为_____ cm^2 .

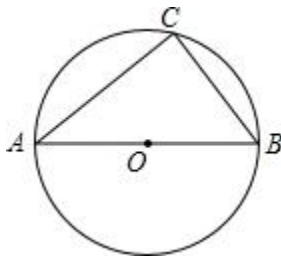
11. (3 分) (2015•郴州) 分解因式： $2a^2 - 2 =$ _____.

12. (3 分) (2015•郴州) 函数 $y = \frac{1}{x-2}$ 中，自变量 x 的取值范围是_____.

13. (3 分) (2015•郴州) 如图，已知直线 $m \parallel n$ ， $\angle 1 = 100^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为_____.



14. (3分) (2015•郴州) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 $\odot O$ 上, 若 $\angle CAB = 40^\circ$, 则 $\angle ABC$ 的度数为_____.



15. (3分) (2015•郴州) 在 $m^2 \square 6m \square 9$ 的“ $\square$ ”中任意填上“+”或“-”号, 所得的代数式为完全平方式的概率为_____.

16. (3分) (2015•郴州) 请观察下列等式的规律:

$$\frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right), \quad \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right),$$

$$\frac{1}{5 \times 7} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right), \quad \frac{1}{7 \times 9} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right),$$

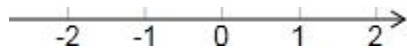
...

则 $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{99 \times 101} =$ _____.

三、解答题 (17-19 每题 6 分, 20-23 每题 8 分, 24-25 每题 10 分, 26 题 12 分, 共 82 分)

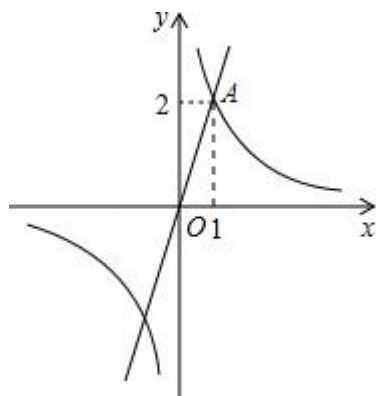
17. (6分) (2015•郴州) 计算: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2015^0 + |-\sqrt{3}| - 2\sin 60^\circ$.

18. (6分) (2015•郴州) 解不等式组 $\begin{cases} 2(x-1) \leq -1 \text{ ①} \\ 2x+3 > 1 \text{ ②} \end{cases}$ ，并把它的解集在数轴上表示出来.



19. (6分) (2015•郴州) 如图, 已知点 A (1, 2) 是正比例函数 $y_1=kx$ ($k \neq 0$) 与反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}$ ($m \neq 0$) 的一个交点.

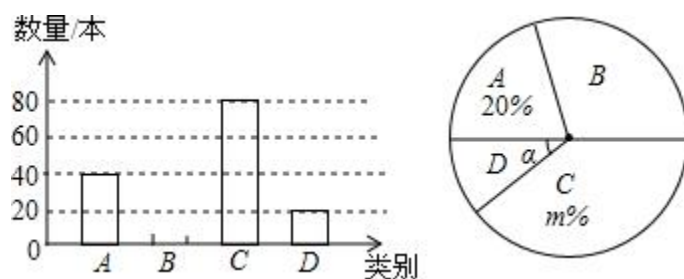
- (1) 求正比例函数及反比例函数的表达式;
- (2) 根据图象直接回答: 在第一象限内, 当 x 取何值时, $y_1 < y_2$?



20. (8分) (2015•郴州) 郴州市某中学校团委开展“关爱残疾儿童”爱心捐书活动, 全校师生踊跃捐赠各类书籍共 3000 本. 为了解各类书籍的分布情况, 从中随机抽取了部分书籍分四类进行统计: A. 艺术类; B. 文学类; C. 科普类; D. 其他, 并将统计结果绘制成如图所示的两幅不完整的统计图.

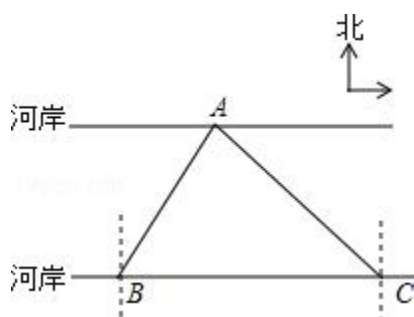
- (1) 这次统计共抽取了_____本书籍, 扇形统计图中的 $m=$ _____, $\angle \alpha$ 的度数是_____;
- (2) 请将条形统计图补充完整;

(3) 估计全校师生共捐赠了多少本文学类书籍.



21. (8分) (2015•郴州) 自2014年12月启动“绿茵行动，青春聚力”郴州共青团植树活动以来，某单位筹集7000元购买了桂花树和樱花树共30棵，其中购买桂花树花费3000元. 已知桂花树比樱花树的单价高50%，求樱花树的单价及棵树.

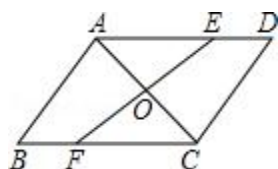
22. (8分) (2015•郴州) 如图，要测量A点到河岸BC的距离，在B点测得A点在B点的北偏东 30° 方向上，在C点测得A点在C点的北偏西 45° 方向上，又测得 $BC=150\text{m}$. 求A点到河岸BC的距离. (结果保留整数) (参考数据: $\sqrt{2}\approx 1.41$, $\sqrt{3}\approx 1.73$)



23. (8分) (2015•郴州) 如图, AC 是 $\square ABCD$ 的一条对角线, 过 AC 中点 O 的直线分别交 AD, BC 于点 E, F.

(1) 求证: $\triangle AOE \cong \triangle COF$;

(2) 当 EF 与 AC 满足什么条件时, 四边形 AFCE 是菱形? 并说明理由.



24. (10分) (2015•郴州) 阅读下面的材料:

如果函数 $y=f(x)$ 满足: 对于自变量 x 的取值范围内的任意 x_1, x_2 ,

(1) 若 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是增函数;

(2) 若 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是减函数.

例题: 证明函数 $f(x) = \frac{2}{x} (x > 0)$ 是减函数.

证明: 假设 $x_1 < x_2$, 且 $x_1 > 0, x_2 > 0$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2} = \frac{2x_2 - 2x_1}{x_1x_2} = \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1x_2}$$

$\because x_1 < x_2$, 且 $x_1 > 0, x_2 > 0$

$\therefore x_2 - x_1 > 0, x_1x_2 > 0$

$$\therefore \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1x_2} > 0, \text{ 即 } f(x_1) - f(x_2) > 0$$

$\therefore f(x_1) > f(x_2)$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{2}{x} (x > 0)$ 是减函数.

根据以上材料, 解答下面的问题:

(1) 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} (x > 0)$, $f(1) = \frac{1}{1^2} = 1$, $f(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

计算: $f(3) =$ _____, $f(4) =$ _____, 猜想 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ($x > 0$)

是 _____ 函数 (填“增”或“减”);

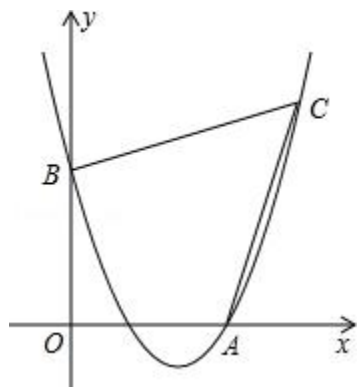
(2) 请仿照材料中的例题证明你的猜想.

25. (10 分) (2015•郴州) 如图, 已知抛物线经过点 A (4, 0), B (0, 4), C (6, 6).

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 证明: 四边形 AOBC 的两条对角线互相垂直;

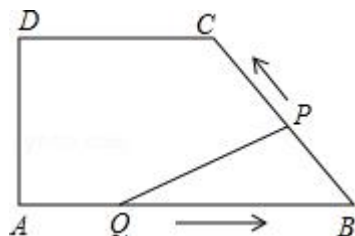
(3) 在四边形 AOBC 的内部能否截出面积最大的 $\square DEFG$? (顶点 D, E, F, G 分别在线段 AO, OB, BC, CA 上, 且不与四边形 AOBC 的顶点重合) 若能, 求出 $\square DEFG$ 的最大面积, 并求出此时点 D 的坐标; 若不能, 请说明理由.



26. (12 分) (2015•郴州) 如图, 在四边形 ABCD 中, $DC \parallel AB$, $DA \perp AB$, $AD=4\text{cm}$, $DC=5\text{cm}$, $AB=8\text{cm}$. 如果点 P 由 B 点出发沿 BC 方向向点 C 匀速运动, 同时点

Q 由 A 点出发沿 AB 方向向点 B 匀速运动，它们的速度均为 1cm/s，当 P 点到达 C 点时，两点同时停止运动，连接 PQ，设运动时间为 t s，解答下列问题：

- (1) 当 t 为何值时，P，Q 两点同时停止运动？
- (2) 设 $\triangle PQB$ 的面积为 S ，当 t 为何值时， S 取得最大值，并求出最大值；
- (3) 当 $\triangle PQB$ 为等腰三角形时，求 t 的值.



2015 年湖南省郴州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分）

1. (3 分) (2015•郴州) 2 的相反数是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

考点： 相反数.

分析： 根据相反数的概念解答即可.

解答： 解：2 的相反数是 -2 ，

故选：C.

点评： 本题考查了相反数的意义，一个数的相反数就是在这个数前面添上“ $-$ ”号；一个正数的相反数是负数，一个负数的相反数是正数，0 的相反数是 0.

2. (3 分) (2015•郴州) 计算 $(-3)^2$ 的结果是 ()

- A. -6 B. 6 C. -9 D. 9

考点： 有理数的乘方.

分析： 根据有理数的乘方运算，乘方的运算可以利用乘法的运算来进行.

解答： 解： $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$.

故选 D.

点评： 本题考查有理数的乘方运算，乘方的运算可以利用乘法的运算来进行. 负数的奇数次幂是负数，负数的偶数次幂是正数.

3. (3 分) (2015•郴州) 下列计算正确的是 ()

A. $x^3 + x = x^4$ B. $x^2 \cdot x^3 = x^5$ C. $(x^2)^3 = x^5$ D. $x^9 \div x^3 = x^3$

考点： 同底数幂的除法；合并同类项；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方.

分析： 根据同底数幂的除法，底数不变指数相减；合并同类项，系数相加字母和字母的指数不变；同底数幂的乘法，底数不变指数相加；幂的乘方，底数不变指数相乘，对各选项计算后利用排除法求解.

解答： 解： A、 $x^3 \cdot x = x^4$ ，故错误；

B、正确；

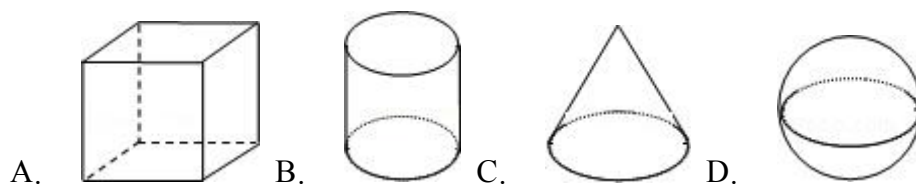
C、 $(x^2)^3 = x^6$ ，故错误；

D、 $x^9 \div x^3 = x^6$ ，故错误；

故选： B.

点评： 本题考查同底数幂的除法，合并同类项，同底数幂的乘法，幂的乘方很容易混淆，一定要记准法则才能做题.

4. (3 分) (2015•郴州) 下列四个几何体中，它们的主视图、左视图、俯视图都是正方形的是 ()



考点： 简单几何体的三视图.

分析： 分别分析四个选项的主视图、左视图、俯视图，从而得出都是正方体的几何体.

解答： 解：A、正方体的主视图、左视图、俯视图都正方形，符合题意；

B、圆柱的主视图、左视图都是矩形、俯视图是圆，不符合题意；

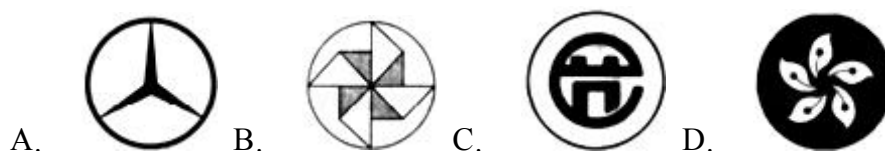
C、圆锥主视图、左视图都是等腰三角形，俯视图是圆和圆中间一点，不符合题意；

D、球的主视图、左视图、俯视图都是圆，不符合题意.

故选 A.

点评： 本题考查了简单几何体的三视图、学生的思考能力，关键是掌握几何体三种视图的空间想象能力.

5. (3 分) (2015•郴州) 下列图案是轴对称图形的是 ()



考点： 轴对称图形.

分析： 根据轴对称图形的概念对个图形分析判断即可得解.

解答： 解：A、是轴对称图形，

B、不是轴对称图形，

C、不是轴对称图形，

D、不是轴对称图形，

故选：A.

点评： 本题考查了轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合.

6. (3 分) (2015•郴州) 某同学在一次期末测试中，七科的成绩分别是 92, 100, 96, 93, 96, 98, 95, 则这位同学成绩的中位数和众数分别是 ()
- A. 93, 96 B. 96, 96 C. 96, 100 D. 93, 100

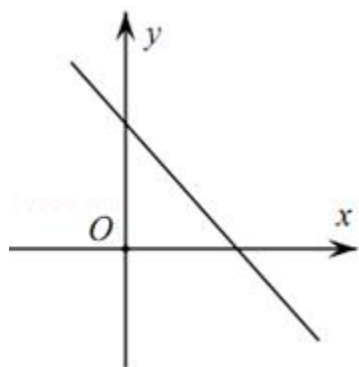
考点： 众数；中位数.

分析： 找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数 (或两个数的平均数) 为中位数，众数是一组数据中出现次数最多的数据，注意众数可以不止一个.

解答： 解：把数据从小到大排列：92, 93, 95, 96, 96, 98, 100, 位置处于中间的数是：96, 故中位数是 96; 次数最多的数是 96, 故众数是 96, 故选：B.

点评： 此题主要考查了中位数和众数. 一些学生往往对概念掌握不清楚，计算方法不明确而误选其它选项，注意找中位数的时候一定要先排好顺序，然后再根据奇数和偶数个来确定中位数，如果数据有奇数个，则正中间的数字即为所求，如果是偶数个则找中间两位数的平均数.

7. (3 分) (2015•郴州) 如图为一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象，则下列正确的是 ()



- A. $k > 0$, $b > 0$ B. $k > 0$, $b < 0$ C. $k < 0$, $b > 0$ D. $k < 0$, $b < 0$

考点：一次函数图象与系数的关系.

专题：数形结合.

分析：根据一次函数经过的象限可得 k 和 b 的取值.

解答：解：∵一次函数经过二、四象限，

∴ $k < 0$,

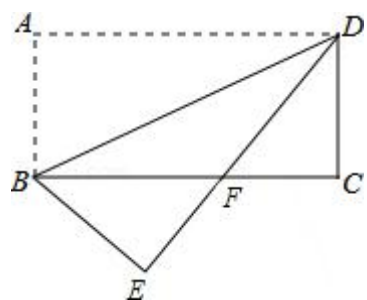
∵一次函数与 y 轴的交于正半轴，

∴ $b > 0$.

故选 C.

点评：考查一次函数的图象与系数的关系的知识；用到的知识点为：一次函数经过一三象限或二四象限， $k > 0$ 或 < 0 ；与 y 轴交于正半轴， $b > 0$ ，交于负半轴， $b < 0$.

8. (3 分) (2015•郴州) 如图，在矩形 ABCD 中， $AB=3$ ，将 $\triangle ABD$ 沿对角线 BD 对折，得到 $\triangle EBD$ ，DE 与 BC 交于点 F， $\angle ADB=30^\circ$ ，则 EF= ()



A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 3 D. $3\sqrt{3}$

考点：翻折变换（折叠问题）.

分析：利用翻折变换的性质得出： $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$ ，进而结合锐角三角函数关系求出 FE 的长.

解答：解：如图所示：由题意可得： $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$ ，则 $\angle 3 = 30^\circ$ ，

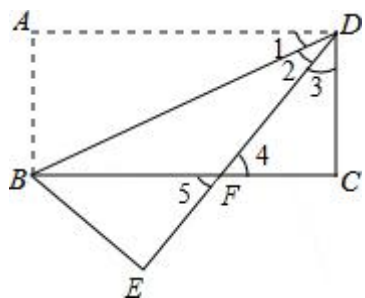
可得 $\angle 4 = \angle 5 = 60^\circ$ ，

$$\because AB=DC=BE=3,$$

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{BE}{EF} = \frac{3}{EF} = \sqrt{3},$$

$$\text{解得: } EF = \sqrt{3}.$$

故选: A.



点评: 此题主要考查了翻折变换的性质以及锐角三角函数关系, 得出 $\angle 4 = \angle 5 = 60^\circ$ 是解题关键.

二、填空题 (共 8 小题, 每小题 3 分, 满分 24 分)

9. (3 分) (2015•郴州) 2015 年 5 月在郴州举行的第三届中国 (湖南) 国际矿物宝石博览会中, 成交额高达 32 亿元, 3200000000 用科学记数法表示为 3.2×10^9 .

考点: 科学记数法—表示较大的数.

分析: 用科学记数法表示, 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: $3200000000 = 3.2 \times 10^9$,

故答案为: 3.2×10^9

点评: 此题主要考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

10. (3 分) (2015•郴州) 已知圆锥的底面半径是 1cm, 母线长为 3cm, 则该圆锥的侧面积为 3π cm^2 .

考点: 圆锥的计算.

分析: 圆锥的侧面积=底面周长 $\times$ 母线长 $\div 2$, 把相应数值代入即可求解.

解答: 解: 圆锥的侧面积= $2\pi \times 3 \times 1 \div 2 = 3\pi$.

故答案为: 3π .

点评: 本题考查了圆锥的计算, 解题的关键是弄清圆锥的侧面积的计算方法, 特别是圆锥的底面周长等于圆锥的侧面扇形的弧长.

11. (3 分) (2015•郴州) 分解因式: $2a^2 - 2 =$ $2(a+1)(a-1)$.

考点: 提公因式法与公式法的综合运用.

分析: 先提取公因式 2, 再对余下的多项式利用平方差公式继续分解.

解答: 解: $2a^2 - 2$,

$= 2(a^2 - 1)$,

$= 2(a+1)(a-1)$.

点评: 本题考查了提公因式法和公式法进行因式分解, 一个多项式有公因式首先提取公因式, 然后再用其他方法进行因式分解, 同时因式分解要彻底, 直到不能分解为止.

12. (3 分) (2015•郴州) 函数 $y = \frac{1}{x-2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 $x \neq 2$.

考点: 函数自变量的取值范围; 分式有意义的条件.

专题: 计算题.

分析： 求函数自变量的取值范围，就是求函数解析式有意义的条件，分式有意义的条件是：分母不为 0.

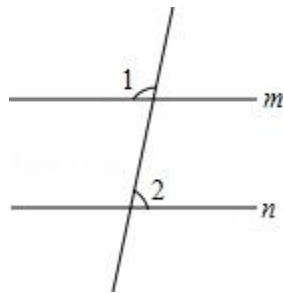
解答： 解：要使分式有意义，即： $x - 2 \neq 0$,

解得： $x \neq 2$.

故答案为： $x \neq 2$.

点评： 本题主要考查函数自变量的取值范围，考查的知识点为：分式有意义，分母不为 0.

13. (3 分) (2015•郴州) 如图, 已知直线 $m \parallel n$, $\angle 1 = 100^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为 80° .



考点： 平行线的性质.

分析： 根据邻补角定义求出 $\angle 3$ 的度数，再根据平行线的性质求出 $\angle 2$ 的度数即可.

解答： 解：如图，

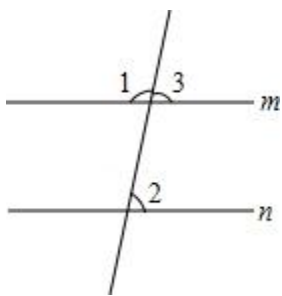
$$\because \angle 1 = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ,$$

$$\because m \parallel n,$$

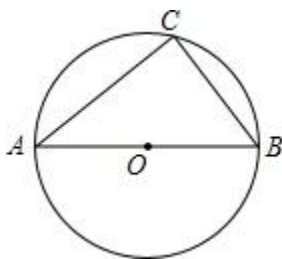
$$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 80^\circ.$$

故答案为 80° .



点评： 本题考查了平行线的性质，找到相应的同位角是解题的关键.

14. (3分) (2015•郴州) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 $\odot O$ 上, 若 $\angle CAB=40^\circ$, 则 $\angle ABC$ 的度数为 50° .



考点： 圆周角定理.

专题： 计算题.

分析： 根据圆周角定理得到 $\angle ACB=90^\circ$ ，然后根据三角形内角和定理计算 $\angle ABC$ 的度数.

解答： 解： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB=90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC=90^\circ - \angle CAB=90^\circ - 40^\circ=50^\circ.$$

故答案为 50° .

点评： 本题考查了圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半. 推论：半圆（或直径）所对的圆周角是直角， 90° 的圆周角所对的弦是直径.

15. (3分) (2015•郴州) 在 $m^2 \square 6m \square 9$ 的“ $\square$ ”中任意填上“+”或“-”号, 所得的代数式为完全平方式的概率为 $\frac{1}{2}$.

考点: 列表法与树状图法; 完全平方式.

专题: 计算题.

分析: 先画树状图展示所有四种等可能的结果数, 再根据完全平方式的定义得到“++”和“-+”能使所得的代数式为完全平方式, 然后根据概率公式求解.

解答: 解: 画树状图为:



共有四种等可能的结果数, 其中“++”和“-+”能使所得的代数式为完全平方式,

所以所得的代数式为完全平方式的概率 $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

故答案为 $\frac{1}{2}$.

点评: 本题考查了列表法或树状图法: 通过列表法或树状图法展示所有等可能的结果求出 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 然后根据概率公式求出事件 A 或 B 的概率. 也考查了完全平方式.

16. (3分) (2015•郴州) 请观察下列等式的规律:

$$\frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right), \quad \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right),$$

$$\frac{1}{5 \times 7} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right), \quad \frac{1}{7 \times 9} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right),$$

...

$$\text{则 } \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{99 \times 101} = \frac{50}{101}.$$

考点: 规律型: 数字的变化类.

分析: 观察算式可知 $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$ (n 为非0自然数), 把算式拆分再抵消即可求解.

解答： 解： $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{99 \times 101}$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{101}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{100}{101}$$

$$= \frac{50}{101}.$$

故答案为： $\frac{50}{101}$.

点评： 考查了规律型：数字的变化类，通过观察，分析、归纳并发现其中的规律，并应用发现的规律解决问题是应该具备的基本能力．本题的关键规律为

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \quad (n \text{ 为非 } 0 \text{ 自然数}).$$

三、解答题（17-19 每题 6 分，20-23 每题 8 分，24-25 每题 10 分，26 题 12 分，共 82 分）

17. （6 分）（2015•郴州）计算： $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2015^0 + |-\sqrt{3}| - 2\sin 60^\circ$.

考点： 实数的运算；零指数幂；负整数指数幂；特殊角的三角函数值.

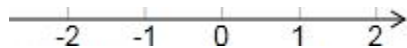
专题： 计算题.

分析： 原式第一项利用负整数指数幂法则计算，第二项利用零指数幂法则计算，第三项利用绝对值的代数意义化简，第四项利用特殊角的三角函数值计算即可得到结果.

解答： 解： 原式 $= 2 - 1 + \sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$.

点评： 此题考查了实数的运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

18. (6分) (2015•郴州) 解不等式组 $\begin{cases} 2(x-1) \leq -1 \text{ ①} \\ 2x+3 > 1 \text{ ②} \end{cases}$ ，并把它的解集在数轴上表示出来.



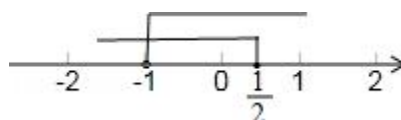
考点： 解一元一次不等式组；在数轴上表示不等式的解集.

分析： 先求出每个不等式的解集，再根据找不等式组解集的规律找出不等式组的解集即可.

解答： 解： $\because$ 解不等式①得： $x \leq \frac{1}{2}$,

解不等式②得： $x > -1$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-1 < x \leq \frac{1}{2}$,



在数轴上表示不等式组的解集为：

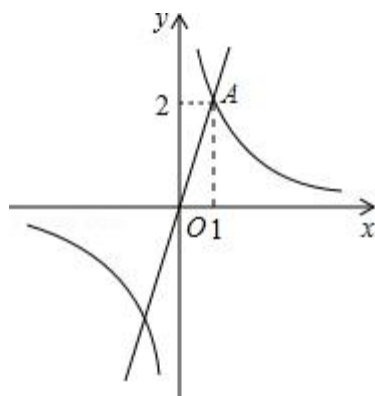
点评： 本题考查了解一元一次不等式组，在数轴上表示不等式组的解集的应用，解此题的关键是能根据不等式的解集找出不等式组的解集，难度适中.

19. (6分) (2015•郴州) 如图，已知点 A (1, 2) 是正比例函数 $y_1=kx$ ($k \neq 0$)

与反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}$ ($m \neq 0$) 的一个交点.

(1) 求正比例函数及反比例函数的表达式；

(2) 根据图象直接回答：在第一象限内，当 x 取何值时， $y_1 < y_2$?



考点：反比例函数与一次函数的交点问题.

分析：（1）利用函数图象上点的坐标性质分别代入解析式求出即可；

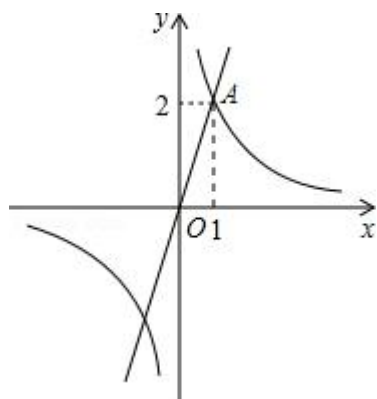
（2）利用函数图象，结合交点左侧时 $y_1 < y_2$.

解答：解：（1）将点 A（1，2）代入正比例函数 $y_1=kx$ （ $k \neq 0$ ）与反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}$ （ $m \neq 0$ ）得，

$$2=k, \quad m=1 \times 2=2,$$

故 $y_1=2x$ （ $k \neq 0$ ），反比例函数 $y_2=\frac{2}{x}$;

（2）如图所示：当 $0 < x < 1$ 时， $y_1 < y_2$.



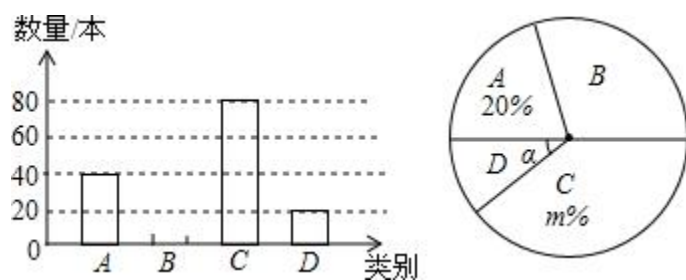
点评：此题主要考查了一次函数与反比例函数交点，利用数形结合得出是解题关键.

20. (8 分) (2015•郴州) 郴州市某中学校团委开展“关爱残疾儿童”爱心捐书活动，全校师生踊跃捐赠各类书籍共 3000 本. 为了解各类书籍的分布情况，从中随机抽取了部分书籍分四类进行统计：A. 艺术类；B. 文学类；C. 科普类；D. 其他，并将统计结果绘制成如图所示的两幅不完整的统计图.

（1）这次统计共抽取了 200 本书籍，扇形统计图中的 $m=$ 40， $\angle \alpha$ 的度数是 36° ；

（2）请将条形统计图补充完整；

（3）估计全校师生共捐赠了多少本文学类书籍.



考点： 条形统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

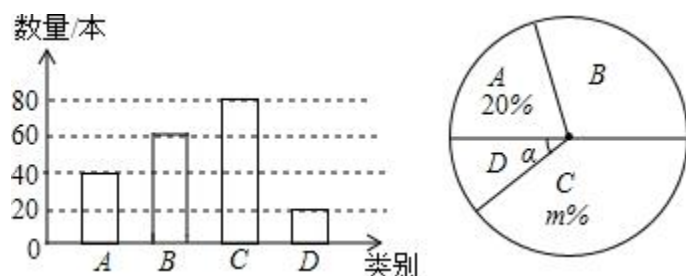
分析： (1) 用 A 的本数 $\div$ A 所占的百分比，即可得到抽取的本数；用 C 的本数 $\div$ 总本数，即可求得 m ；计算出 D 的百分比乘以 360° ，即可得到圆心角的度数；
 (2) 计算出 B 的本数，即可补全条形统计图；
 (3) 根据文学类书籍的百分比，即可解答.

解答： 解：(1) $40 \div 20\% = 200$ (本)， $80 \div 200 = 40\%$ ， $\frac{20}{200} \times 360^\circ = 36^\circ$ ，

故答案为：200，40， 36° ；

(2) B 的本数为： $200 - 40 - 80 - 20 = 60$ (本)，

如图所示：



(3) $3000 \times \frac{60}{200} = 900$ (本).

答：估计全校师生共捐赠了 900 本文学类书籍.

点评： 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用. 读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

21. (8分) (2015•郴州) 自2014年12月启动“绿茵行动，青春聚力”郴州共青团植树活动以来，某单位筹集7000元购买了桂花树和樱花树共30棵，其中购买桂花树花费3000元. 已知桂花树比樱花树的单价高50%，求樱花树的单价及棵树.

考点： 分式方程的应用.

分析： 设樱花树的单价为 x 元，则桂花树的单价为 $(1+50\%)x$ 元，根据购买了桂花树和樱花树共30棵列方程解答即可.

解答： 解：设樱花树的单价为 x 元，则桂花树的单价为 $(1+50\%)x$ 元，由题意得

$$\frac{7000-3000}{x} + \frac{3000}{(1+50\%)x} = 30$$

解得： $x=200$

经检验 $x=200$ 是原方程的解.

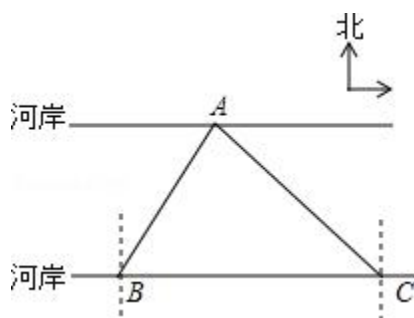
则 $(1+50\%)x=300$

$$\frac{4000}{200}=20 \text{ (棵)}$$

答：樱花树的单价为200元，有20棵.

点评： 此题考查分式方程的应用，找出题目蕴含的数量关系是解决问题的关键.

22. (8分) (2015•郴州) 如图，要测量A点到河岸BC的距离，在B点测得A点在B点的北偏东 30° 方向上，在C点测得A点在C点的北偏西 45° 方向上，又测得 $BC=150\text{m}$. 求A点到河岸BC的距离. (结果保留整数) (参考数据： $\sqrt{2}\approx 1.41$, $\sqrt{3}\approx 1.73$)



考点：解直角三角形的应用-方向角问题.

分析：过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D，设 $AD=xm$. 用含 x 的代数式分别表示 BD, CD. 再根据 $BD+CD=BC$ ，列出方程 $\frac{\sqrt{3}}{3}x+x=150$ ，解方程即可.

解答：解：过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D，设 $AD=xm$.

在 $Rt\triangle ABD$ 中， $\because \angle ADB=90^\circ$ ， $\angle BAD=30^\circ$ ，

$$\therefore BD=AD \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

在 $Rt\triangle ACD$ 中， $\because \angle ADC=90^\circ$ ， $\angle CAD=45^\circ$ ，

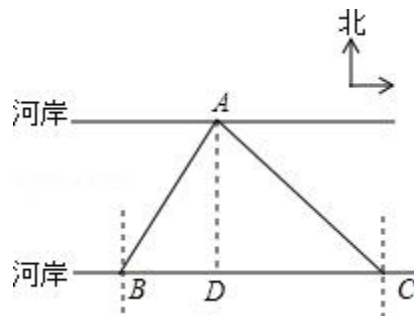
$$\therefore CD=AD=x.$$

$$\because BD+CD=BC,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}x+x=150,$$

$$\therefore x=75(3-\sqrt{3}) \approx 95.$$

即 A 点到河岸 BC 的距离约为 95m.

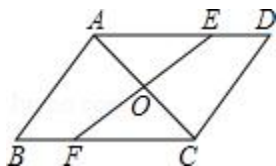


点评：本题考查了解直角三角形的应用-方向角问题，通过作辅助线构造直角三角形，再把条件和问题转化到直角三角形中，有公共直角边的可利用这条边进行求解.

23. (8分) (2015•郴州) 如图，AC 是 $\square ABCD$ 的一条对角线，过 AC 中点 O 的直线分别交 AD，BC 于点 E，F.

(1) 求证： $\triangle AOE \cong \triangle COF$;

(2) 当 EF 与 AC 满足什么条件时，四边形 AFCE 是菱形？并说明理由.



考点： 平行四边形的性质；全等三角形的判定与性质；菱形的判定.

分析： (1) 由平行四边形的性质得出 $AD \parallel BC$ ，得出 $\angle EAO = \angle FCO$ ，由 ASA 即可得出结论；

(2) 由 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ ，得出对应边相等 $AE = CF$ ，证出四边形 AFCE 是平行四边形，再由对角线 $EF \perp AC$ ，即可得出四边形 AFCE 是菱形.

解答： (1) 证明： $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle EAO = \angle FCO$,

$\because O$ 是 AC 的中点，

$\therefore OA = OC$,

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，
$$\begin{cases} \angle EAO = \angle FCO \\ OA = OC \\ \angle AOE = \angle COF \end{cases},$$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA);

(2) 解： $EF \perp AC$ 时，四边形 AFCE 是菱形；理由如下：

$\because \triangle AOE \cong \triangle COF$,

$\therefore AE = CF$,

$\because AE \parallel CF$,

$\therefore$ 四边形 AFCE 是平行四边形，

$\because EF \perp AC$,

$\therefore$ 四边形 AFCE 是菱形.

点评： 本题考查了平行四边形的性质与判定、全等三角形的判定与性质、菱形的判定；熟练掌握平行四边形的性质，证明三角形全等是解决问题的关键.

24. (10 分) (2015•郴州) 阅读下面的材料:

如果函数 $y=f(x)$ 满足: 对于自变量 x 的取值范围内的任意 x_1, x_2 ,

(1) 若 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是增函数;

(2) 若 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是减函数.

例题: 证明函数 $f(x) = \frac{2}{x} (x > 0)$ 是减函数.

证明: 假设 $x_1 < x_2$, 且 $x_1 > 0, x_2 > 0$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2} = \frac{2x_2 - 2x_1}{x_1x_2} = \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1x_2}$$

$\because x_1 < x_2$, 且 $x_1 > 0, x_2 > 0$

$\therefore x_2 - x_1 > 0, x_1x_2 > 0$

$$\therefore \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1x_2} > 0, \text{ 即 } f(x_1) - f(x_2) > 0$$

$\therefore f(x_1) > f(x_2)$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{2}{x} (x > 0)$ 是减函数.

根据以上材料, 解答下面的问题:

(1) 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} (x > 0)$, $f(1) = \frac{1}{1^2} = 1$, $f(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

计算: $f(3) = \frac{1}{9}$, $f(4) = \frac{1}{16}$, 猜想 $f(x) = \frac{1}{x^2} (x > 0)$ 是__减__函数

(填“增”或“减”);

(2) 请仿照材料中的例题证明你的猜想.

考点： 反比例函数综合题.

专题： 阅读型.

分析： (1) 根据题意把 $x=3, x=4$ 代入, 再比较其大小即可;

(2) 假设 $x_1 < x_2$, 且 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, 再作差比较即可.

解答: (1) 解: $\because f(x) = \frac{1}{x^2}$ ($x > 0$), $f(1) = \frac{1}{1^2} = 1$, $f(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$,

$$\therefore f(3) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \quad f(4) = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16},$$

$$\therefore \frac{1}{9} > \frac{1}{16},$$

$\therefore$ 猜想 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ($x > 0$) 是减函数.

故答案为: $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, 减;

(2) 证明: 假设 $x_1 < x_2$, 且 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_1^2 x_2^2},$$

$\because x_1 < x_2$, 且 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$

$\therefore x_2 - x_1 > 0$, $x_2 + x_1 > 0$, $x_1^2 \cdot x_2^2 > 0$,

$$\therefore \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_1^2 x_2^2} > 0, \text{ 即 } f(x_1) - f(x_2) > 0$$

$\therefore f(x_1) > f(x_2)$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ($x > 0$) 是减函数.

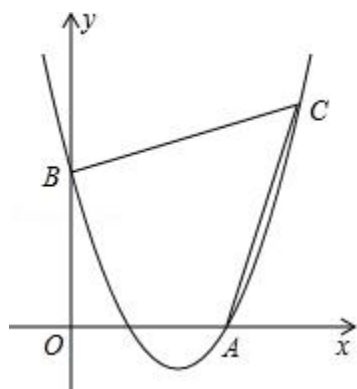
点评: 本题考查的是反比例函数综合题, 根据题中所给出的材料假设出 $x_1 < x_2$, 且 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, 再比较出其大小即可.

25. (10 分) (2015•郴州) 如图, 已知抛物线经过点 A (4, 0), B (0, 4), C (6, 6).

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 证明: 四边形 AOBC 的两条对角线互相垂直;

(3) 在四边形 AOBC 的内部能否截出面积最大的 $\square DEFG$? (顶点 D, E, F, G 分别在线段 AO, OB, BC, CA 上, 且不与四边形 AOBC 的顶点重合) 若能, 求出 $\square DEFG$ 的最大面积, 并求出此时点 D 的坐标; 若不能, 请说明理由.



考点： 二次函数综合题.

专题： 综合题.

分析： (1) 根据抛物线经过点 A (4, 0), B (0, 4), C (6, 6), 利用待定系数法, 求出抛物线的表达式即可;

(2) 利用两点间的距离公式分别计算出 $OA=4$, $OB=4$, $CB=2\sqrt{10}$, $CA=2\sqrt{10}$, 则 $OA=OB$, $CA=CB$, 根据线段垂直平分线定理的逆定理得到 OC 垂直平分 AB, 所以四边形 AOCB 的两条对角线互相垂直;

(3) 如图 2, 利用两点间的距离公式分别计算出 $AB=4\sqrt{2}$, $OC=6\sqrt{2}$, 设 D (t, 0), 根据平行四边形的性质四边形 DEFG 为平行四边形得到 $EF \parallel DG$, $EF=DG$, 再由 OC 垂直平分 AB 得到 $\triangle OBC$ 与 $\triangle OAC$ 关于 OC 对称, 则可判断 EF 和 DG 为对应线段, 所以四边形 DEFG 为矩形, $DG \parallel OC$, 则 $DE \parallel AB$, 于是可判断 $\triangle ODE \sim \triangle OAB$, 利用相似比得 $DE=\sqrt{2}t$, 接着证明 $\triangle ADG \sim \triangle AOC$, 利用相似比得 $DG=\frac{3\sqrt{2}}{2}(4-t)$, 所以矩形 DEFG 的面积 $=DE \cdot DG=\sqrt{2}t \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}(4-t)=-3t^2+12t$, 然后根据二次函数的性质求平行四边形 DEFG 的面积的最大值, 从而得到此时 D 点坐标.

解答： 解: (1) 设该抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$,

$$\text{根据题意得} \begin{cases} 16a+4b+c=0 \\ c=4 \\ 36a+6b+c=6 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=-\frac{11}{3} \\ c=4 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{11}{3}x+4$;

(2) 如图 1, 连结 AB、OC,

$\because A(4, 0), B(0, 4), C(6, 6),$

$\therefore OA=4, OB=4, CB=\sqrt{6^2+(6-4)^2}=2\sqrt{10}, CA=\sqrt{(6-4)^2+6^2}=2\sqrt{10},$

$\therefore OA=OB, CA=CB,$

$\therefore OC$ 垂直平分 AB,

即四边形 AOBC 的两条对角线互相垂直;

(3) 能.

如图 2, $AB=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}, OC=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2},$ 设 $D(t, 0),$

$\because$ 四边形 DEFG 为平行四边形,

$\therefore EF \parallel DG, EF=DG,$

$\because OC$ 垂直平分 AB,

$\therefore \triangle OBC$ 与 $\triangle OAC$ 关于 OC 对称,

$\therefore EF$ 和 DG 为对应线段,

$\therefore$ 四边形 DEFG 为矩形, $DG \parallel OC,$

$\therefore DE \parallel AB,$

$\therefore \triangle ODE \sim \triangle OAB,$

$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{OD}{OA},$ 即 $\frac{DE}{4\sqrt{2}} = \frac{t}{4},$ 解得 $DE = \sqrt{2}t,$

$\because DG \parallel OC,$

$\therefore \triangle ADG \sim \triangle AOC,$

$\therefore \frac{DG}{OC} = \frac{AD}{AO},$ 即 $\frac{DG}{6\sqrt{2}} = \frac{4-t}{4},$ 解得 $DG = \frac{3\sqrt{2}}{2}(4-t),$

$\therefore$ 矩形 DEFG 的面积 $= DE \cdot DG = \sqrt{2}t \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}(4-t) = -3t^2 + 12t = -3(t-2)^2 + 12,$

当 $t=2$ 时, 平行四边形 DEFG 的面积最大, 最大值为 12, 此时 D 点坐标为 (2, 0).

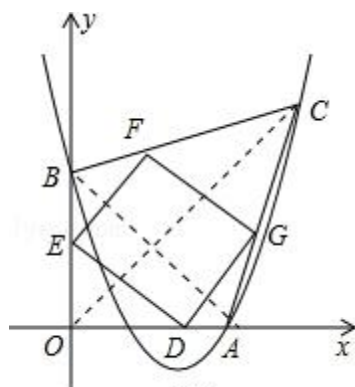


图2

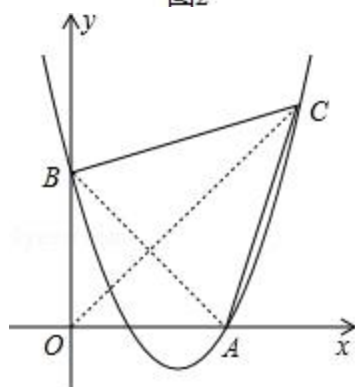
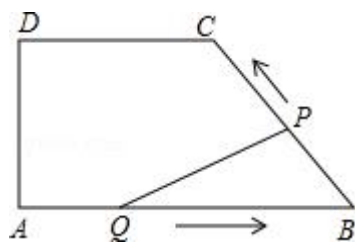


图1

点评: 考查了二次函数综合题: 熟练掌握用待定系数法求二次函数解析式、二次函数的性质和对称的判定与性质; 理解坐标与图形性质, 会利用两点间的距离公式计算线段的长; 掌握线段垂直平分线的判定方法和平行四边形的性质; 会利用相似比计算线段的长.

26. (12 分) (2015•郴州) 如图, 在四边形 ABCD 中, $DC \parallel AB$, $DA \perp AB$, $AD=4\text{cm}$, $DC=5\text{cm}$, $AB=8\text{cm}$. 如果点 P 由 B 点出发沿 BC 方向向点 C 匀速运动, 同时点 Q 由 A 点出发沿 AB 方向向点 B 匀速运动, 它们的速度均为 1cm/s , 当 P 点到达 C 点时, 两点同时停止运动, 连接 PQ, 设运动时间为 $t\text{ s}$, 解答下列问题:

- (1) 当 t 为何值时, P, Q 两点同时停止运动?
- (2) 设 $\triangle PQB$ 的面积为 S , 当 t 为何值时, S 取得最大值, 并求出最大值;
- (3) 当 $\triangle PQB$ 为等腰三角形时, 求 t 的值.



考点： 四边形综合题.

分析： (1) 通过比较线段 AB , BC 的大小, 找出较短的线段, 根据速度公式可以直接求得;

(2) 由已知条件, 把 $\triangle PQB$ 的边 QB 用含 t 的代数式表示出来, 三角形的高可由相似三角形的性质也用含 t 的代数式表示出来, 代入三角形的面积公式可得到一个二次函数, 即可求出 S 的最值;

(3) 通过作辅助线构造直角三角形, 由勾股定理用含 t 的代数式把 $\triangle PQB$ 三边表示出来, 根据线段相等列出等式求解, 即可求的结论.

解答： 解: (1) 作 $CE \perp AB$ 于 E ,

$\because DC \parallel AB, DA \perp AB,$

$\therefore$ 四边形 $AFVE$ 是矩形,

$\therefore AE = DE = 5, CE = AD = 4,$

$\therefore BE = 3,$

$\therefore BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$

$\therefore BC < AB,$

$\therefore$ P 到 C 时, P 、 Q 同时停止运动,

$\therefore t = \frac{5}{1} = 5$ (秒),

即 $t = 5$ 秒时, P 、 Q 两点同时停止运动.

(2) 由题意知, $AQ = BP = t,$

$\therefore QB = 8 - t,$

作 $PF \perp QB$ 于 F , 则 $\triangle BPF \sim \triangle BCE$,

$$\therefore \frac{PF}{CE} = \frac{BF}{BC}, \text{ 即 } \frac{BF}{4} = \frac{t}{5},$$

$$\therefore BF = \frac{4t}{5},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} QB \cdot PF = \frac{1}{2} \times \frac{4t}{5} (8-t) = -\frac{2}{5} t^2 + \frac{16t}{5} = -\frac{2}{5} (t-4)^2 + \frac{32}{5} \quad (0 < t \leq 5),$$

$$\therefore -\frac{2}{5} < 0,$$

$\therefore S$ 有最大值, 当 $t=4$ 时, S 的最大值是 $\frac{32}{5}$;

$$(3) \therefore \cos \angle B = \frac{BE}{BC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore BF = t \cdot \cos \angle B = \frac{3t}{5},$$

$$\therefore QF = AB - AQ - BF = 8 - \frac{8t}{5},$$

$$\therefore QP = \sqrt{QF^2 + PF^2} = \sqrt{\left(8 - \frac{8t}{5}\right)^2 + \left(\frac{4t}{5}\right)^2} = 4\sqrt{\frac{1}{5}t^2 - \frac{8}{5}t + 4}$$

$$\text{①当 } PQ=PB \text{ 时, 即 } QP = 4\sqrt{\frac{1}{5}t^2 - \frac{8}{5}t + 4}, \text{ 解得 } t = \frac{128+8\sqrt{234}}{22} \text{ (舍去负值)}$$

$$\therefore t = \frac{128+8\sqrt{234}}{22} > 5, \text{ 不合题意,}$$

$$\text{②当 } PQ=BQ \text{ 时, 即 } 4\sqrt{\frac{1}{5}t^2 - \frac{8}{5}t + 4} = 8 - t,$$

$$\text{解得: } t_1 = 0 \text{ (舍去), } t_2 = \frac{48}{11},$$

$$\text{③当 } QB=BP, \text{ 即 } 8-t=t,$$

$$\text{解得: } t=4.$$

综上所述: 当 $t = \frac{48}{11}$ 秒或 $t=4$ 秒时, $\triangle PQB$ 为等腰三角形.

点评: 本题主要考查了勾股定理、相似三角形的判定和性质、列函数解析式、求二次函数的最值, 综合性强, 能根据已知条件把所需线段用含 t 的代数式表示来, 灵活用三角形的性质和判定是解决问题的关键, 要注意分类思想、方程思想的应用.

