

2015 年湖南省永州市中考数学试卷

一、选择题，共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分

1. 在数轴上表示数 -1 和 2014 的两点分别为 A 和 B ，则 A 和 B 两点间的距离为 ()

- A. 2013 B. 2014 C. 2015 D. 2016

2. (3 分) (2015•永州) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $(-a+b)(a+b) = b^2 - a^2$
C. $(a^3)^4 = a^7$ D. $a^3 + a^5 = a^8$

3. (3 分) (2015•永州) 某中学九年级舞蹈兴趣小组 8 名学生的身高分别为 (单位: cm):

168, 165, 168, 166, 170, 170, 176, 170, 则下列说法错误的是 ()

- A. 这组数据的众数是 170
B. 这组数据的中位数是 169
C. 这组数据的平均数是 169
D. 若从 8 名学生中任选 1 名学生参加校文艺会演, 则这名学生的身高不低于 170 的概率为 $\frac{1}{2}$

4. (3 分) (2015•永州) 永州市双牌县的阳明山风光秀丽, 历史文化源远流长, 尤以山顶数万亩野生杜鹃花最为壮观, 被誉为“天下第一杜鹃红”. 今年“五一”期间举办了“阳明山杜鹃花旅游文化节”, 吸引了众多游客前去观光赏花. 在文化节开幕式当天, 从早晨 8: 00 开始每小时进入阳明山景区的游客人数约为 1000 人, 同时每小时走出景区的游客人数约为 600 人, 已知阳明山景区游客的饱和人数约为 2000 人, 则据此可知开幕式当天该景区游客人数饱和的时间约为 ()

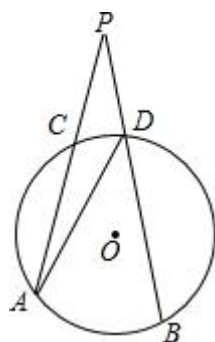
- A. 10: 00 B. 12: 00 C. 13: 00 D. 16: 00

5. (3 分) (2015•永州) 一张桌子上摆放有若干个大小、形状完全相同的碟子, 现从三个方向看, 其三种视图如图所示, 则这张桌子上碟子的总数为 ()

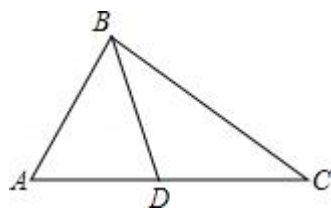


- A. 11 B. 12 C. 13 D. 14

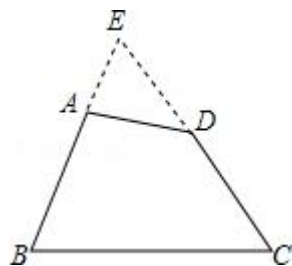
6. (3分) (2015•永州) 如图, P 是 $\odot O$ 外一点, PA、PB 分别交 $\odot O$ 于 C、D 两点, 已知 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 所对的圆心角分别为 90° 和 50° , 则 $\angle P =$ ()



- A. 45° B. 40° C. 25° D. 20°
7. (3分) (2015•永州) 若不等式组 $\begin{cases} x < 1 \\ x > m-1 \end{cases}$ 恰有两个整数解, 则 m 的取值范围是 ()
- A. $A-1 \leq m < 0$ B. $-1 < m \leq 0$ C. $-1 \leq m \leq 0$ D. $-1 < m < 0$
8. (3分) (2015•永州) 如图, 下列条件不能判定 $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ 的是 ()



- A. $\angle ABD = \angle ACB$ B. $\angle ADB = \angle ABC$ C. $AB^2 = AD \cdot AC$ D. $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{BC}$
9. (3分) (2015•永州) 如图, 在四边形 ABCD 中, $AB = CD$, BA 和 CD 的延长线交于点 E, 若点 P 使得 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PCD}$, 则满足此条件的点 P ()



- A. 有且只有 1 个
- B. 有且只有 2 个
- C. 组成 $\angle E$ 的角平分线
- D. 组成 $\angle E$ 的角平分线所在的直线 (E 点除外)

10. (3 分) (2015•永州) 定义 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数, 如 $[3.6]=3$, $[0.6]=0$, $[-3.6]=-4$. 对于任意实数 x , 下列式子中错误的是 ()

A. $[x]=x$ (x 为整数)

B. $0 \leq x - [x] < 1$

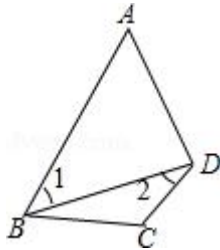
C. $[x+y] \leq [x] + [y]$

D. $[n+x]=n+[x]$ (n 为整数)

二、填空题, 共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分

11. (3 分) (2015•永州) 国家森林城市的创建极大地促进了森林资源的生长, 美化了城市环境, 提升了市民的生活质量, 截至 2014 年, 全国已有 21 个省、自治区、直辖市的 75 个城市获得了“国家森林城市”称号. 永州市也在积极创建“国家森林城市”. 据统计近两年全市投入“创森”资金约为 365000000 元, 365000000 用科学记数法表示为_____.

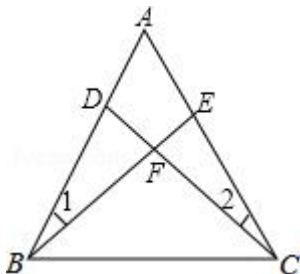
12. (3分) (2015•永州) 如图, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle A = 60^\circ$, 则 $\angle ADC =$ _____ 度.



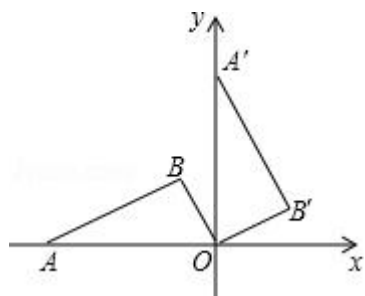
13. (3分) (2015•永州) 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过两点 A (0, 1), B (2, 0), 则当 x _____ 时, $y \leq 0$.

14. (3分) (2015•永州) 已知点 A (-1, y_1), B (1, y_2) 和 C (2, y_3) 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的图象上. 则 _____ $<$ _____ $<$ _____ (填 y_1, y_2, y_3).

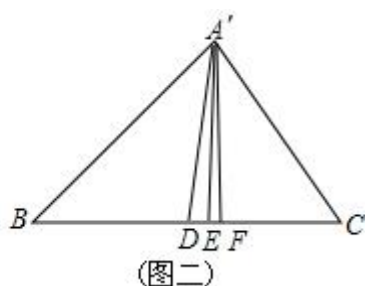
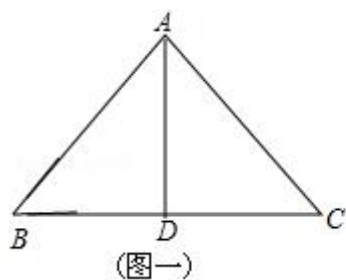
15. (3分) (2015•永州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle 1 = \angle 2$, $BE = CD$, $AB = 5$, $AE = 2$, 则 $CE =$ _____.



16. (3 分) (2015•永州) 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 的坐标 $(-2, 0)$, $\triangle ABO$ 是直角三角形, $\angle AOB=60^\circ$. 现将 $\text{Rt}\triangle ABO$ 绕原点 O 按顺时针方向旋转到 $\text{Rt}\triangle A'B'O$ 的位置, 则此时边 OB 扫过的面积为_____.



17. (3分) (2015•永州) 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 则有 BC 边上的中线, 高线和 $\angle BAC$ 的平分线重合于 AD (如图一). 若将等腰 $\triangle ABC$ 的顶点 A 向右平行移动后, 得到 $\triangle A'BC$ (如图二), 那么, 此时 BC 边上的中线、 BC 边上的高线和 $\angle BA'C$ 的平分线应依次分别是_____, _____, _____. (填 $A'D$ 、 $A'E$ 、 $A'F$)



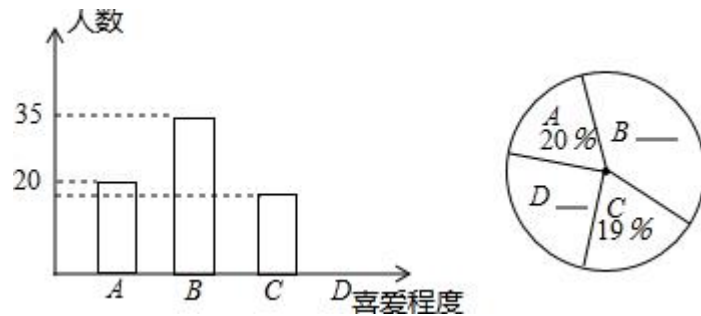
18. (3分) (2015•永州) 设 a_n 为正整数 n^4 的末位数, 如 $a_1=1$, $a_2=6$, $a_3=1$, $a_4=6$. 则 $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2013}+a_{2014}+a_{2015}=\underline{\hspace{2cm}}$.

三、简单题, 共 9 小题, 共 76 分

19. (6分) (2015•永州) 计算: $\cos 30^\circ - \frac{\sqrt{12}}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

20. (6分) (2015•永州) 先化简, 再求值: $\frac{2m+n}{m^2-2mn+n^2} \cdot (m-n)$, 其中 $\frac{\pi}{n}=2$.

21. (8分) (2015•永州) 中央电视台举办的“中国汉字听写大会”节目受到中学生的广泛关注. 某中学为了了解学生对观看“中国汉字听写大会”节目的喜爱程度, 对该校部分学生进行了随机抽样调查, 并绘制出如图所示的两幅统计图. 在条形图中, 从左向右依次为 A 类 (非常喜欢), B 类 (较喜欢), C 类 (一般), D 类 (不喜欢). 已知 A 类和 B 类所占人数的比是 5: 9, 请结合两幅统计图, 回答下列问题:



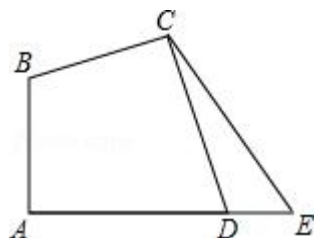
- (1) 写出本次抽样调查的样本容量;
- (2) 请补全两幅统计图;
- (3) 若该校有 2000 名学生, 请你估计观看“中国汉字听写大会”节目不喜欢的学生人数.

22. (8分) (2015•永州) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x + m^2 - 2m = 0$ 有一个实数根为 -1 , 求 m 的值及方程的另一实根.

23. (8 分) (2015•永州) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle BCD = 90^\circ$, $BC = DC$. 延长 AD 到 E 点, 使 $DE = AB$.

(1) 求证: $\angle ABC = \angle EDC$;

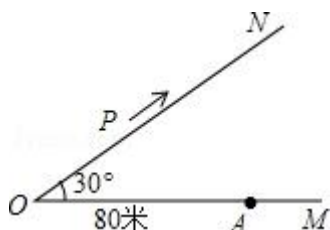
(2) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$.



24. (10 分) (2015•永州) 如图, 有两条公路 OM 、 ON 相交成 30° 角, 沿公路 OM 方向离 O 点 80 米处有一所学校 A . 当重型运输卡车 P 沿道路 ON 方向行驶时, 在以 P 为圆心 50 米长为半径的圆形区域内都会受到卡车噪声的影响, 且卡车 P 与学校 A 的距离越近噪声影响越大. 若一直重型运输卡车 P 沿道路 ON 方向行驶的速度为 18 千米/时.

(1) 求对学校 A 的噪声影响最大时卡车 P 与学校 A 的距离;

(2) 求卡车 P 沿道路 ON 方向行驶一次给学校 A 带来噪声影响的时间.

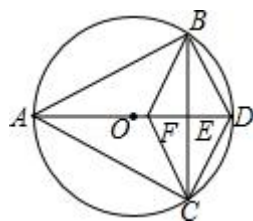


25. (10 分) (2015•永州) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, 且 $AB = AC$, 直径 AD 交 BC 于点 E , F 是 OE 上的一点, 使 $CF \parallel BD$.

(1) 求证: $BE = CE$;

(2) 试判断四边形 $BFC D$ 的形状, 并说明理由;

(3) 若 $BC = 8$, $AD = 10$, 求 CD 的长.

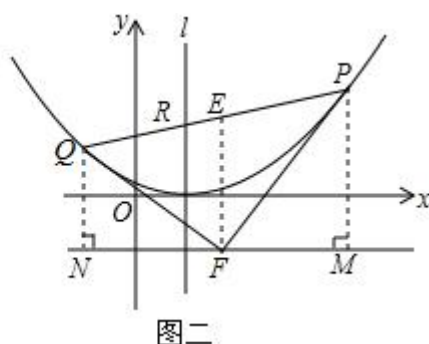
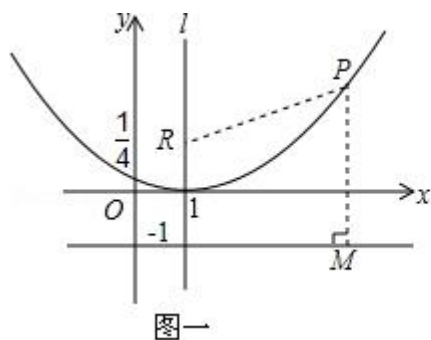


26. (10 分) (2015•永州) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 $(1, 0)$, 与 y 轴的交点坐标为 $(0, \frac{1}{4})$. $R(1, 1)$ 是抛物线对称轴 l 上的一点.

(1) 求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的解析式;

(2) 若 P 是抛物线上的一个动点 (如图一), 求证: 点 P 到 R 的距离与点 P 到直线 $y=-1$ 的距离恒相等;

(3) 设直线 PR 与抛物线的另一交点为 Q , E 为线段 PQ 的中点, 过点 P 、 E 、 Q 分别作直线 $y=-1$ 的垂线, 垂足分别为 M 、 F 、 N (如图二). 求证: $PF \perp QF$.



27. (10 分) (2015•永州) 问题探究:

(一) 新知学习:

圆内接四边形的判断定理: 如果四边形对角互补, 那么这个四边形内接于圆 (即如果四边形 EFGH 的对角互补, 那么四边形 EFGH 的四个顶点 E、F、G、H 都在同一个圆上).

(二) 问题解决:

已知 $\odot O$ 的半径为 2, AB , CD 是 $\odot O$ 的直径. P 是 $\widehat{BC}$ 上任意一点, 过点 P 分别作 AB , CD 的垂线, 垂足分别为 N , M .

(1) 若直径 $AB \perp CD$, 对于 $\widehat{BC}$ 上任意一点 P (不与 B 、 C 重合) (如图一), 证明四边形 $PMON$ 内接于圆, 并求此圆直径的长;

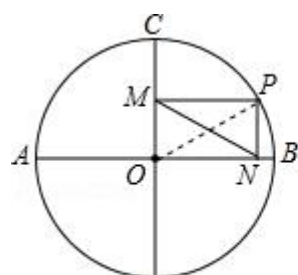
(2) 若直径 $AB \perp CD$, 在点 P (不与 B 、 C 重合) 从 B 运动到 C 的过程汇总, 证明 MN 的长为定值, 并求其定值;

(3) 若直径 AB 与 CD 相交成 120° 角.

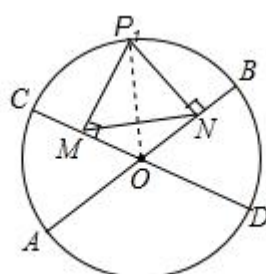
①当点 P 运动到 $\widehat{BC}$ 的中点 P_1 时 (如图二), 求 MN 的长;

②当点 P (不与 B 、 C 重合) 从 B 运动到 C 的过程中 (如图三), 证明 MN 的长为定值.

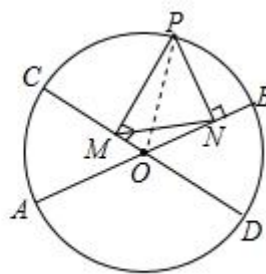
(4) 试问当直径 AB 与 CD 相交成多少度角时, MN 的长取最大值, 并写出其最大值.



图一



图二



图三

2015 年湖南省永州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题，共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分

1. 在数轴上表示数 -1 和 2014 的两点分别为 A 和 B，则 A 和 B 两点间的距离为 ()

- A. 2013 B. 2014 C. 2015 D. 2016

考点：数轴.

分析：数轴上两点间的距离等于表示这两点的数的差的绝对值.

解答：解： $|-1 - 2014| = 2015$ ，故 A、B 两点间的距离为 2015，故选：C.

点评：本题考查了数轴，由于引进了数轴，我们把数和点对应起来，也就是把“数”和“形”结合起来，二者互相补充，相辅相成，把很多复杂的问题转化为简单的问题，在学习中要注意培养数形结合的数学思想.

2. (3 分) (2015•永州) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $(-a+b)(a+b) = b^2 - a^2$
C. $(a^3)^4 = a^7$ D. $a^3 + a^5 = a^8$

考点：平方差公式；合并同类项；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方.

分析：A：根据同底数幂的乘法法则判断即可.

B：平方差公式： $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ，据此判断即可.

C：根据幂的乘方的计算方法判断即可.

D：根据合并同类项的方法判断即可.

解答：解： $\because a^2 \cdot a^3 = a^5$,

$\therefore$ 选项 A 不正确;

$\because (-a+b)(a+b) = b^2 - a^2$,

$\therefore$ 选项 B 正确;

$\because (a^3)^4 = a^{12}$,

$\therefore$ 选项 C 不正确;

$\because a^3 + a^5 \neq a^8$

$\therefore$ 选项 D 不正确.

故选：B.

点评：(1) 此题主要考查了平方差公式，要熟练掌握，应用平方差公式计算时，应注意以下几个问题：①左边是两个二项式相乘，并且这两个二项式中有一项完全相同，另一项互为相反数；②右边是相同项的平方减去相反项的平方；③公式中的 a 和 b 可以是具体数，也可以是单项式或多项式；④对形如两数和与这两数差相乘的算式，都可以运用这个公式计算，且会比用多项式乘以多项式法则简便.

(2) 此题还考查了同底数幂的乘法法则：同底数幂相乘，底数不变，指数相加，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：①底数必须相同；②按照运算性质，只有相乘时才是底数不变，指数相加.

(3) 此题还考查了幂的乘方和积的乘方，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：

① $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是正整数)；② $(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数).

(4) 此题还考查了合并同类项的方法，要熟练掌握.

3. (3 分) (2015•永州) 某中学九年级舞蹈兴趣小组 8 名学生的身高分别为 (单位: cm): 168, 165, 168, 166, 170, 170, 176, 170, 则下列说法错误的是 ()
- A. 这组数据的众数是 170
- B. 这组数据的中位数是 169
- C. 这组数据的平均数是 169
- D. 若从 8 名学生中任选 1 名学生参加校文艺会演, 则这名学生的身高不低于 170 的概率为 $\frac{1}{2}$

考点: 众数; 加权平均数; 中位数; 概率公式.

分析: 分别利用众数、中位数、平均数及概率的知识求解后即可判断正误;

解答: 解: A、数据 170 出现了 3 次, 最多, 故众数为 170, 正确, 不符合题意;

B、排序后位于中间位置的两数为 168 和 170, 故中位数为 169, 正确, 不符合题意;

C、平均数为 $(168+165+168+166+170+170+176+170) \div 8 = 169.125$, 故错误, 符合题意;

D、从 8 名学生中任选 1 名学生参加校文艺会演, 则这名学生的身高不低于 170 的概率为 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,

故选 C.

点评: 本题考查了众数、加权平均数、中位数及概率公式, 解题的关键是能够分别求得有关统计量, 难度不大.

4. (3 分) (2015•永州) 永州市双牌县的阳明山风光秀丽, 历史文化源远流长, 尤以山顶数万亩野生杜鹃花最为壮观, 被誉为“天下第一杜鹃红”. 今年“五一”期间举办了“阳明山杜鹃花旅游文化节”, 吸引了众多游客前去观光赏花. 在文化节开幕式当天, 从早晨 8: 00 开始每小时进入阳明山景区的游客人数约为 1000 人, 同时每小时走出景区的游客人数约为 600 人, 已知阳明山景区游客的饱和人数约为 2000 人, 则据此可知开幕式当天该景区游客人数饱和的时间约为 ()
- A. 10: 00 B. 12: 00 C. 13: 00 D. 16: 00

考点: 一元一次方程的应用.

分析: 设开幕式当天该景区游客人数饱和的时间约为 x 点, 结合已知条件“从早晨 8: 00 开始每小时进入阳明山景区的游客人数约为 1000 人, 同时每小时走出景区的游客人数约为 600 人, 已知阳明山景区游客的饱和人数约为 2000 人”列出方程并解答.

解答: 解: 设开幕式当天该景区游客人数饱和的时间约为 x 点, 则

$$(x - 8) \times (1000 - 600) = 2000,$$

解得 $x = 13$.

即开幕式当天该景区游客人数饱和的时间约为 13: 00.

故选: C.

点评: 本题考查了一元一次方程的应用. 解题关键是要读懂题目的意思, 根据题目给出的条件, 找出合适的等量关系列出方程, 再求解.

5. (3 分) (2015•永州) 一张桌子上摆放有若干个大小、形状完全相同的碟子，现从三个方向看，其三种视图如图所示，则这张桌子上碟子的总数为 ()

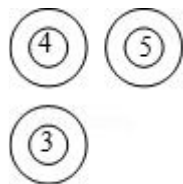


- A. 11 B. 12 C. 13 D. 14

考点: 由三视图判断几何体.

分析: 从俯视图可得：碟子共有 3 摞，结合主视图和左视图，可得每摞碟子的个数，相加可得答案.

解答: 解：由俯视图可得：碟子共有 3 摞，
由几何体的主视图和左视图，可得每摞碟子的个数，如下图所示：

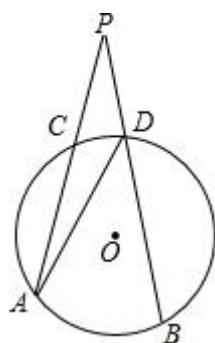


故这张桌子上碟子的个数为 $3+4+5=12$ 个，

故选：B.

点评: 本题考查的知识点是简单空间图形的三视图，分析出每摞碟子的个数是解答的关键.

6. (3 分) (2015•永州) 如图，P 是 $\odot O$ 外一点，PA、PB 分别交 $\odot O$ 于 C、D 两点，已知 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 所对的圆心角分别为 90° 和 50° ，则 $\angle P =$ ()



- A. 45° B. 40° C. 25° D. 20°

考点: 圆周角定理.

分析: 先由圆周角定理求出 $\angle A$ 与 $\angle ADB$ 的度数，然后根据三角形外角的性质即可求出 $\angle P$ 的度数.

解答: 解： $\because \widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 所对的圆心角分别为 90° 和 50° ,

$$\therefore \angle A = 25^\circ, \quad \angle ADB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle P + \angle A = \angle ADB,$$

$$\therefore \angle P = \angle ADB - \angle P = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ.$$

故选 D.

点评: 此题考查了圆周角定理及三角形外角的性质, 解题的关键是: 熟记并能灵活应用圆周角定理及三角形外角的性质解题.

7. (3 分) (2015•永州) 若不等式组 $\begin{cases} x < 1 \\ x > m-1 \end{cases}$ 恰有两个整数解, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $A-1 \leq m < 0$ B. $-1 < m \leq 0$ C. $-1 \leq m \leq 0$ D. $-1 < m < 0$

考点: 一元一次不等式组的整数解.

分析: 先求出不等式的解集, 根据题意得出关于 m 的不等式组, 求出不等式组的解集即可.

解答:

$$\text{解: } \because \text{不等式组 } \begin{cases} x < 1 \\ x > m-1 \end{cases} \text{ 的解集为 } m-1 < x < 1,$$

$$\text{又} \because \text{不等式组 } \begin{cases} x < 1 \\ x > m-1 \end{cases} \text{ 恰有两个整数解,}$$

$$\therefore -2 \leq m-1 < -1,$$

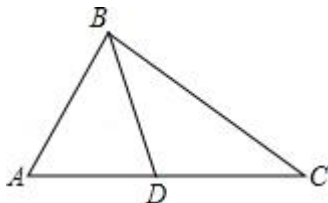
$$\text{解得: } -1 \leq m < 0$$

恰有两个整数解,

故选 A.

点评: 本题考查了解一元一次不等式组, 不等式组的解集的应用, 解此题的关键是能求出关于 m 的不等式组, 难度适中.

8. (3 分) (2015•永州) 如图, 下列条件不能判定 $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ 的是 ()



- A. $\angle ABD = \angle ACB$ B. $\angle ADB = \angle ABC$ C. $AB^2 = AD \cdot AC$ D. $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{BC}$

考点: 相似三角形的判定.

分析: 根据有两个角对应相等的三角形相似, 以及根据两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似, 分别判断得出即可.

解答: 解: A、 $\because \angle ABD = \angle ACB$, $\angle A = \angle A$, $\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADB$, 故此选项不合题意;

B、 $\because \angle ADB = \angle ABC$, $\angle A = \angle A$, $\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADB$, 故此选项不合题意;

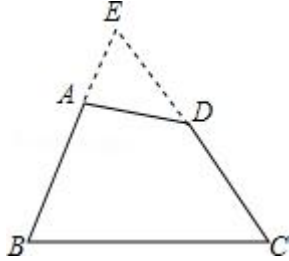
C、 $\because AB^2 = AD \cdot AC$, $\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$, $\angle A = \angle A$, $\triangle ABC \sim \triangle ADB$, 故此选项不合题意;

D、 $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{BC}$ 不能判定 $\triangle ADB \sim \triangle ABC$, 故此选项符合题意.

故选: D.

点评: 本题考查了相似三角形的判定, 利用了有两个角对应相等的三角形相似, 两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似.

9. (3 分) (2015•永州) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=CD$, BA 和 CD 的延长线交于点 E , 若点 P 使得 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}$, 则满足此条件的点 P ()



- A. 有且只有 1 个
- B. 有且只有 2 个
- C. 组成 $\angle E$ 的角平分线
- D. 组成 $\angle E$ 的角平分线所在的直线 (E 点除外)

考点: 角平分线的性质.

分析: 根据角平分线的性质分析, 作 $\angle E$ 的平分线, 点 P 到 AB 和 CD 的距离相等, 即可得到 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}$.

解答: 解: 作 $\angle E$ 的平分线,
可得点 P 到 AB 和 CD 的距离相等,
因为 $AB=CD$,
所以此时点 P 满足 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}$.
故选 D.

点评: 此题考查角平分线的性质, 关键是根据 $AB=CD$ 和三角形等底作出等高即可.

10. (3 分) (2015•永州) 定义 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数, 如 $[3.6]=3$, $[0.6]=0$, $[-3.6]=-4$. 对于任意实数 x , 下列式子中错误的是 ()

- A. $[x]=x$ (x 为整数)
- B. $0 \leq x - [x] < 1$
- C. $[x+y] \leq [x]+[y]$
- D. $[n+x]=n+[x]$ (n 为整数)

考点: 一元一次不等式组的应用.

专题: 新定义.

分析: 根据“定义 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数”进行计算.

解答: 解: A、 $\because [x]$ 为不超过 x 的最大整数,
 $\therefore$ 当 x 是整数时, $[x]=x$, 成立;
B、 $\because [x]$ 为不超过 x 的最大整数,
 $\therefore 0 \leq x - [x] < 1$, 成立;
C、例如, $[-5.4 - 3.2] = [-8.6] = -9$, $[-5.4] + [-3.2] = -6 + (-4) = -10$,
 $\therefore -9 > -10$,
 $\therefore [-5.4 - 3.2] > [-5.4] + [-3.2]$,
 $\therefore [x+y] \leq [x]+[y]$ 不成立,
D、 $[n+x]=n+[x]$ (n 为整数), 成立;

故选：C.

点评：本题考查了一元一次不等式组的应用，解决本题的关键是理解新定义，新定义解题是近几年高考常考的题型.

二、填空题，共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分

11. (3 分) (2015•永州) 国家森林城市的创建极大地促进了森林资源的生长，美化了城市环境，提升了市民的生活质量，截至 2014 年，全国已有 21 个省、自治区、直辖市的 75 个城市获得了“国家森林城市”称号，永州市也在积极创建“国家森林城市”. 据统计近两年全市投入“创森”资金约为 365000000 元，365000000 用科学记数法表示为 3.65×10^8 .

考点：科学记数法—表示较大的数.

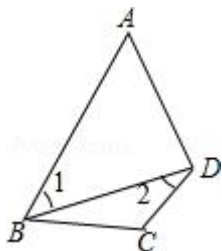
分析：科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

解答：解：将 365000000 用科学记数法表示为 3.65×10^8 .

故答案为： 3.65×10^8 .

点评：此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. (3 分) (2015•永州) 如图， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，则 $\angle ADC =$ 120 度.



考点：平行线的判定与性质.

分析：由已知一对内错角相等，利用内错角相等两直线平行得到 AB 与 DC 平行，再利用两直线平行同旁内角互补，由 $\angle A$ 的度数即可求出 $\angle ADC$ 的度数.

解答：解： $\because \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle A + \angle ADC = 180^\circ$,

$\because \angle A = 60^\circ$,

$\therefore \angle ADC = 120^\circ$.

故答案为： 120°

点评：本题考查了平行线的判定与性质，熟练掌握平行线的判定与性质是解本题的关键.

13. (3 分) (2015•永州) 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过两点 $A(0, 1)$ ， $B(2, 0)$ ，则当 x ≥ 2 时， $y \leq 0$.

考点：待定系数法求一次函数解析式；一次函数的性质.

分析：利用待定系数法把点 $A(0, 1)$ ， $B(2, 0)$ 代入 $y = kx + b$ ，可得关于 k 、 b 的方程组，再解出方程组可得 k 、 b 的值，进而得到函数解析式，再解不等式即可.

解答: 解: $\because$ 一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过两点 A (0, 1), B (2, 0),

$$\therefore \begin{cases} b=1 \\ 2k+b=0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k=-\frac{1}{2} \\ b=1 \end{cases}$$

这个一次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+1$.

$$\text{解不等式 } -\frac{1}{2}x+1 \leq 0,$$

解得 $x \geq 2$.

故答案为 $x \geq 2$.

点评: 本题考查了待定系数法求一次函数解析式, 解不等式, 把点的坐标代入函数解析式求出解析式是解题的关键.

14. (3 分) (2015•永州) 已知点 A (-1, y_1), B (1, y_2) 和 C (2, y_3) 都在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的图象上. 则 y_1 < y_3 < y_2 (填 y_1 , y_2 , y_3).

考点: 反比例函数图象上点的坐标特征.

分析: 先根据反比例函数中 $k > 0$ 判断出函数图象所在的象限及增减性, 再根据各点横坐标的特点即可得出结论.

解答: 解: $\because$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k > 0$) 中 $k > 0$,

$\therefore$ 函数图象的两个分支分别位于一、三象限, 且在每一象限内 y 随 x 的增大而减小.

$$\therefore -1 < 0, \quad -1 < 0,$$

$\therefore$ 点 A (-1, y_1) 位于第三象限,

$$\therefore y_1 < 0,$$

$\therefore$ B (1, y_2) 和 C (2, y_3) 位于第一象限,

$$\therefore y_2 > 0, \quad y_3 > 0,$$

$$\therefore 1 < 2,$$

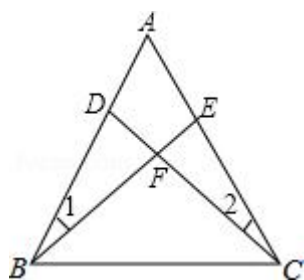
$$\therefore y_2 > y_3,$$

$$\therefore y_1 < y_3 < y_2.$$

故答案为: y_1, y_3, y_2 .

点评: 本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点, 熟知反比例函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

15. (3 分) (2015•永州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle 1 = \angle 2$, $BE = CD$, $AB = 5$, $AE = 2$, 则 $CE =$ 3.



考点: 全等三角形的判定与性质.

分析: 由已知条件易证 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$, 再根据全等三角形的性质得出结论.

解答: 解: $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle A = \angle A, \\ BE = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$ (AAS),

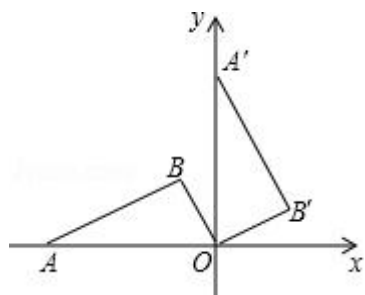
$\therefore AD = AE = 2, AC = AB = 5,$

$\therefore CE = BD = AB - AD = 3,$

故答案为 3.

点评: 本题主要考查了全等三角形的性质和判定, 熟记定理是解题的关键.

16. (3 分) (2015•永州) 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 的坐标 $(-2, 0)$, $\triangle ABO$ 是直角三角形, $\angle AOB = 60^\circ$. 现将 $\text{Rt}\triangle ABO$ 绕原点 O 按顺时针方向旋转到 $\text{Rt}\triangle A'B'O$ 的位置, 则此时边 OB 扫过的面积为 $\frac{1}{4}\pi$.



考点: 扇形面积的计算; 坐标与图形性质; 旋转的性质.

分析: 根据点 A 的坐标 $(-2, 0)$, 可得 $OA = 2$, 再根据含 30° 的直角三角形的性质可得 OB 的长, 再根据性质的性质和扇形的面积公式即可求解.

解答: 解: $\because$ 点 A 的坐标 $(-2, 0)$,

$\therefore OA = 2,$

$\because \triangle ABO$ 是直角三角形, $\angle AOB = 60^\circ,$

$\therefore \angle OAB = 30^\circ,$

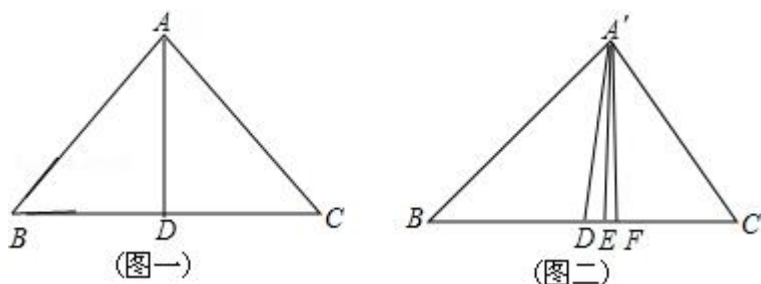
$\therefore OB = \frac{1}{2}OA = 1,$

$\therefore$ 边 OB 扫过的面积为: $\frac{90 \times \pi \times 1^2}{360} = \frac{1}{4}\pi.$

故答案为: $\frac{1}{4}\pi$.

点评: 本题考查了扇形的面积公式: $S = \frac{n\pi R^2}{360}$, 其中 n 为扇形的圆心角的度数, R 为圆的半径), 或 $S = \frac{1}{2}lR$, l 为扇形的弧长, R 为半径.

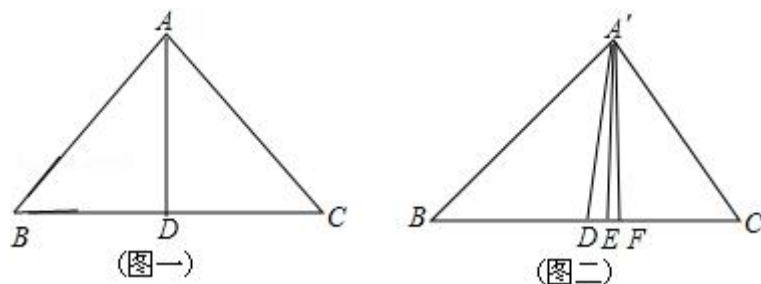
17. (3 分) (2015•永州) 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 则有 BC 边上的中线, 高线和 $\angle BAC$ 的平分线重合于 AD (如图一). 若将等腰 $\triangle ABC$ 的顶点 A 向右平行移动后, 得到 $\triangle A'BC$ (如图二), 那么, 此时 BC 边上的中线、 BC 边上的高线和 $\angle BA'C$ 的平分线应依次分别是 $A'D$, AF , AE . (填 $A'D$ 、 $A'E$ 、 $A'F$)



考点: 平移的性质; 等腰三角形的性质.

分析: 根据三角形中线的定义, 可得答案, 根据三角形角平分线的定义, 可得答案, 三角形高线的定义, 可得答案.

解答:



解:

在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 则有 BC 边上的中线, 高线和 $\angle BAC$ 的平分线重合于 AD (如图一). 若将等腰 $\triangle ABC$ 的顶点 A 向右平行移动后, 得到 $\triangle A'BC$ (如图二), 那么, 此时 BC 边上的中线、 BC 边上的高线和 $\angle BA'C$ 的平分线应依次分别是 $A'D$, AF , AE ,

故答案为: $A'D$, $A'F$, $A'E$.

点评: 本题考查了平移的性质, 平移不改变三角形的中线, 三角形的角平分线分角相等, 三角形的高线垂直于角的对边.

18. (3 分) (2015•永州) 设 a_n 为正整数 n^4 的末位数, 如 $a_1=1$, $a_2=6$, $a_3=1$, $a_4=6$. 则 $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2013}+a_{2014}+a_{2015}=\underline{2}$.

考点: 尾数特征.

分析: 正整数 n^4 的末位数依次是 1, 6, 1, 6, 5, 6, 1, 6, 1, 0, 十个一循环, 先求出 $2015 \div 10$ 的商和余数, 再根据商和余数, 即可求解.

解答: 解: 正整数 n^4 的末位数依次是 1, 6, 1, 6, 5, 6, 1, 6, 1, 0, 十个一循环,

$$1+6+1+6+5+6+1+6+1+0=33,$$

$$2015 \div 10 = 201 \dots 5,$$

$$33 \times 201 + (1+6+1+6+5)$$

$$= 6633 + 19$$

$$= 6652.$$

$$\text{故 } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2013} + a_{2014} + a_{2015} = 2.$$

故答案为：2.

点评：考查了尾数特征，本题关键是得出正整数 n^4 的末位数依次是 1, 6, 1, 6, 5, 6, 1, 6, 1, 0，十个一循环.

三、简单题，共 9 小题，共 76 分

19. (6 分) (2015•永州) 计算： $\cos 30^\circ - \frac{\sqrt{12}}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

考点：实数的运算；负整数指数幂；特殊角的三角函数值.

专题：计算题.

分析：原式第一项利用特殊角的三角函数值计算，第二项化为最简二次根式，最后一项利用负整数指数幂法则计算即可得到结果.

解答：解：原式 $= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{4} + 4 = 4$.

点评：此题考查了实数的运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (6 分) (2015•永州) 先化简，再求值： $\frac{2m+n}{m^2-2mn+n^2} \cdot (m-n)$ ，其中 $\frac{m}{n}=2$.

考点：分式的化简求值.

分析：先根据分式混合运算的法则把原式进行化简，再由 $\frac{m}{n}=2$ 得出 $m=2n$ ，代入原式进行计算即可.

解答：解：原式 $= \frac{2m+n}{(m-n)^2} \cdot (m-n)$

$$= \frac{2m+n}{m-n},$$

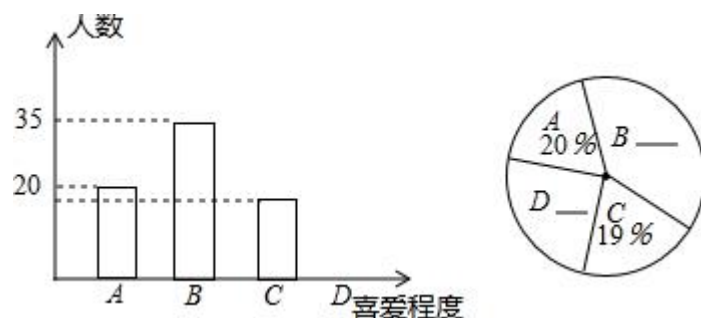
$$\text{由 } \frac{m}{n}=2 \text{ 得 } m=2n,$$

$$\text{故原式} = \frac{4n+n}{2n-n} = \frac{5n}{n} = 5.$$

点评：本题考查的是分式的化简求值，熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键.

21. (8 分) (2015•永州) 中央电视台举办的“中国汉字听写大会”节目受到中学生的广泛关注. 某中学为了了解学生对观看“中国汉字听写大会”节目的喜爱程度，对该校部分学生进行了随机抽样调查，并绘制出如图所示的两幅统计图. 在条形图中，从左向右依次为 A 类（非

常喜欢), B类(较喜欢), C类(一般), D类(不喜欢). 已知A类和B类所占人数的比是5:9, 请结合两幅统计图, 回答下列问题:



- (1) 写出本次抽样调查的样本容量;
- (2) 请补全两幅统计图;
- (3) 若该校有 2000 名学生. 请你估计观看“中国汉字听写大会”节目不喜欢的学生人数.

考点: 条形统计图; 用样本估计总体; 扇形统计图.

分析: (1) 用 A 类的人数除以它所占的百分比, 即可得样本容量;

(2) 分别计算出 D 类的人数为: $100 - 20 - 35 - 100 \times 19\% = 26$ (人), D 类所占的百分比为: $26 \div 100 \times 100\% = 26\%$, B 类所占的百分比为: $35 \div 100 \times 100\% = 35\%$, 即可补全统计图;

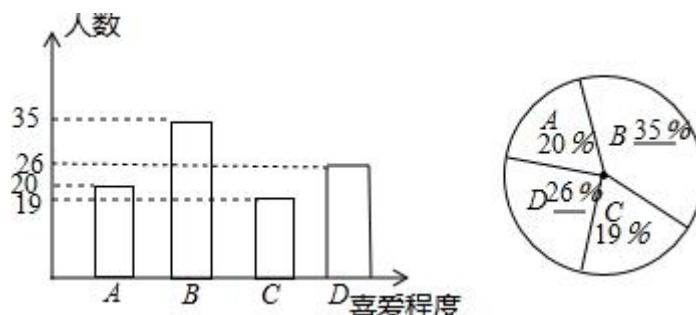
(3) 用 2000 乘以 26%, 即可解答.

解答: 解: (1) $20 \div 20\% = 100$,

$\therefore$ 本次抽样调查的样本容量为 100.

(2) D 类的人数为: $100 - 20 - 35 - 100 \times 19\% = 26$ (人),

D 类所占的百分比为: $26 \div 100 \times 100\% = 26\%$, B 类所占的百分比为: $35 \div 100 \times 100\% = 35\%$, 如图所示:



(3) $2000 \times 26\% = 520$ (人).

故若该校有 2000 名学生. 估计观看“中国汉字听写大会”节目不喜欢的学生人数为 520 人.

点评: 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用, 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据; 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

22. (8 分) (2015•永州) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x + m^2 - 2m = 0$ 有一个实数根为 -1 , 求 m 的值及方程的另一实根.

考点: 一元二次方程的解; 根与系数的关系.

分析: 把 $x = -1$ 代入已知方程列出关于 m 的新方程, 通过解该方程来求 m 的值; 然后结合根与系数的关系来求方程的另一根.

解答: 解: 设方程的另一根为 x_2 , 则

$$-1 + x_2 = -1,$$

$$\text{解得 } x_2 = 0.$$

把 $x = -1$ 代入 $x^2 + x + m^2 - 2m = 0$, 得

$$(-1)^2 + (-1) + m^2 - 2m = 0, \text{ 即 } m(m-2) = 0,$$

$$\text{解得 } m_1 = 0, m_2 = 2.$$

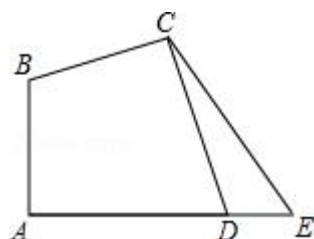
综上所述, m 的值是 0 或 2, 方程的另一实根是 0.

点评: 本题主要考查了一元二次方程的解. 一元二次方程的根就是一元二次方程的解, 就是能够使方程左右两边相等的未知数的值. 即用这个数代替未知数所得式子仍然成立.

23. (8分) (2015•永州) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle BCD = 90^\circ$, $BC = DC$. 延长 AD 到 E 点, 使 $DE = AB$.

(1) 求证: $\angle ABC = \angle EDC$;

(2) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$.



考点: 全等三角形的判定与性质.

专题: 证明题.

分析: (1) 根据四边形的内角和等于 360° 求出 $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$, 再根据邻补角的和等于 180° 可得 $\angle CDE + \angle ADE = 180^\circ$, 从而求出 $\angle B = \angle CDE$;

(2) 根据“边角边”证明即可.

解答: (1) 证明: 在四边形 $ABCD$ 中, $\because \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$,

$$\therefore 90^\circ + \angle B + 90^\circ + \angle ADC = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\text{又 } \because \angle CDE + \angle ADE = 180^\circ,$$

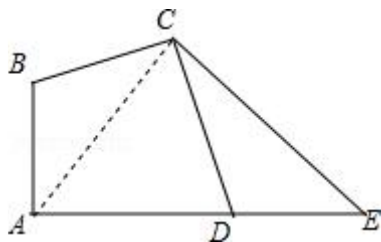
$$\therefore \angle ABC = \angle CDE,$$

(2) 连接 AC , 由 (1) 证得 $\angle ABC = \angle CDE$,

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中,

$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle ABC = \angle CDE, \\ BC = CD \end{cases}$$

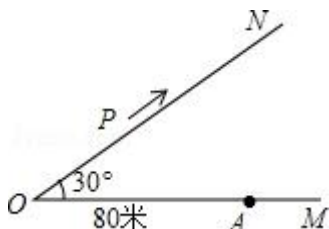
$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDC \text{ (SAS)}.$$



点评: 本题考查了全等三角形的判定与性质, 等腰直角三角形的判定与性质, 根据四边形的内角和定理以及邻补角的定义, 利用同角的补角相等求出夹角相等是证明三角形全等的关键, 也是本题的难点.

24. (10 分) (2015•永州) 如图, 有两条公路 OM、ON 相交成 30° 角, 沿公路 OM 方向离 O 点 80 米处有一所学校 A. 当重型运输卡车 P 沿道路 ON 方向行驶时, 在以 P 为圆心 50 米长为半径的圆形区域内都会受到卡车噪声的影响, 且卡车 P 与学校 A 的距离越近噪声影响越大. 若一直重型运输卡车 P 沿道路 ON 方向行驶的速度为 18 千米/时.

- (1) 求对学校 A 的噪声影响最大时卡车 P 与学校 A 的距离;
- (2) 求卡车 P 沿道路 ON 方向行驶一次给学校 A 带来噪声影响的时间.



考点: 勾股定理的应用; 垂径定理的应用.

分析: (1) 直接利用直角三角形中 30° 所对的边等于斜边的一半求出即可;

(2) 根据题意可知, 图中 $AB=50\text{m}$, $AD \perp BC$, 且 $BD=CD$, $\angle AOD=30^\circ$, $OA=80\text{m}$; 再利用垂径定理及勾股定理解答即可.

解答: 解: (1) 过点 A 作 $AD \perp ON$ 于点 D,

$$\because \angle NOM=30^\circ, AO=80\text{m},$$

$$\therefore AD=40\text{m},$$

即对学校 A 的噪声影响最大时卡车 P 与学校 A 的距离为 40 米;

(2) 由图可知: 以 50m 为半径画圆, 分别交 ON 于 B, C 两点, $AD \perp BC$, $BD=CD=\frac{1}{2}BC$,

$$OA=80\text{m},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AOD \text{ 中, } \angle AOD=30^\circ,$$

$$\therefore AD=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2} \times 80=40\text{m},$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB=50$, $AD=40$, 由勾股定理得:

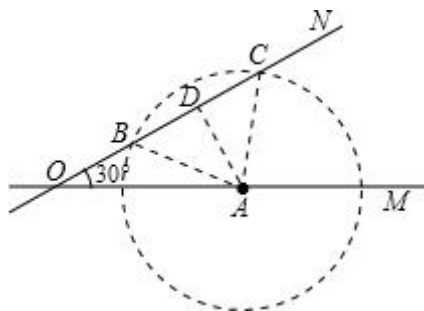
$$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{50^2-40^2}=30\text{m},$$

故 $BC=2 \times 30=60$ 米, 即重型运输卡车在经过 BC 时对学校产生影响.

$$\therefore \text{重型运输卡车的速度为 18 千米/小时, 即 } \frac{18000}{60}=30 \text{ 米/分钟,}$$

∴ 重型运输卡车经过 BD 时需要 $60 \div 30 = 2$ (分钟).

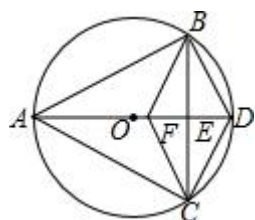
答: 卡车 P 沿道路 ON 方向行驶一次给学校 A 带来噪声影响的时间为 2 分钟.



点评: 此题考查的是垂径定理与勾股定理在实际生活中的运用, 解答此题的关键是卡车在哪段路上运行时对学校产生影响.

25. (10 分) (2015•永州) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, 且 $AB=AC$, 直径 AD 交 BC 于点 E, F 是 OE 上的一点, 使 $CF \parallel BD$.

- (1) 求证: $BE=CE$;
- (2) 试判断四边形 BFCD 的形状, 并说明理由;
- (3) 若 $BC=8$, $AD=10$, 求 CD 的长.



考点: 垂径定理; 勾股定理; 菱形的判定.

分析: (1) 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 得到 $\angle BAD = \angle CAD$, 根据等腰三角形的性质即可证明;

(2) 菱形, 证明 $\triangle BFE \cong \triangle CDE$, 得到 $BF=DC$, 可知四边形 BFCD 是平行四边形, 易证 $BD=CD$, 可证明结论;

(3) 设 $DE=x$, 则根据 $CE^2=DE \cdot AE$ 列方程求出 DE, 再用勾股定理求出 CD.

解答: (1) 证明: $\because AD$ 是直径,

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle ABD$ 和 $Rt\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC \\ AD=AD \end{cases},$$

$$\therefore Rt\triangle ABD \cong Rt\triangle ACD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

$$\because AB=AC,$$

$$\therefore BE=CE;$$

(2) 四边形 BFCD 是菱形.

证明: $\because AD$ 是直径, $AB=AC$,

$$\therefore AD \perp BC, BE=CE,$$

$$\because CF \parallel BD,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle DBE,$$

在 $\triangle BED$ 和 $\triangle CEF$ 中

$$\begin{cases} \angle FCE = \angle DBE \\ BE = CE \\ \angle BED = \angle CEF = 90^\circ \end{cases},$$

$\therefore \triangle BED \cong \triangle CEF$,

$\therefore CF = BD$,

$\therefore$ 四边形 $BFCD$ 是平行四边形,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$,

$\therefore BD = CD$,

$\therefore$ 四边形 $BFCD$ 是菱形;

(3) 解: $\because AD$ 是直径, $AD \perp BC$, $BE = CE$,

$\therefore CE^2 = DE \cdot AE$,

设 $DE = x$,

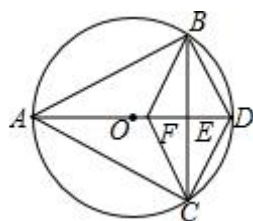
$\because BC = 8$, $AD = 10$,

$\therefore 4^2 = x(10 - x)$,

解得: $x = 2$ 或 $x = 8$ (舍去)

在 $Rt\triangle CED$ 中,

$$CD = \sqrt{CE^2 + DE^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$



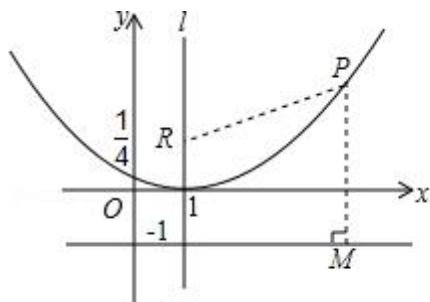
点评: 本题主要考查了圆的有关性质: 垂径定理、圆周角定理, 三角形全等的判定与性质, 菱形的判定与性质, 勾股定理, 三角形相似的判定与性质, 熟悉圆的有关性质是解决问题的关键.

26. (10 分) (2015•永州) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点为 $(1, 0)$, 与 y 轴的交点坐标为 $(0, \frac{1}{4})$. $R(1, 1)$ 是抛物线对称轴 l 上的一点.

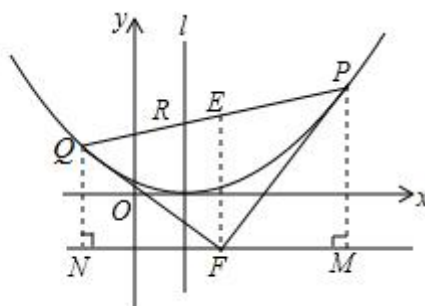
(1) 求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的解析式;

(2) 若 P 是抛物线上的一个动点 (如图一), 求证: 点 P 到 R 的距离与点 P 到直线 $y = -1$ 的距离恒相等;

(3) 设直线 PR 与抛物线的另一交点为 Q, E 为线段 PQ 的中点, 过点 P、E、Q 分别作直线 $y = -1$ 的垂线, 垂足分别为 M、F、N (如图二). 求证:



图一



图二

PF $\perp$ QF.

考点: 二次函数综合题.

专题: 计算题.

分析:

(1) 设顶点式 $y = a(x-1)^2$, 然后把 $(0, \frac{1}{4})$ 代入求出 a 即可;

(2) 根据二次函数图象上点的坐标, 设 $P(x, \frac{1}{4}(x-1)^2)$, 易得 $PM = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1$,

然后利用两点的距离公式计算 PR, 得到 $PR^2 = (x-1)^2 + [\frac{1}{4}(x-1)^2 - 1]^2$, 接着根

据完全平方公式变形可得 $PR^2 = [\frac{1}{4}(x-1)^2 + 1]^2$, 则 $PR = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1$, 所以 $PR = PM$,

于是可判断点 P 到 R 的距离与点 P 到直线 $y = -1$ 的距离恒相等;

(3) 根据 (2) 的结论得到 $QN = QR$, $PR = PM$, 则 $PQ = PR = QR = PM + QN$, 再证明 EF 为梯形 PMNQ 的中位线, 所以 $EF = \frac{1}{2}(QN + PM)$, 则 $EF = \frac{1}{2}PQ = EQ = EP$, 根据点与圆的位置关系得到点 F 在以 PQ 为直径的圆上, 则根据圆周角定理得 $\angle PFQ = 90^\circ$, 即有 $PF \perp QF$.

解答: (1) 解: 设抛物线解析式为 $y = a(x-1)^2$,

把 $(0, \frac{1}{4})$ 代入得 $a = \frac{1}{4}$,

所以抛物线解析式为 $y = \frac{1}{4}(x-1)^2$;

(2) 证明: 如图 1, 设 $P(x, \frac{1}{4}(x-1)^2)$, 则 $PM = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1$,

$\therefore PR^2 = (x-1)^2 + [\frac{1}{4}(x-1)^2 - 1]^2 = (x-1)^2 + [\frac{1}{4}(x-1)^2 - 1]^2 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1 = [\frac{1}{4}(x-1)^2 + 1]^2$,

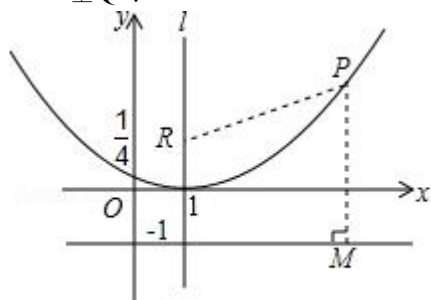
$\therefore PR = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1$,

$\therefore PR = PM$,

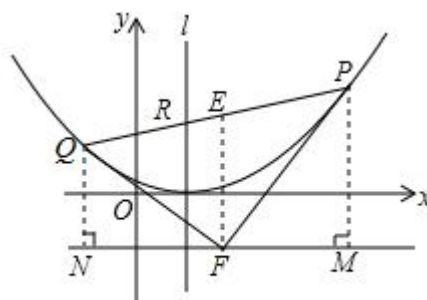
即点 P 到 R 的距离与点 P 到直线 $y = -1$ 的距离恒相等;

(3) 证明: 由 (2) 得 $QN = QR$, $PR = PM$,

$\therefore PQ=PR=QR=PM+QN$,
 $\therefore EF \perp MN$, $QN \perp MN$, $PM \perp MN$,
 而 E 为线段 PQ 的中点,
 $\therefore EF$ 为梯形 PMNQ 的中位线,
 $\therefore EF = \frac{1}{2}(QN+PM)$,
 $\therefore EF = \frac{1}{2}PQ$,
 $\therefore EF=EQ=EP$,
 $\therefore$ 点 F 在以 PQ 为直径的圆上,
 $\therefore \angle PFQ=90^\circ$,
 $\therefore PF \perp QF$.



图一



图二

点评: 本题考查了二次函数综合题: 熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征和梯形的中位线性质; 理解坐标与图形性质; 会利用待定系数法求二次函数解析式和利用两点间的距离公式计算线段的长. 要充分运用 (2) 的结论解决 (3) 中的问题.

27. (10 分) (2015•永州) 问题探究:

(一) 新知学习:

圆内接四边形的判断定理: 如果四边形对角互补, 那么这个四边形内接于圆 (即如果四边形 EFGH 的对角互补, 那么四边形 EFGH 的四个顶点 E、F、G、H 都在同个圆上).

(二) 问题解决:

已知 $\odot O$ 的半径为 2, AB, CD 是 $\odot O$ 的直径. P 是 $\widehat{BC}$ 上任意一点, 过点 P 分别作 AB, CD 的垂线, 垂足分别为 N, M.

(1) 若直径 $AB \perp CD$, 对于 $\widehat{BC}$ 上任意一点 P (不与 B、C 重合) (如图一), 证明四边形 PMON 内接于圆, 并求此圆直径的长;

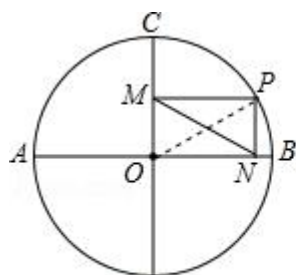
(2) 若直径 $AB \perp CD$, 在点 P (不与 B、C 重合) 从 B 运动到 C 的过程汇总, 证明 MN 的长为定值, 并求其定值;

(3) 若直径 AB 与 CD 相交成 120° 角.

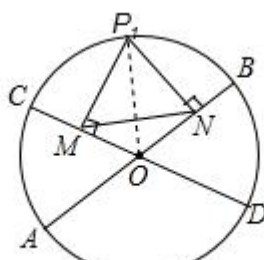
①当点 P 运动到 $\widehat{BC}$ 的中点 P_1 时 (如图二), 求 MN 的长;

②当点 P (不与 B、C 重合) 从 B 运动到 C 的过程中 (如图三), 证明 MN 的长为定值.

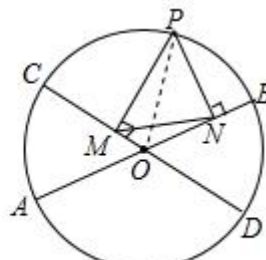
(4) 试问当直径 AB 与 CD 相交成多少度角时, MN 的长取最大值, 并写出其最大值.



图一



图二



图三

考点: 圆的综合题.

专题: 探究型.

分析: (1) 如图一, 易证 $\angle PMO + \angle PNO = 180^\circ$, 从而可得四边形 PMON 内接于圆, 直径 $OP = 2$;

(2) 如图一, 易证四边形 PMON 是矩形, 则有 $MN = OP = 2$, 问题得以解决;

(3) ①如图二, 根据等弧所对的圆心角相等可得 $\angle COP_1 = \angle BOP_1 = 60^\circ$, 根据圆内接四边形的对角互补可得 $\angle MP_1N = 60^\circ$. 根据角平分线的性质可得 $P_1M = P_1N$, 从而得到 $\triangle P_1MN$ 是等边三角形, 则有 $MN = P_1M$. 然后在 $Rt\triangle P_1MO$ 运用三角函数就可解决问题; ②设四边形 PMON 的外接圆为 $\odot O'$, 连接 NO' 并延长, 交 $\odot O'$ 于点 Q, 连接 QM, 如图三, 根据圆周角定理可得 $\angle QMN = 90^\circ$, $\angle MQN = \angle MPN = 60^\circ$, 在 $Rt\triangle QMN$ 中运用三角函数可得: $MN = QN \cdot \sin \angle MQN$, 从而可得 $MN = OP \cdot \sin \angle MQN$, 由此即可解决问题;

(4) 由 (3) ②中已得结论 $MN = OP \cdot \sin \angle MQN$ 可知, 当 $\angle MQN = 90^\circ$ 时, MN 最大, 问题得以解决.

解答: 解: (1) 如图一,

$\because PM \perp OC, PN \perp OB,$
 $\therefore \angle PMO = \angle PNO = 90^\circ,$
 $\therefore \angle PMO + \angle PNO = 180^\circ,$
 $\therefore$ 四边形 PMON 内接于圆, 直径 $OP = 2$;

(2) 如图一,

$\because AB \perp OC$, 即 $\angle BOC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BOC = \angle PMO = \angle PNO = 90^\circ,$
 $\therefore$ 四边形 PMON 是矩形,
 $\therefore MN = OP = 2,$
 $\therefore MN$ 的长为定值, 该定值为 2;

(3) ①如图二,

$\because P_1$ 是 $\widehat{BC}$ 的中点, $\angle BOC = 120^\circ$
 $\therefore \angle COP_1 = \angle BOP_1 = 60^\circ, \angle MP_1N = 60^\circ.$
 $\because P_1M \perp OC, P_1N \perp OB,$
 $\therefore P_1M = P_1N,$
 $\therefore \triangle P_1MN$ 是等边三角形,
 $\therefore MN = P_1M.$

$$\therefore P_1M = OP_1 \cdot \sin \angle MOP_1 = 2 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\therefore MN = \sqrt{3};$$

②设四边形 PMON 的外接圆为 $\odot O'$ ，连接 NO' 并延长，交 $\odot O'$ 于点 Q，连接 QM，如图三，

则有 $\angle QMN = 90^\circ$ ， $\angle MQN = \angle MPN = 60^\circ$ ，

在 $Rt\triangle QMN$ 中， $\sin \angle MQN = \frac{MN}{QN}$ ，

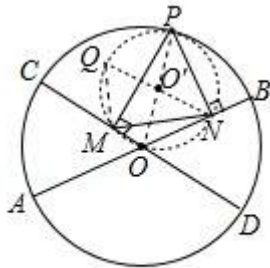
$$\therefore MN = QN \cdot \sin \angle MQN,$$

$$\therefore MN = OP \cdot \sin \angle MQN = 2 \times \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

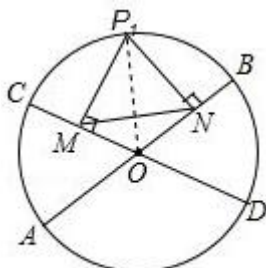
$\therefore MN$ 是定值.

(4) 由 (3) ②得 $MN = OP \cdot \sin \angle MQN = 2 \sin \angle MQN$.

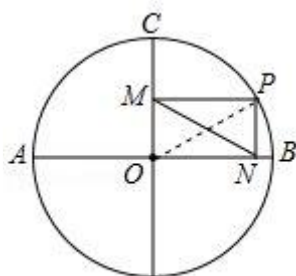
当直径 AB 与 CD 相交成 90° 角时， $\angle MQN = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ，MN 取得最大值 2.



图三



图二



图一

点评: 本题主要考查了圆内接四边形的判定定理、圆周角定理、在同圆中弧与圆心角的关系、矩形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、三角函数、角平分线的性质等知识，推出 $MN = OP \cdot \sin \angle MQN$ 是解决本题的关键.

