

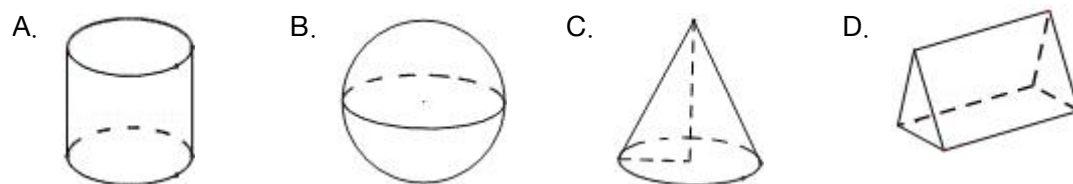
2015 年湖南省湘潭市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题有且只有一个正确答案，请将正确答案的选项代号涂在答题卡相应的位置上，每小题 3 分，满分 24 分）

1. 在数轴上表示 -2 的点与表示 3 的点之间的距离是（ ）

- A. 5 B. -5 C. 1 D. -1

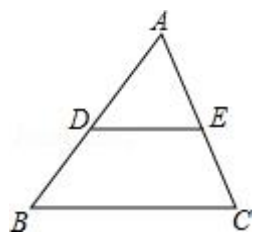
2. (3 分) (2015•湘潭) 下面四个立体图形中，三视图完全相同的是（ ）



3. (3 分) (2015•湘潭) 下列计算正确的是（ ）

- A. $\sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{3}$ B. $3^{-1} = -3$ C. $(a^4)^2 = a^8$ D. $a^6 \div a^2 = a^3$

4. (3 分) (2015•湘潭) 在 $\triangle ABC$ 中，D、E 为边 AB、AC 的中点，已知 $\triangle ADE$ 的面积为 4，那么 $\triangle ABC$ 的面积是（ ）

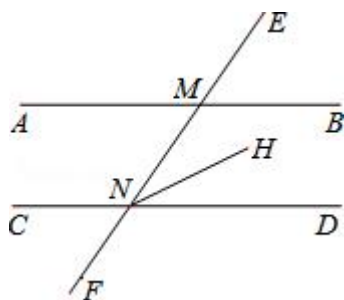


- A. 8 B. 12 C. 16 D. 20

5. (3 分) (2015•湘潭) 下列四个命题中，真命题是（ ）

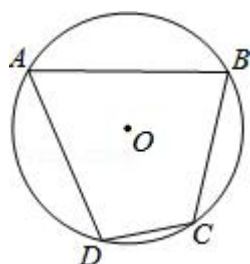
- A. “任意四边形内角和为 360° ”是不可能事件
B. “湘潭市明天会下雨”是必然事件
C. “预计本题的正确率是 95%”表示 100 位考生中一定有 95 人做对
D. 抛掷一枚质地均匀的硬币，正面朝上的概率是 $\frac{1}{2}$

6. (3 分) (2015•湘潭) 如图，已知直线 $AB \parallel CD$ ，且直线 EF 分别交 AB、CD 于 M、N 两点，NH 是 $\angle MND$ 的角平分线。若 $\angle AMN = 56^\circ$ ，则 $\angle MNH$ 的度数是（ ）



- A. 28° B. 30° C. 34° D. 56°

7. (3分) (2015•湘潭) 如图, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, 若 $\angle DAB=60^\circ$, 则 $\angle BCD$ 的度数是 ()

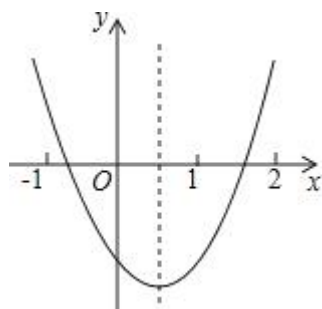


- A. 60° B. 90° C. 100° D. 120°

8. (3分) (2015•湘潭) 如图, 观察二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象, 下列结论:

① $a+b+c > 0$, ② $2a+b > 0$, ③ $b^2 - 4ac > 0$, ④ $ac > 0$.

其中正确的是 ()



- A. ①② B. ①④ C. ②③ D. ③④

二、填空题 (本题共 8 个小题, 请将答案写在答题卡相应的位置上, 每小题 3 分, 满分 24 分)

9. (3分) (2015•湘潭) $\frac{1}{2}$ 的倒数是_____.

10. (3分) (2015•湘潭) 计算: $2^3 - (-2) =$ _____.

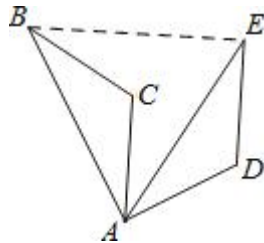
11. (3分) (2015•湘潭) 在今年的湘潭市“党和人民满意的好老师”的评选活动中, 截止到5月底, 王老师获得网络点赞共计 183000 个, 用科学记数法表示这个数为_____.

12. (3分) (2015•湘潭) 高一新生入学军训射击训练中, 小张同学的射击成绩 (单位: 环) 为: 5、7、9、10、7, 则这组数据的众数是_____.

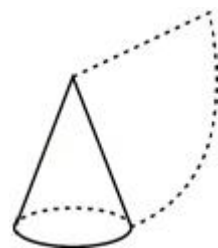
13. (3分) (2015•湘潭) 湘潭盘龙大观园开园啦! 其中杜鹃园的门票售价为: 成人票每张 50 元, 儿童票每张 30 元. 如果某日杜鹃园售出门票 100 张, 门票收入共 4000 元. 那么当日售出成人票_____张.

14. (3分) (2015•湘潭) 已知菱形 ABCD 的面积为 24cm^2 , 若对角线 $AC=6\text{cm}$, 则这个菱形的边长为_____cm.

15. (3分) (2015•湘潭) 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle AED$, 若线段 $AB=3$, 则 $BE=$ _____.



16. (3分) (2015•湘潭) 小华为参加毕业晚会演出, 准备制一顶圆锥形彩色纸帽, 如图所示, 如果纸帽的底面半径为 8cm, 母线长为 25cm, 那么制作这顶纸帽至少需要彩色纸板的面积为_____ cm^2 . (结果保留 π)

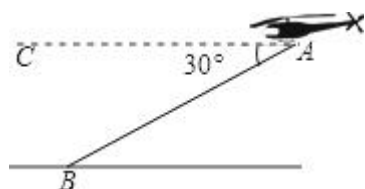


三、解答题 (本大题共 10 个小题, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤, 请将解答过程写在答题卡相应位置上, 满分 72 分)

17. (6分) (2015•湘潭) 解不等式组:
$$\begin{cases} x+5 > 3 \\ x+6 > 4x-3 \end{cases}$$

18. (6分) (2015•湘潭) 先化简, 再求值: $(1 - \frac{x}{x+1}) \div \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$, 其中 $x = \sqrt{5} + 1$.

19. (6分) (2015•湘潭) “东方之星”客船失事之后, 本着“关爱生命, 救人第一”的宗旨, 搜救部门紧急派遣直升机到失事地点进行搜救, 搜救过程中, 假设直升机飞到 A 处时, 发现前方江面上 B 处有一漂浮物, 从 A 测得 B 处的俯角为 30° , 已知该直升机一直保持在距江面 100 米高度飞行搜索, 飞行速度为 10 米每秒, 求该直升机沿直线方向朝漂浮物飞行多少秒可到达漂浮物的正上方? (结果精确到 0.1, $\sqrt{3} \approx 1.73$)



20. (6分) (2015•湘潭) 2015 年湘潭市中考招生政策发生较大改变, 其中之一是: 省级示范性高中批次志愿中, 每个考生可填报两所学校 (有先后顺序), 我市某区域的初三毕业生可填报的省级示范性高中有 A、B、C、D 四所.

- (1) 请列举出该区域学生填报省级示范性高中批次志愿的所有可能结果;
- (2) 求填报方案中含有 A 学校的概率.

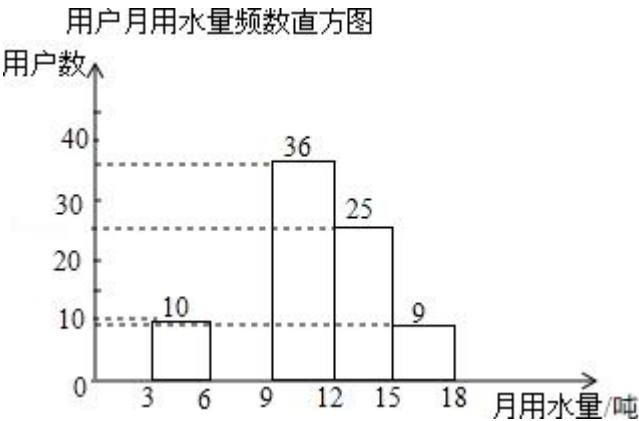
21. (6分) (2015•湘潭) 水利部确定每年的3月22日至28日为“中国水周”(1994年以前为7月1日至7日), 从1991年起, 我国还将每年5月的第二周作为城市节约用水宣传周. 某社区为了进一步提高居民珍惜水、保护水和水忧患意识, 提倡节约用水, 从本社区5000户家庭中随机抽取100户, 调查他们家庭每月的平均用水量, 并将调查的结果绘制成如下的两幅不完整的统计图表:

用户月用水量频数分布表

平均用水量 (吨)	频数	频率
3 ~ 6 吨	10	0.1
6 ~ 9 吨	m	0.2
9 ~ 12 吨	36	0.36
12 ~ 15 吨	25	n
15 ~ 18 吨	9	0.09

请根据上面的统计图表, 解答下列问题:

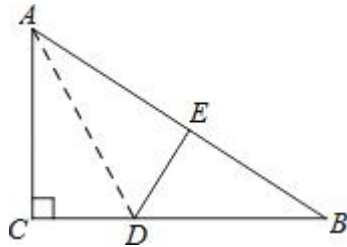
- (1) 在频数分布表中: $m=$ _____, $n=$ _____;
- (2) 根据题中数据补全频数直方图;
- (3) 如果自来水公司将基本月用水量定为每户每月12吨, 不超过基本月用水量的部分享受基本价格, 超出基本月用水量的部分实行加价收费, 那么该社区用户中约有多少户家庭能够全部享受基本价格?



22. (6分) (2015•湘潭) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\triangle ACD$ 沿 AD 折叠, 使得点 C 落在斜边 AB 上的点 E 处.

(1) 求证: $\triangle BDE \sim \triangle BAC$;

(2) 已知 $AC=6$, $BC=8$, 求线段 AD 的长度.

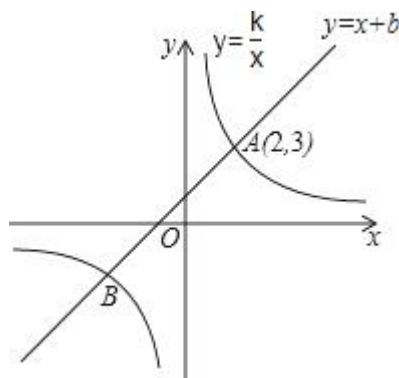


23. (8分) (2015•湘潭) 如图, 已知一次函数 $y=x+b$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象交于 A 、 B 两点, 其中点 A 的坐标为 $(2, 3)$.

(1) 求一次函数与反比例函数的解析式;

(2) 求点 B 的坐标;

(3) 请根据图象直接写出不等式 $x+b > \frac{k}{x}$ 的解集.



24. (8分) (2015•湘潭) 阅读材料：用配方法求最值.

已知 x, y 为非负实数,

$$\because x+y-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2-2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$$

$\therefore x+y\geq 2\sqrt{xy}$, 当且仅当“ $x=y$ ”时, 等号成立.

示例: 当 $x>0$ 时, 求 $y=x+\frac{1}{x}+4$ 的最小值.

解: $y=(x+\frac{1}{x})+4\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+4=6$, 当 $x=\frac{1}{x}$, 即 $x=1$ 时, y 的最小值为 6.

(1) 尝试: 当 $x>0$ 时, 求 $y=\frac{x^2+x+1}{x}$ 的最小值.

(2) 问题解决: 随着人们生活水平的快速提高, 小轿车已成为越来越多家庭的交通工具, 假设某种小轿车的购车费用为 10 万元, 每年应缴保险费等各类费用共计 0.4 万元, n 年的保养、维护费用总和为 $\frac{n^2+n}{10}$ 万元. 问这种小轿车使用多少年报废最合算 (即: 使用多少年的年平均费用最少, 年平均费用= $\frac{\text{所有费用之和}}{\text{年数}n}$) ? 最少年平均费用为多少万元?

25. (10分) (2015•湘潭) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 过点 A 作 $\odot O$ 的切线 MA , P 为直线 MA 上一动点, 以点 P 为圆心, PA 为半径作 $\odot P$, 交 $\odot O$ 于点 C , 连接 PC 、 OP 、 BC .

(1) 知识探究 (如图 1):

①判断直线 PC 与 $\odot O$ 的位置关系, 请证明你的结论;

②判断直线 OP 与 BC 的位置关系, 请证明你的结论.

(2) 知识运用 (如图 2):

当 $PA>OA$ 时, 直线 PC 交 AB 的延长线于点 D , 若 $BD=2AB$, 求 $\tan\angle ABC$ 的值.

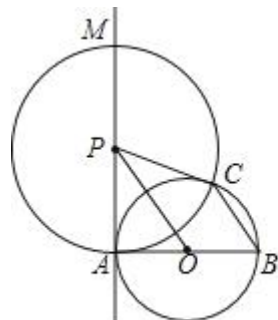


图1

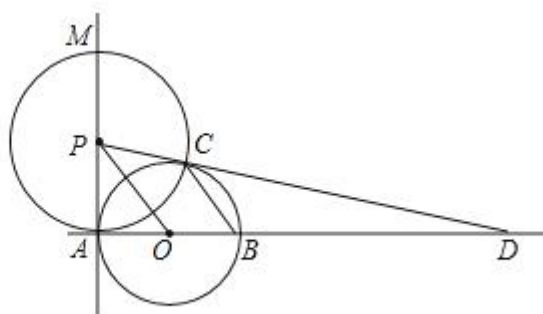


图2

26. (10 分) (2015•湘潭) 如图, 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象交 x 轴于 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 两点, 交 y 轴于点 C , 连接 BC , 动点 P 以每秒 1 个单位长度的速度从 A 向 B 运动, 动点 Q 以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位长度的速度从 B 向 C 运动, P 、 Q 同时出发, 连接 PQ , 当点 Q 到达 C 点时, P 、 Q 同时停止运动, 设运动时间为 t 秒.

(1) 求二次函数的解析式;

(2) 如图 1, 当 $\triangle BPQ$ 为直角三角形时, 求 t 的值;

(3) 如图 2, 当 $t < 2$ 时, 延长 QP 交 y 轴于点 M , 在抛物线上是否存在一点 N , 使得 PQ 的中点恰为 MN 的中点? 若存在, 求出点 N 的坐标与 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

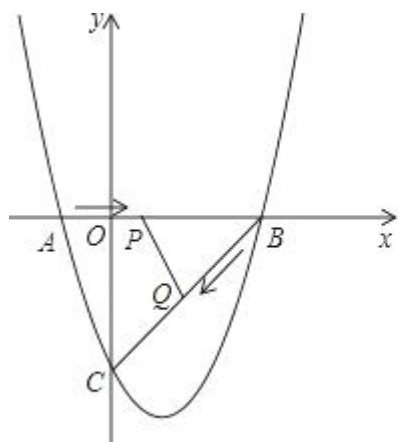


图1

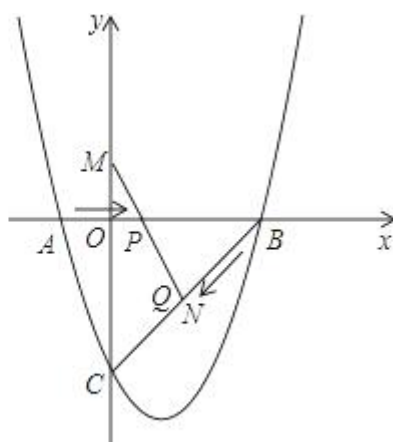


图2

2015 年湖南省湘潭市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题有且只有一个正确答案，请将正确答案的选项代号涂在答题卡相应的位置上，每小题 3 分，满分 24 分）

1. 在数轴上表示 -2 的点与表示 3 的点之间的距离是（ ）

- A. 5 B. -5 C. 1 D. -1

考点：数轴.

分析：根据正负数的运算方法，用 3 减去 -2 ，求出在数轴上表示 -2 的点与表示 3 的点之间的距离为多少即可.

解答：解： $3 - (-2)$

$$= 2 + 3$$

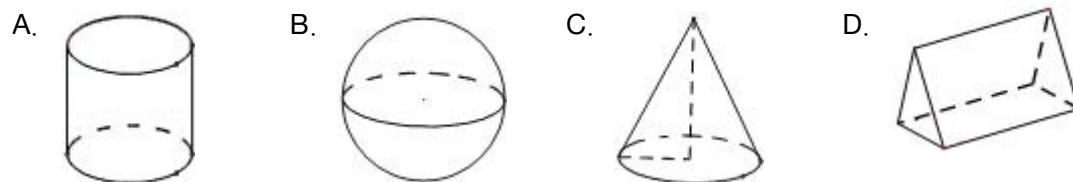
$$= 5.$$

所以在数轴上表示 -2 的点与表示 3 的点之间的距离为 5 .

故选 A

点评：此题主要考查了正负数的运算方法，关键是根据在数轴上表示 -2 的点与表示 3 的点之间的距离列出式子.

2. (3 分) (2015•湘潭) 下面四个立体图形中，三视图完全相同的是（ ）



考点：简单几何体的三视图.

分析：根据三视图的概念求解.

解答：解：A、主视图、左视图是矩形，俯视图是圆，故 A 错误；

B、主视图、左视图、俯视图都是圆，故 B 正确；

C、主视图、左视图都是三角形，俯视图是圆，故 C 错误；

D、主视图、俯视图都是矩形，左视图是三角形，故 D 错误；

故选：B.

点评： 本题考查了简单几何体的三视图，从正面看得到的视图是主视图，从左边看得到的视图是左视图，从上面看得到的视图是俯视图.

3. (3分) (2015•湘潭) 下列计算正确的是 ()

- A. $\sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{3}$ B. $3^{-1} = -3$ C. $(a^4)^2 = a^8$ D. $a^6 \div a^2 = a^3$

考点： 幂的乘方与积的乘方；同底数幂的除法；负整数指数幂；二次根式的加减法.

分析： A. 不是同类二次根式，不能合并；B. 依据负整数指数幂的运算法则计算即可；C. 依据幂的乘方法则计算即可；D. 依据同底数幂的除法法则计算即可.

解答： 解：A. 不是同类二次根式，不能合并，故 A 错误；

B. $3^{-1} = \frac{1}{3}$ ，故 B 错误；

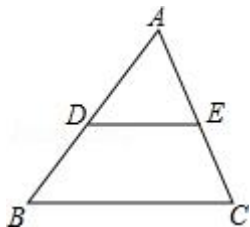
C. $(a^4)^2 = a^{4 \times 2} = a^8$ ，故 C 正确；

D. $a^6 \div a^2 = a^{6-2} = a^4$ ，故 D 错误.

故选：C.

点评： 本题主要考查的是数与式的运算，掌握同类二次根式的定义、负整数指数幂、积的乘方、幂的乘方的运算法则是解题的关键.

4. (3分) (2015•湘潭) 在 $\triangle ABC$ 中，D、E为边AB、AC的中点，已知 $\triangle ADE$ 的面积为4，那么 $\triangle ABC$ 的面积是 ()



- A. 8 B. 12 C. 16 D. 20

考点： 相似三角形的判定与性质；三角形中位线定理.

分析： 由条件可以知道 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，根据中位线的性质就可以求出 $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$ ，再根

据相似三角形的性质就可以得出结论.

解答: 解: $\because$ D、E 分别是 AB、AC 的中点,

$\therefore$ DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore DE \parallel BC, \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$\because \triangle ADE$ 的面积为 4,

$$\therefore \frac{4}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 16.$$

故选: C.

点评: 本题考查中位线的判定及性质的运用, 相似三角形的判定及性质的运用, 解答时证明

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 是解答本题的关键.

5. (3 分) (2015•湘潭) 下列四个命题中, 真命题是 ()

- A. “任意四边形内角和为 360° ”是不可能事件
- B. “湘潭市明天会下雨”是必然事件
- C. “预计本题的正确率是 95%”表示 100 位考生中一定有 95 人做对
- D. 抛掷一枚质地均匀的硬币, 正面朝上的概率是 $\frac{1}{2}$

考点: 命题与定理.

分析: 根据四边形内角和和不可能事件的定义对 A 进行判断; 根据必然事件的定义对 B 进行判断; 根据估计的含义对 C 进行判断; 根据概率的定义对 D 进行判断.

解答: 解: A、“任意四边形内角和为 360° ”是必然事件, 错误;

B、“湘潭市明天会下雨”是随机事件, 错误;

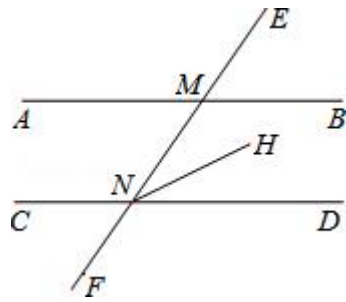
C、“预计本题的正确率是 95%”表示 100 位考生中不一定有 95 人做对, 错误;

D、抛掷一枚质地均匀的硬币, 正面朝上的概率是 $\frac{1}{2}$, 正确.

故选 D.

点评: 本题考查了命题与定理: 判断一件事情的语句, 叫做命题. 许多命题都是由题设和结论两部分组成, 题设是已知事项, 结论是由已知事项推出的事项, 一个命题可以写成“如果...那么...”形式. 有些命题的正确性是用推理证实的, 这样的真命题叫做定理.

6. (3分) (2015•湘潭) 如图, 已知直线 $AB \parallel CD$, 且直线 EF 分别交 AB 、 CD 于 M 、 N 两点, NH 是 $\angle MND$ 的角平分线. 若 $\angle AMN=56^\circ$, 则 $\angle MNH$ 的度数是 ()



- A. 28° B. 30° C. 34° D. 56°

考点: 平行线的性质.

分析: 先根据平行线的性质求出 $\angle MND$ 的度数, 再由角平分线的定义即可得出结论.

解答: 解: $\because$ 直线 $AB \parallel CD$, $\angle AMN=56^\circ$,

$$\therefore \angle MND = \angle AMN = 56^\circ.$$

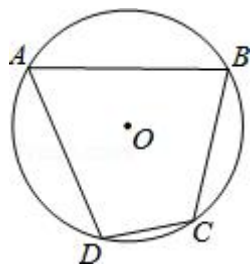
$\because NH$ 是 $\angle MND$ 的角平分线,

$$\therefore \angle MNH = \frac{1}{2} \angle MND = 28^\circ.$$

故选 A.

点评: 本题考查的是平行线的性质, 用到的知识点为: 两直线平行, 内错角相等.

7. (3分) (2015•湘潭) 如图, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, 若 $\angle DAB=60^\circ$, 则 $\angle BCD$ 的度数是 ()



- A. 60° B. 90° C. 100° D. 120°

考点：圆内接四边形的性质.

分析：根据圆内接四边形的性质：圆内接四边形的对角互补，求解.

解答：解：∵四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形，

$$\therefore \angle DAB + \angle DCB = 180^\circ.$$

$$\because \angle DAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

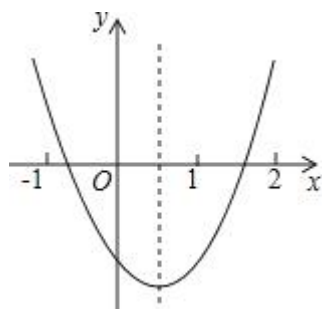
故选 D.

点评：本题考查了圆内接四边形的性质：解答本题的关键是掌握圆内接四边形的对角互补的性质.

8. (3 分) (2015•湘潭) 如图，观察二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象，下列结论：

① $a + b + c > 0$, ② $2a + b > 0$, ③ $b^2 - 4ac > 0$, ④ $ac > 0$.

其中正确的是 ()



A. ①②

B. ①④

C. ②③

D. ③④

考点：二次函数图象与系数的关系.

分析：令 $x=1$ 代入可判断①；由对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$ 的范围可判断②；由图象与 x 轴有两个交点可判断③；由开口方向及与 x 轴的交点可分别得出 a 、 c 的符号，可判断④.

解答：解：由图象可知当 $x=1$ 时， $y < 0$,

$$\therefore a + b + c < 0,$$

故①不正确；

$$\text{由图象可知 } 0 < -\frac{b}{2a} < 1,$$

$$\therefore \frac{b}{2a} > -1,$$

又 $\because$ 开口向上,

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore b > -2a,$$

$$\therefore 2a+b > 0,$$

故②正确;

由图象可知二次函数与 x 轴有两个交点,

$\therefore$ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta > 0, \text{ 即 } b^2 - 4ac > 0,$$

故③正确;

由图象可知抛物线开口向上, 与 y 轴的交点在 x 轴的下方,

$$\therefore a > 0, c < 0,$$

$$\therefore ac < 0,$$

故④不正确;

综上可知正确的为②③,

故选 C.

点评: 本题主要考查二次函数的图象和性质, 掌握二次函数的开口方向、对称轴、与 x 轴的交点等知识是解题的关键.

二、填空题 (本题共 8 个小题, 请将答案写在答题卡相应的位置上, 每小题 3 分, 满分 24 分)

9. (3 分) (2015•湘潭) $\frac{1}{2}$ 的倒数是 2.

考点: 倒数.

分析: 根据倒数的定义, $\frac{1}{2}$ 的倒数是 2.

解答: 解: $\frac{1}{2}$ 的倒数是 2,

故答案为: 2.

点评: 此题主要考查了倒数的定义: 若两个数的乘积是 1, 我们就称这两个数互为倒数.

10. (3 分) (2015•湘潭) 计算: $2^3 - (-2) = \underline{10}$.

考点: 有理数的乘方; 有理数的减法.

分析: 根据有理数的混合计算解答即可.

解答: 解: $2^3 - (-2)$

$$= 8 + 2$$

$$= 10.$$

故答案为: 10.

点评: 此题考查有理数的乘方, 关键是根据有理数的乘方得出 $2^3=8$, 再与 2 相加.

11. (3 分) (2015•湘潭) 在今年的湘潭市“党和人民满意的好老师”的评选活动中, 截止到 5 月底, 王老师获得网络点赞共计 183000 个, 用科学记数法表示这个数为 $\underline{1.83 \times 10^5}$.

考点: 科学记数法—表示较大的数.

分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: 将 183000 用科学记数法表示为 1.83×10^5 .

故答案为 1.83×10^5 .

点评: 本题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. (3 分) (2015•湘潭) 高一新生入学军训射击训练中, 小张同学的射击成绩 (单位: 环) 为: 5、7、9、10、7, 则这组数据的众数是 $\underline{7}$.

考点: 众数.

分析: 根据众数的定义即可求解.

解答: 解: 这组数据的众数是 7.

故答案为: 7.

点评: 本题主要考查了众数的概念. 关键是根据众数是一组数据中出现次数最多的数据, 注意众数可以不止一个.

13. (3 分) (2015•湘潭) 湘潭盘龙大观园开园啦! 其中杜鹃园的门票售价为: 成人票每张 50 元, 儿童票每张 30 元. 如果某日杜鹃园售出门票 100 张, 门票收入共 4000 元. 那么当日售出成人票 50 张.

考点: 一元一次方程的应用.

分析: 根据总售出门票 100 张, 共得收入 4000 元, 可以列出方程求解即可.

解答: 解: 设当日售出成人票 x 张, 儿童票 $(100 - x)$ 张,

可得: $50x + 30(100 - x) = 4000$,

解得: $x = 50$.

答: 当日售出成人票 50 张.

故答案为: 50.

点评: 此题考查一元一次方程的应用, 本题解题关键是要读懂题目的意思, 根据题目给出的条件, 找出合适的等量关系, 列出方程, 再求解.

14. (3 分) (2015•湘潭) 已知菱形 ABCD 的面积为 24cm^2 , 若对角线 $AC = 6\text{cm}$, 则这个菱形的边长为 5 cm.

考点: 菱形的性质.

分析: 根据菱形的面积等于对角线乘积的一半可求出另一条对角线 BD 的长. 然后根据勾股定理即可求得边长.

解答: 解: 菱形 ABCD 的面积 $= \frac{1}{2} AC \cdot BD$,

$\therefore$ 菱形 ABCD 的面积是 24cm^2 , 其中一条对角线 AC 长 6cm,

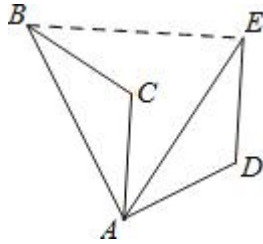
$\therefore$ 另一条对角线 BD 的长 $= 8\text{cm}$;

边长是: $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{cm}$.

故答案为：5.

点评：本题考查了菱形的性质. 菱形被对角线分成 4 个全等的直角三角形，以及菱形的面积的计算，理解菱形的性质是关键.

15. (3 分) (2015•湘潭) 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle AED$ ，若线段 $AB=3$ ，则 $BE=$ 3 .



考点：旋转的性质.

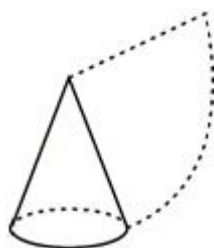
分析：根据旋转的性质得出 $\angle BAE=60^\circ$ ， $AB=AE$ ，得出 $\triangle BAE$ 是等边三角形，进而得出 $BE=3$ 即可.

解答：解： $\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle AED$ ，
 $\therefore \angle BAE=60^\circ$ ， $AB=AE$ ，
 $\therefore \triangle BAE$ 是等边三角形，
 $\therefore BE=3$.

故答案为：3.

点评：本题考查旋转的性质，关键是根据旋转变换前后，对应线段、对应角分别相等，图形的大小、形状都不改变. 要注意旋转的三要素：①定点 - 旋转中心；②旋转方向；③旋转角度.

16. (3 分) (2015•湘潭) 小华为参加毕业晚会演出，准备制一顶圆锥形彩色纸帽，如图所示，如果纸帽的底面半径为 8cm ，母线长为 25cm ，那么制作这顶纸帽至少需要彩色纸板的面积为 200π cm^2 . (结果保留 π)



考点：圆锥的计算.

分析：圆锥的侧面积=底面周长×母线长÷2.

解答：解：底面半径为 8cm,

则底面周长= 16π ,

侧面面积= $\frac{1}{2} \times 16\pi \times 25 = 200\pi \text{cm}^2$.

故答案为 200π .

点评：本题考查了圆锥的计算，利用了圆的周长公式和扇形面积公式，熟练记忆圆锥的侧面积计算公式是解决本题的关键.

三、解答题（本大题共 10 个小题，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请将解答过程写在答题卡相应位置上，满分 72 分）

17. (6 分) (2015•湘潭) 解不等式组:
$$\begin{cases} x+5 > 3 \\ x+6 > 4x-3 \end{cases}$$

考点：解一元一次不等式组.

分析：先求出两个不等式的解集，再求其公共解.

解答：解:
$$\begin{cases} x+5 > 3 \text{ ①} \\ x+6 > 4x-3 \text{ ②} \end{cases}$$

由①得, $x > -2$,

由②得, $x < 3$.

所以, 不等式组的解集为 $-2 < x < 3$.

点评：本题主要考查了一元一次不等式组解集的求法，其简便求法就是用口诀求解. 求不等式组解集的口诀：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）.

18. (6分) (2015•湘潭) 先化简, 再求值: $(1 - \frac{x}{x+1}) \div \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$, 其中 $x = \sqrt{5} + 1$.

考点: 分式的化简求值.

分析: 首先将小括号内的部分进行通分、计算, 然后将除法转化为乘法, 接下来再进行分解、约分, 最后代数求值即可.

解答: 解: 原式 = $(\frac{x+1}{x+1} - \frac{x}{x+1}) \div \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

$$= \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

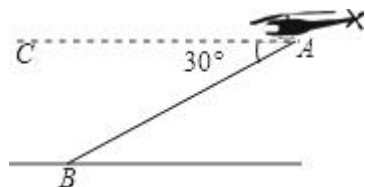
$$= \frac{1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{x-1},$$

将 $x = \sqrt{5} + 1$ 代入得: 原式 = $\frac{1}{\sqrt{5} + 1 - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

点评: 本题主要考查的是分式的化简与计算, 掌握分式的通分、约分、分式的减法、分式的乘法、除法法则是解题的关键.

19. (6分) (2015•湘潭) “东方之星”客船失事之后, 本着“关爱生命, 救人第一”的宗旨, 搜救部门紧急派遣直升机到失事地点进行搜救, 搜救过程中, 假设直升机飞到 A 处时, 发现前方江面上 B 处有一漂浮物, 从 A 测得 B 处的俯角为 30° , 已知该直升机一直保持在距江面 100 米高度飞行搜索, 飞行速度为 10 米每秒, 求该直升机沿直线方向朝漂浮物飞行多少秒可到达漂浮物的正上方? (结果精确到 0.1, $\sqrt{3} \approx 1.73$)



考点: 解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

分析: 作 $AD \perp BD$ 于点 D, 由题意得: $\angle ABC = 30^\circ$, $AD = 100$ 米, 在 $Rt\triangle ABD$ 中,

$\frac{AD}{BD} = \tan \angle ABC$, 求得 BD 的长后除以速度即可得到时间.

解答: 解: 作 $AD \perp BD$ 于点 D,

由题意得: $\angle ABC = 30^\circ$, $AD = 100$ 米,

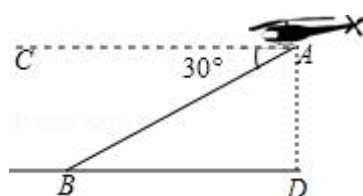
在 $Rt\triangle ABD$ 中, $\frac{AD}{BD} = \tan \angle ABC$,

$$\therefore BD = \frac{AD}{\tan 30^\circ} = \frac{100}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 100\sqrt{3} \text{ 米},$$

$\therefore$ 飞行速度为 10 米每秒,

$\therefore$ 飞行时间为 $100\sqrt{3} \div 10 = 10\sqrt{3} \approx 17.3$ 秒,

$\therefore$ 该直升机沿直线方向朝漂浮物飞行 17.3 秒可到达漂浮物的正上方.



点评: 本题考查了解直角三角形的应用, 解题的关键是从实际问题中整理出直角三角形, 难度不大.

20. (6 分) (2015•湘潭) 2015 年湘潭市中考招生政策发生较大改变, 其中之一是: 省级示范性高中批次志愿中, 每个考生可填报两所学校 (有先后顺序), 我市某区域的初三毕业生可填报的省级示范性高中有 A、B、C、D 四所.

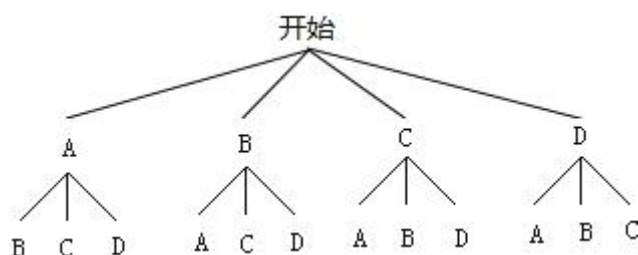
- (1) 请列举出该区域学生填报省级示范性高中批次志愿的所有可能结果;
- (2) 求填报方案中含有 A 学校的概率.

考点: 列表法与树状图法.

分析: (1) 首先根据题意画出树状图, 从而可得到所有可能结果;

(2) 根据树状图找出所有含有 A 的结果, 然后再利用概率公式计算即可.

解答: 解: (1) 该区域学生填报省级示范性高中批次志愿的所有可能结果如下图所示:



(2) 根据树状图可知：该区域学生填报省级示范性高中批次志愿的所有可能结果共有 12 种，其中含有 A 的共有 6 种，

$$\text{故填报方案中含有 A 学校的概率} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

点评：如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 A 出现 m 种结果，

$$\text{那么事件 A 的概率 } P(A) = \frac{m}{n}.$$

21. (6 分) (2015•湘潭) 水利部确定每年的 3 月 22 日至 28 日为“中国水周”(1994 年以前为 7 月 1 日至 7 日)，从 1991 年起，我国还将每年 5 月的第二周作为城市节约用水宣传周。某社区为了进一步提高居民珍惜水、保护水和水忧患意识，提倡节约用水，从本社区 5000 户家庭中随机抽取 100 户，调查他们家庭每月的平均用水量，并将调查的结果绘制成如下的两幅不完整的统计图表：

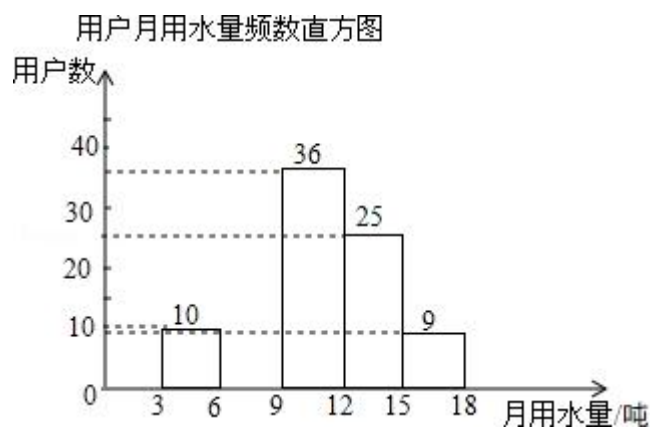
用户月用水量频数分布表		
平均用水量 (吨)	频数	频率
3 ~ 6 吨	10	0.1
6 ~ 9 吨	m	0.2
9 ~ 12 吨	36	0.36
12 ~ 15 吨	25	n
15 ~ 18 吨	9	0.09

请根据上面的统计图表，解答下列问题：

(1) 在频数分布表中： $m = \underline{20}$ ， $n = \underline{0.25}$ ；

(2) 根据题中数据补全频数直方图；

(3) 如果自来水公司将基本月用水量定为每户每月 12 吨，不超过基本月用水量的部分享受基本价格，超出基本月用水量的部分实行加价收费，那么该社区用户中约有多少户家庭能够全部享受基本价格？



考点: 频数（率）分布直方图；频数（率）分布表.

分析: (1) 根据频率=频数÷数据总数, 可得到 $m \div 100 = 0.2$, 可求得 $m = 20$, 然后利用频率=频数÷数据可求得 n 的值;

(2) 根据 (1) 中的结果画出统计图即可;

(3) 求得 100 户家庭中能够全部享受基本价的频数, 然后再乘 5 即可.

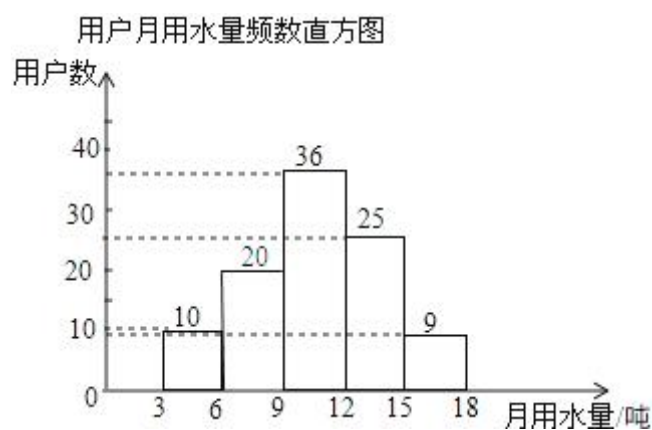
解答: 解: (1) $m \div 100 = 0.2$,

解得 $m = 20$,

$n = 25 \div 100 = 0.25$;

故答案为: 20; 0.25;

(2) 补全频数直方图如图:



(3) $(10 + 20 + 36) \times 5 = 330$ (户).

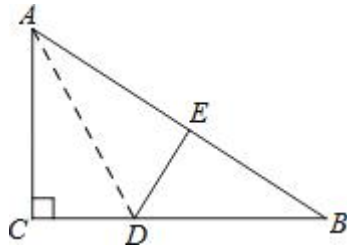
答: 该社区用户中约有 330 户家庭能够全部享受基本价格.

点评: 本题主要考查的是统计表和统计图的应用, 掌握频数、总数、频率之间的关系是解题的关键.

22. (6分) (2015•湘潭) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\triangle ACD$ 沿 AD 折叠, 使得点 C 落在斜边 AB 上的点 E 处.

(1) 求证: $\triangle BDE \sim \triangle BAC$;

(2) 已知 $AC=6$, $BC=8$, 求线段 AD 的长度.



考点: 相似三角形的判定与性质; 翻折变换 (折叠问题).

分析: (1) 根据折叠的性质得出 $\angle C = \angle AED = 90^\circ$, 利用 $\angle DEB = \angle C$, $\angle B = \angle B$ 证明三角形相似即可;

(2) 由折叠的性质知 $CD=DE$, $AC=AE$. 根据题意在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中运用勾股定理求 DE , 进而得出 AD 即可.

解答: 证明: (1) $\because \angle C=90^\circ$, $\triangle ACD$ 沿 AD 折叠,

$$\therefore \angle C = \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle C = 90^\circ,$$

$$\because \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BAC;$$

(2) 由勾股定理得, $AB=10$.

由折叠的性质知, $AE=AC=6$, $DE=CD$, $\angle AED = \angle C = 90^\circ$.

$$\therefore BE = AB - AE = 10 - 6 = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, 由勾股定理得,

$$DE^2 + BE^2 = BD^2,$$

$$\text{即 } CD^2 + 4^2 = (8 - CD)^2,$$

解得: $CD=3$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 由勾股定理得 $AC^2 + CD^2 = AD^2$,

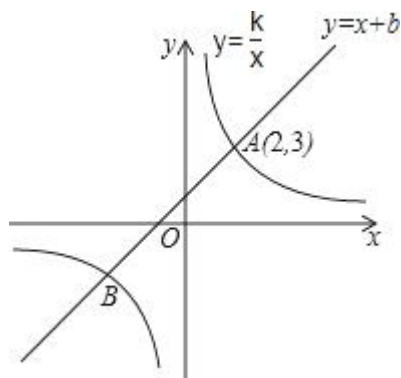
$$\text{即 } 3^2 + 6^2 = AD^2,$$

解得: $AD = 3\sqrt{5}$.

点评： 本题考查了相似三角形的判定和性质，关键是根据 1、折叠的性质：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，根据轴对称的性质，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等；2、勾股定理求解.

23. (8 分) (2015•湘潭) 如图，已知一次函数 $y=x+b$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象交于 A、B 两点，其中点 A 的坐标为 (2, 3).

- (1) 求一次函数与反比例函数的解析式；
- (2) 求点 B 的坐标；
- (3) 请根据图象直接写出不等式 $x+b > \frac{k}{x}$ 的解集.



考点： 反比例函数与一次函数的交点问题.

分析： (1) 把 A 的坐标代入一次函数与反比例函数的解析式即可求出解析式；
 (2) 把一次函数与反比例函数的解析式联立得出方程组，求出方程组的解即可；
 (3) 根据 A、B 的坐标结合图象即可得出答案.

解答： 解：(1) 把点 A 的坐标 (2, 3) 代入一次函数的解析式中，可得： $3=2+b$ ，解得：

$$b=1,$$

所以一次函数的解析式为： $y=x+1$ ；

把点 A 的坐标 (2, 3) 代入反比例函数的解析式中，可得： $k=6$ ，

所以反比例函数的解析式为： $y=\frac{6}{x}$ ；

(2) 把一次函数与反比例函数的解析式联立得出方程组，

$$\text{可得：} \begin{cases} y=x+1 \\ y=\frac{6}{x} \end{cases},$$

解得: $x_1=2$, $x_2=-3$,

所以点 B 的坐标为 $(-3, -2)$;

(3) $\because A(2, 3)$, $B(-3, -2)$,

$\therefore$ 使一次函数值大于反比例函数值的 x 的范围是: $-3 < x < 0$ 或 $x > 2$.

点评: 本题考查了一次函数与反比例函数的解析式, 用待定系数法求出一函数的解析式, 函数的图形等知识点的应用, 主要考查学生的计算能力和观察图形的能力, 用了数形结合思想.

24. (8 分) (2015•湘潭) 阅读材料: 用配方法求最值.

已知 x, y 为非负实数,

$$\because x+y-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2-2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$$

$\therefore x+y\geq 2\sqrt{xy}$, 当且仅当“ $x=y$ ”时, 等号成立.

示例: 当 $x>0$ 时, 求 $y=x+\frac{1}{x}+4$ 的最小值.

解: $y=(x+\frac{1}{x})+4\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+4=6$, 当 $x=\frac{1}{x}$, 即 $x=1$ 时, y 的最小值为 6.

(1) 尝试: 当 $x>0$ 时, 求 $y=\frac{x^2+x+1}{x}$ 的最小值.

(2) 问题解决: 随着人们生活水平的快速提高, 小轿车已成为越来越多家庭的交通工具, 假设某种小轿车的购车费用为 10 万元, 每年应缴保险费等各类费用共计 0.4 万元, n 年的保养、维护费用总和为 $\frac{n^2+n}{10}$ 万元. 问这种小轿车使用多少年报废最合算 (即: 使用多少年的年平均费用最少, 年平均费用= $\frac{\text{所有费用之和}}{\text{年数}n}$)? 最少年平均费用为多少万元?

考点: 配方法的应用.

分析: (1) 首先根据 $y=\frac{x^2+x+1}{x}$, 可得 $y=x+\frac{1}{x}+1$, 然后应用配方法, 求出当 $x>0$ 时,

$y=\frac{x^2+x+1}{x}$ 的最小值是多少即可.

(2) 首先根据题意, 求出年平均费用= $(\frac{n^2+n}{10}+0.4n+10)\div n=\frac{n}{10}+\frac{10}{n}+\frac{1}{2}$, 然后应用配方法, 求出这种小轿车使用多少年报废最合算, 以及最少年平均费用为多少万元即可.

解答:

$$\text{解: (1) } y = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + \frac{1}{x} + 1 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + 1 = 3,$$

$\therefore$ 当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x = 1$ 时, y 的最小值为 3.

$$(2) \text{ 年平均费用} = \left(\frac{n^2 + n}{10} + 0.4n + 10 \right) \div n = \frac{n}{10} + \frac{10}{n} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{n}{10} \times \frac{10}{n}} + \frac{1}{2} = 2 + 0.5 = 2.5,$$

$$\therefore \text{当 } \frac{n}{10} = \frac{10}{n},$$

即 $n = 10$ 时, 最少年平均费用为 2.5 万元.

点评: 此题主要考查了配方法的应用, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确配方法的关键是: 先将一元二次方程的二次项系数化为 1, 然后在方程两边同时加上一次项系数一半的平方.

25. (10 分) (2015•湘潭) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 过点 A 作 $\odot O$ 的切线 MA , P 为直线 MA 上一动点, 以点 P 为圆心, PA 为半径作 $\odot P$, 交 $\odot O$ 于点 C , 连接 PC 、 OP 、 BC .

(1) 知识探究 (如图 1):

① 判断直线 PC 与 $\odot O$ 的位置关系, 请证明你的结论;

② 判断直线 OP 与 BC 的位置关系, 请证明你的结论.

(2) 知识运用 (如图 2):

当 $PA > OA$ 时, 直线 PC 交 AB 的延长线于点 D , 若 $BD = 2AB$, 求 $\tan \angle ABC$ 的值.

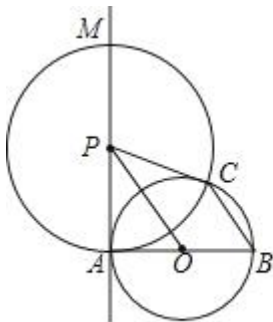


图1

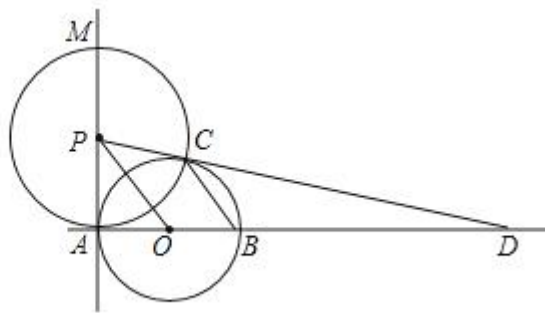


图2

考点: 圆的综合题.

分析: (1) ① PC 与 $\odot O$ 相切. 易证明 $\triangle PAO \cong \triangle PCO$, 则 $\angle PAO = \angle PCO$, 由 PA 是 $\odot O$ 的切线, 可知 $\angle PAO = \angle PCO = 90^\circ$, 即可证明结论;

②OP // BC. 由 (1) 可知 $\angle POA = \angle POC$, 根据圆周角定理可知 $\angle B = \angle POA$, 根据同位角相等可证明 OP // BC.

(2) 根据 OP // BC, 可知 $\frac{BD}{OD} = \frac{CD}{PD}$, 由 $BD = 2AB$, 可知 $AD = 6OA$, $OD = 5OB$, 所以 $PD = 5PC$, 设 $PA = PC = R$, $OA = r$, 根据勾股定理列方程求出 R 与 r 的数量关系, 即可在 Rt $\triangle PAO$ 中求出 $\tan \angle ABC = \tan \angle POA$.

解答: (1) ①PC 与 $\odot O$ 相切.

证明: 如图 1, 连接 OC,

在 $\triangle PAO$ 和 $\triangle PCO$ 中,

$$\begin{cases} OA = OC \\ PO = PO, \\ PA = PC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PAO \cong \triangle PCO,$$

$$\therefore \angle PAO = \angle PCO,$$

$\therefore PA$ 是 $\odot O$ 的切线, AB 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle PAO = \angle PCO = 90^\circ,$$

$\therefore PC$ 与 $\odot O$ 相切.

②OP // BC.

证明: $\because \triangle PAO \cong \triangle PCO$,

$$\therefore \angle POA = \angle POC,$$

$$\therefore \angle B = \angle POA,$$

$$\therefore OP \parallel BC.$$

(2) 解: 如图 2,

$$\because BD = 2AB,$$

$$\therefore BD = 4OB, AD = 6OA,$$

$$\therefore \frac{BD}{OD} = \frac{4}{5},$$

$$\because OP \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{BD}{OD} = \frac{CD}{PD} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore PD = 5PC,$$

设 $PA = PC = R$, $OA = r$,

$$\therefore AD=6r, PD=5R,$$

$$\therefore PA^2+AD^2=PD^2,$$

$$\therefore R^2+(6r)^2=(5R)^2$$

$$\text{解得: } R=\frac{\sqrt{6}}{2}r,$$

$$\therefore \tan \angle ABC = \tan \angle POA = \frac{PA}{OA},$$

$$\therefore \tan \angle ABC = \frac{PA}{OA} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}r}{r} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

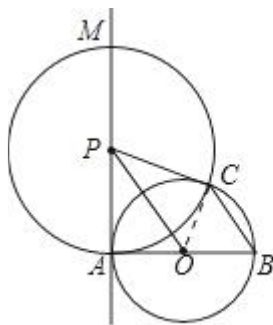


图1

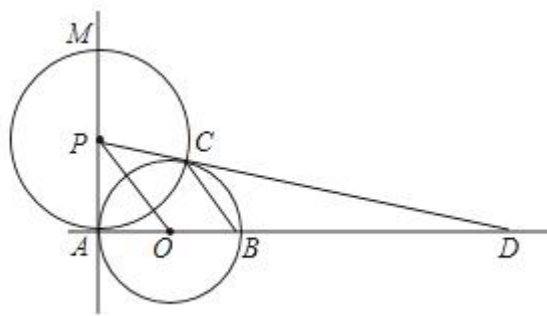


图2

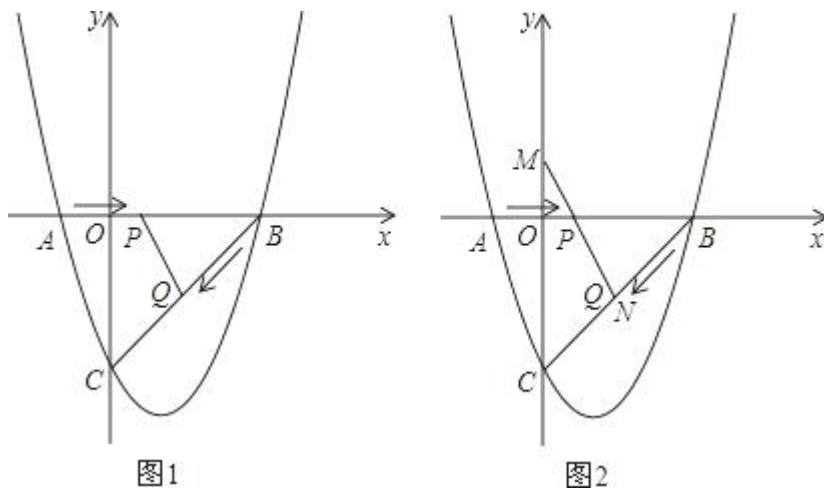
点评: 本题主要考查了圆的有关性质、切线的性质与判定、平行线分线段成比例定理、勾股定理以及锐角三角函数的综合应用, 运用切线的性质来进行计算或论证, 常通过作辅助线连接圆心和切点, 利用垂直构造直角三角形解决有关问题.

26. (10分) (2015•湘潭) 如图, 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象交 x 轴于 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 两点, 交 y 轴于点 C , 连接 BC , 动点 P 以每秒 1 个单位长度的速度从 A 向 B 运动, 动点 Q 以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位长度的速度从 B 向 C 运动, P 、 Q 同时出发, 连接 PQ , 当点 Q 到达 C 点时, P 、 Q 同时停止运动, 设运动时间为 t 秒.

(1) 求二次函数的解析式;

(2) 如图 1, 当 $\triangle BPQ$ 为直角三角形时, 求 t 的值;

(3) 如图 2, 当 $t < 2$ 时, 延长 QP 交 y 轴于点 M , 在抛物线上是否存在一点 N , 使得 PQ 的中点恰为 MN 的中点? 若存在, 求出点 N 的坐标与 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 根据二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过 A (-1, 0)、B (3, 0) 两点, 应用待定系数法, 求出二次函数的解析式即可.

(2) 首先根据待定系数法, 求出 BC 所在的直线的解析式, 再分别求出点 P、点 Q 的坐标各是多少; 然后分两种情况: ①当 $\angle QPB=90^\circ$ 时; ②当 $\angle PQB=90^\circ$ 时; 根据等腰直角三角形的性质, 求出 t 的值各是多少即可.

(3) 首先延长 MQ 交抛物线于点 N, H 是 PQ 的中点, 再用待定系数法, 求出 PQ 所在的直线的解析式, 然后 PQ 的中点恰为 MN 的中点, 判断出是否存在满足题意的点 N 即可.

解答: 解: (1) $\because$ 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过 A (-1, 0)、B (3, 0) 两点,

$$\therefore \begin{cases} 1-b+c=0 \\ 9+3b+c=0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b=-2 \\ c=-3 \end{cases}.$$

$\therefore$ 二次函数的解析式是: $y=x^2-2x-3$.

$$(2) \because y=x^2-2x-3,$$

$\therefore$ 点 C 的坐标是 (0, -3),

$$\therefore BC=\sqrt{(3-0)^2+[0-(-3)]^2}=3\sqrt{2},$$

设 BC 所在的直线的解析式是: $y=mx+n$,

$$\begin{aligned} &\text{则} \begin{cases} 3m+n=0 \\ n=-3 \end{cases}, \\ &\text{解得} \begin{cases} m=1 \\ n=-3 \end{cases}. \end{aligned}$$

$\therefore BC$ 所在的直线的解析式是: $y=x-3$,

$\therefore$ 经过 t 秒, $AP=t$, $BQ=\sqrt{2}t$,

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(t-1, 0)$,

设点 Q 的坐标是 (x, y) ,

$\therefore OB=OC=3$,

$\therefore \angle OBC=\angle OCB=45^\circ$,

则 $y=\sqrt{2}t \times \sin 45^\circ = \sqrt{2}t \times \frac{\sqrt{2}}{2} = t$,

$\therefore BP=\sqrt{2}t \times \cos 45^\circ = \sqrt{2}t \times \frac{\sqrt{2}}{2} = t$,

$\therefore x=3-t$,

$\therefore$ 点 Q 的坐标是 $(3-t, t)$,

①如图 1,

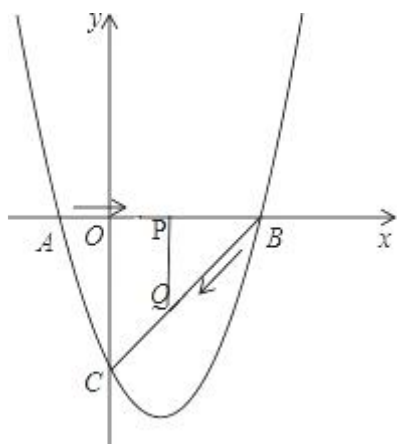


图1

当 $\angle QPB=90^\circ$ 时,

点 P 和点 Q 的横坐标相同,

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(t-1, 0)$, 点 Q 的坐标是 $(3-t, t)$,

$\therefore t-1=3-t$,

解得 $t=2$,

即当 $t=2$ 时, $\triangle BPQ$ 为直角三角形.

图2

当 $\angle PQB=90^\circ$ 时,

$$\therefore \angle PBQ = 45^\circ,$$
$$\therefore BP = \sqrt{2} BQ,$$
$$\therefore BP = 3 - (t - 1) = 4 - t, \quad BQ = \sqrt{2}t,$$
$$\therefore 4 - t = \sqrt{2} \times \sqrt{2}t$$

即 $4 - t = 2t$,

解得 $t = \frac{4}{3}$,

即当 $t = \frac{4}{3}$ 时, $\triangle BPQ$ 为直角三角形.

综上, 可得

当 $\triangle BPQ$ 为直角三角形, $t = \frac{4}{3}$ 或2.

(3) 如图 3, 延长 MQ 交抛物线于点 N, H 是 PQ 的中点,

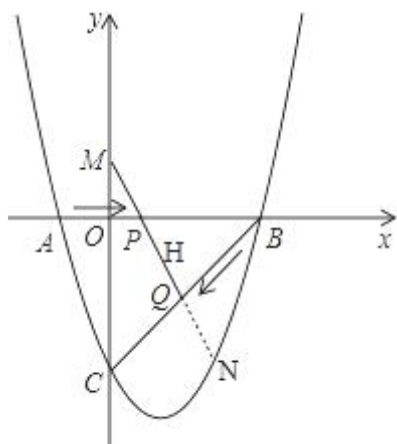


图3

设 PQ 所在的直线的解析式是 $y=cx+d$,

$\because$ 点 P 的坐标是 $(t-1, 0)$, 点 Q 的坐标是 $(3-t, t)$,

$$\therefore \begin{cases} c(t-1)+d=0 \\ c(3-t)+d=t \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} c=\frac{t}{4-2t} \\ d=\frac{t-t^2}{4-2t} \end{cases}.$$

$\therefore$ PQ 所在的直线的解析式是 $y=\frac{t}{4-2t}x+\frac{t-t^2}{4-2t}$,

$\therefore$ 点 M 的坐标是 $(0, \frac{t-t^2}{4-2t})$

$$\therefore \frac{t-1+3-t}{2}=1, \quad \frac{t+0}{2}=\frac{t}{2},$$

$\therefore$ PQ 的中点 H 的坐标是 $(1, \frac{t}{2})$

假设 PQ 的中点恰为 MN 的中点,

$$\therefore 1 \times 2 - 0 = 2, \quad \frac{t}{2} \times 2 - \frac{t-t^2}{4-2t} = \frac{3t-t^2}{4-2t},$$

$\therefore$ 点 N 的坐标是 $(2, \frac{3t-t^2}{4-2t})$,

又 $\because$ 点 N 在抛物线上,

$$\therefore \frac{3t - t^2}{4 - 2t} = 2^2 - 2 \times 2 - 3 = -3,$$

$$\text{解得 } t = \frac{\sqrt{57} - 3}{2} \text{ 或 } t = -\frac{\sqrt{57} + 3}{2} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{57} - 3}{2} > \frac{7 - 3}{2} = 2,$$

$\therefore$ 当 $t < 2$ 时, 延长 QP 交 y 轴于点 M , 在抛物线上不存在一点 N , 使得 PQ 的中点恰为 MN 的中点.

点评: (1) 此题主要考查了二次函数综合题, 考查了分析推理能力, 考查了分类讨论思想的应用, 考查了数形结合思想的应用, 考查了从已知函数图象中获取信息, 并能利用获取的信息解答相应的问题的能力.

(2) 此题还考查了等腰三角形的性质和应用, 考查了分类讨论思想的应用, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: ①等腰三角形的两腰相等. ②等腰三角形的两个底角相等. ③等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合.

(3) 此题还考查了待定系数法求函数解析式的方法, 要熟练掌握.