

2014 年湖南省长沙市中考数学试卷

一、选择题 (共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. $\frac{1}{2}$ 的倒数是 ()

- A、2 B、-2 C、 $\frac{1}{2}$ D、 $-\frac{1}{2}$

2. 下列几何体中, 主视图、左视图、俯视图完全相同的是 ()

- A. 圆锥 B. 六棱柱 C. 球 D. 四棱锥

3. (3 分) (2014•长沙) 一组数据 3, 3, 4, 2, 8 的中位数和平均数分别是 ()

- A. 3 和 3 B. 3 和 4 C. 4 和 3 D. 4 和 4

4. (3 分) (2014•长沙) 平行四边形的对角线一定具有的性质是 ()

- A. 相等 B. 互相平分 C. 互相垂直 D. 互相垂直且相等

5. (3 分) (2014•长沙) 下列计算正确的是 ()

- A. $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{7}$ B. $(ab^2)^2=ab^4$ C. $2a+3a=6a$ D. $a \cdot a^3=a^4$

6. (3 分) (2014•长沙) 如图, C、D 是线段 AB 上的两点, 且 D 是线段 AC 的中点, 若 $AB=10\text{cm}$, $BC=4\text{cm}$, 则 AD 的长为 ()



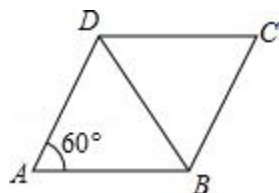
- A. 2cm B. 3cm C. 4cm D. 6cm

7. (3 分) (2014•长沙) 一个关于 x 的一元一次不等式组的解集在数轴上的表示如图, 则该不等式组的解集是 ()



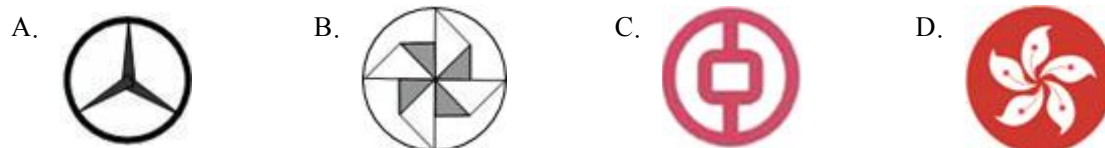
- A. $x > 1$ B. $x \geq 1$ C. $x > 3$ D. $x \geq 3$

8. (3 分) (2014•长沙) 如图, 已知菱形 ABCD 的边长为 2, $\angle DAB=60^\circ$, 则对角线 BD 的长是 ()

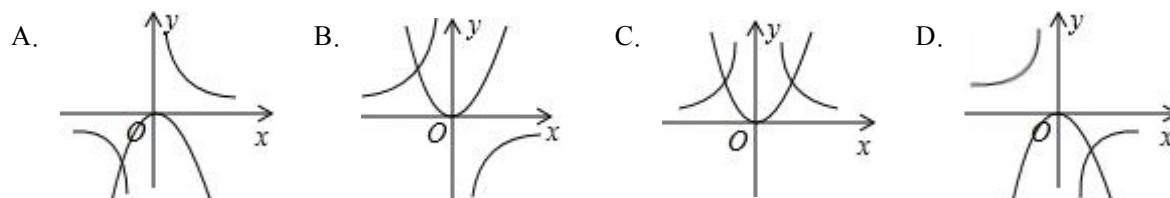


- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $2\sqrt{3}$

9. (3 分) (2014•长沙) 下列四个圆形图案中, 分别以它们所在圆的圆心为旋转中心, 顺时针旋转 120° 后, 能与原图形完全重合的是 ()

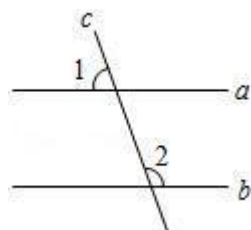


10. (3 分) (2014•长沙) 函数 $y = \frac{a}{x}$ 与 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 在同一平面直角坐标系中的图象可能是 ()

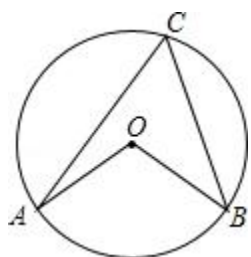


二、填空题 (共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

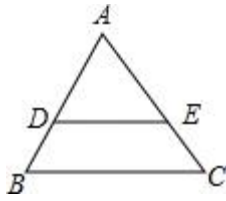
11. (3 分) (2014•长沙) 如图, 直线 $a \parallel b$, 直线 c 分别与 a, b 相交, 若 $\angle 1 = 70^\circ$, 则 $\angle 2 =$ _____ 度.



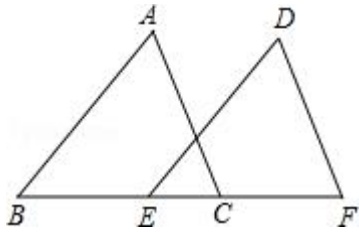
12. (3 分) (2014•长沙) 抛物线 $y = 3(x - 2)^2 + 5$ 的顶点坐标是_____.
13. (3 分) (2014•长沙) 如图, A, B, C 是 $\odot O$ 上的三点, $\angle AOB = 100^\circ$, 则 $\angle ACB =$ _____ 度.



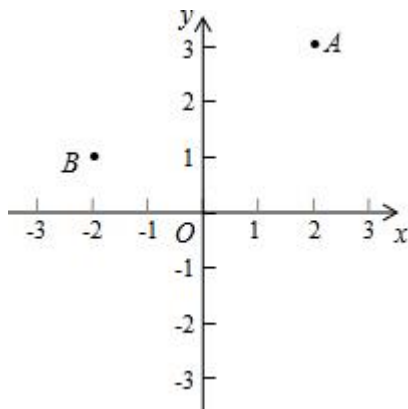
14. (3 分) (2014•长沙) 已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 3kx + 4 = 0$ 的一个根是 1, 则 $k =$ _____.
15. (3 分) (2014•长沙) 100 件外观相同的产品中有 5 件不合格, 现从中任意抽取 1 件进行检测, 抽到不合格产品的概率是_____.
16. (3 分) (2014•长沙) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$, $\triangle ADE$ 的面积是 8, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



17. (3 分) (2014•长沙) 如图, 点 B、E、C、F 在一条直线上, $AB \parallel DE$, $AB=DE$, $BE=CF$, $AC=6$, 则 $DF=$ _____.



18. (3 分) (2014•长沙) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 A (2, 3), 点 B (-2, 1), 在 x 轴上存在点 P 到 A, B 两点的距离之和最小, 则 P 点的坐标是_____.



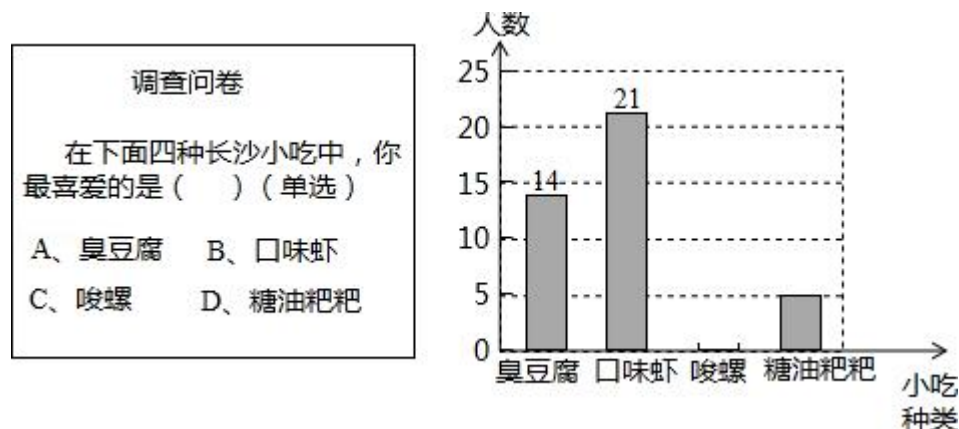
三、解答题 (共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

19. (6 分) (2014•长沙) 计算: $(-1)^{2014} + \sqrt[3]{8} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \sqrt{2}\sin 45^\circ$.

20. (6 分) (2014•长沙) 先简化, 再求值: $\left(1 + \frac{1}{x-2}\right) + \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}$, 其中 $x=3$.

四、解答题（共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

21. (8 分) (2014•长沙) 某数学兴趣小组在全校范围内随机抽取了 50 名同学进行“舌尖上的长沙 - 我最喜爱的长沙小吃”调查活动，将调查问卷整理后绘制成如图所示的不完整条形统计图：

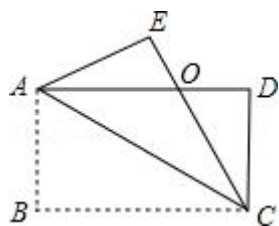


请根据所给信息解答以下问题：

- (1) 请补全条形统计图；
- (2) 若全校有 2000 名同学，请估计全校同学中最喜爱“臭豆腐”的同学有多少人？
- (3) 在一个不透明的口袋中有四个完全相同的小球，把它们分别标号为四种小吃的序号 A、B、C、D，随机地摸出一个小球然后放回，再随机地摸出一个小球，请用列表或画树形图的方法，求出恰好两次都摸到“A”的概率.

22. (8 分) (2014•长沙) 如图，四边形 ABCD 是矩形，把矩形沿对角线 AC 折叠，点 B 落在点 E 处，CE 与 AD 相交于点 O.

- (1) 求证： $\triangle AOE \cong \triangle COD$ ；
- (2) 若 $\angle OCD = 30^\circ$ ， $AB = \sqrt{3}$ ，求 $\triangle AOC$ 的面积.



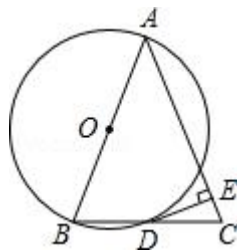
五、解答题 (共 2 小题, 每小题 9 分, 共 18 分)

23. (9 分) (2014•长沙) 为建设“秀美幸福之市”, 长沙市绿化提质改造工程正如火如荼地进行, 某施工队计划购买甲、乙两种树苗共 400 棵对芙蓉路的某标段道路进行绿化改造, 已知甲种树苗每棵 200 元, 乙种树苗每棵 300 元.

- (1) 若购买两种树苗的总金额为 90000 元, 求需购买甲、乙两种树苗各多少棵?
- (2) 若购买甲种树苗的金额不少于购买一中树苗的金额, 至少应购买甲种树苗多少棵?

24. (9 分) (2014•长沙) 如图, 以 $\triangle ABC$ 的一边 AB 为直径作 $\odot O$, $\odot O$ 与 BC 边的交点恰好为 BC 的中点 D , 过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 AC 于点 E .

- (1) 求证: $DE \perp AC$;
- (2) 若 $AB=3DE$, 求 $\tan \angle ACB$ 的值.



六、解答题 (共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

25. (10 分) (2014•长沙) 在平面直角坐标系中, 我们不妨把横坐标与纵坐标相等的点称为“梦之点”, 例如点 $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, ... 都是“梦之点”, 显然, 这样的“梦之点”有无数个.

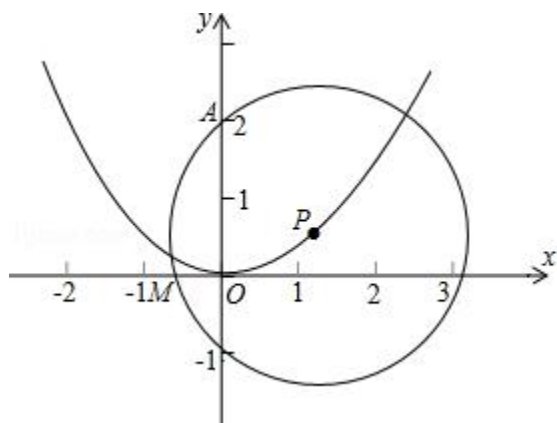
- (1) 若点 $P(2, m)$ 是反比例函数 $y = \frac{n}{x}$ (n 为常数, $n \neq 0$) 的图象上的“梦之点”, 求这个反比例函数的解析式;
- (2) 函数 $y = 3kx + s - 1$ (k, s 是常数) 的图象上存在“梦之点”吗? 若存在, 请求出“梦之点”的坐标; 若不存在, 请说明理由;
- (3) 若二次函数 $y = ax^2 + bx + 1$ (a, b 是常数, $a > 0$) 的图象上存在两个不同的“梦之点” $A(x_1, x_1)$, $B(x_2, x_2)$, 且满足 $-2 < x_1 < 2$, $|x_1 - x_2| = 2$, 令 $t = b^2 - 2b + \frac{157}{48}$, 试求出 t 的取值范围.

26. (10 分) (2014•长沙) 如图, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的对称轴为 y 轴, 且经过 $(0, 0)$ 和 $(\sqrt{a}, \frac{1}{16})$ 两点, 点 P 在该抛物线上运动, 以点 P 为圆心的 $\odot P$ 总经过定点 $A(0, 2)$.

(1) 求 a, b, c 的值;

(2) 求证: 在点 P 运动的过程中, $\odot P$ 始终与 x 轴相交;

(3) 设 $\odot P$ 与 x 轴相交于 $M(x_1, 0), N(x_2, 0)$ ($x_1 < x_2$) 两点, 当 $\triangle AMN$ 为等腰三角形时, 求圆心 P 的纵坐标.



2014 年湖南省长沙市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\frac{1}{2}$ 的倒数是（ ）

- A、2 B、-2 C、 $\frac{1}{2}$ D、 $-\frac{1}{2}$

考点：倒数.

分析：根据乘积为 1 的两个数互为倒数，可得一个数的倒数.

解答：解： $\frac{1}{2}$ 的倒数是 2，

故选：A.

点评：本题考查了倒数，分子分母交换位置是求一个数的倒数的关键.

2. 下列几何体中，主视图、左视图、俯视图完全相同的是（ ）

- A. 圆锥 B. 六棱柱 C. 球 D. 四棱锥

考点：简单几何体的三视图.

分析：找到从物体正面、左面和上面看得到的图形全等的几何体即可.

解答：解：A、圆锥的主视图、左视图、俯视图分别为等腰三角形，等腰三角形，圆及圆心，故 A 选项不符合题意；

B、六棱柱的主视图、左视图、俯视图分别为四边形，四边形，六边形，故 B 选项不符合题意；

C、球的主视图、左视图、俯视图分别为三个全等的圆，故 C 选项符合题意；

D、四棱锥的主视图、左视图、俯视图分别为三角形，三角形，四边形，故 D 选项不符合题意；

故选 C.

点评：考查三视图的有关知识，注意三视图都相同的常见的几何体有球和正方体.

3. (3 分) (2014•长沙) 一组数据 3, 3, 4, 2, 8 的中位数和平均数分别是（ ）

- A. 3 和 3 B. 3 和 4 C. 4 和 3 D. 4 和 4

考点：中位数；算术平均数.

分析：根据中位数及平均数的定义求解即可.

解答：解：将数据从小到大排列为：2, 3, 3, 4, 8，

则中位数是 3，平均数 $= \frac{2+3+3+4+8}{5} = 4$.

故选 B.

点评：本题考查了平均数及中位数的知识，中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（最中间两个数的平均数），叫做这组数据的中位数.

4. (3 分) (2014•长沙) 平行四边形的对角线一定具有的性质是（ ）

- A. 相等 B. 互相平分 C. 互相垂直 D. 互相垂直且相等

考点：平行四边形的性质.

分析：根据平行四边形的对角线互相平分可得答案.

解答：解：平行四边形的对角线互相平分，
故选：B.

点评：此题主要考查了平行四边形的性质，关键是掌握平行四边形的性质：

①边：平行四边形的对边相等.

②角：平行四边形的对角相等.

③对角线：平行四边形的对角线互相平分.

5. (3分) (2014•长沙) 下列计算正确的是 ()

- A. $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{7}$ B. $(ab^2)^2=ab^4$ C. $2a+3a=6a$ D. $a\cdot a^3=a^4$

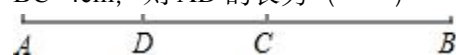
考点：幂的乘方与积的乘方；实数的运算；合并同类项；同底数幂的乘法.

分析：根据二次根式的加减，可判断 A，根据积的乘方，可判断 B，根据合并同类项，可判断 C，根据同底数幂的乘法，可判断 D.

解答：解：A、被开方数不能相加，故 A 错误；
B、积的乘方等于每个因式分别乘方，再把所得的幂相乘，故 B 错误；
C、系数相加字母部分不变，故 C 错误；
D、底数不变指数相加，故 D 正确；
故选：D.

点评：本题考查了积的乘方，积的乘方等于每个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.

6. (3分) (2014•长沙) 如图, C、D 是线段 AB 上的两点, 且 D 是线段 AC 的中点, 若 $AB=10\text{cm}$, $BC=4\text{cm}$, 则 AD 的长为 ()



- A. 2cm B. 3cm C. 4cm D. 6cm

考点：两点间的距离.

分析：由 $AB=10\text{cm}$, $BC=4\text{cm}$, 可求出 $AC=AB-BC=6\text{cm}$, 再由点 D 是 AC 的中点, 则可求得 AD 的长.

解答：解：∵ $AB=10\text{cm}$, $BC=4\text{cm}$,
∴ $AC=AB-BC=6\text{cm}$,
又点 D 是 AC 的中点,
∴ $AD=\frac{1}{2}AC=3\text{cm}$,

答：AD 的长为 3cm.

故选：B.

点评：本题考查了两点间的距离，利用线段差及中点性质是解题的关键.

7. (3分) (2014•长沙) 一个关于 x 的一元一次不等式组的解集在数轴上的表示如图, 则该不等式组的解集是 ()



- A. $x > 1$ B. $x \geq 1$ C. $x > 3$ D. $x \geq 3$

考点：在数轴上表示不等式的解集.

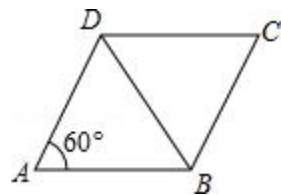
分析：根据不等式组的解集是大于大的，可得答案.

解答：解：一个关于 x 的一元一次不等式组的解集在数轴上的表示如图，
则该不等式组的解集是 $x > 3$.

故选：C.

点评：本题考查了不等式组的解集，不等式组的解集是大于大的.

8. (3 分) (2014•长沙) 如图，已知菱形 ABCD 的边长为 2， $\angle DAB=60^\circ$ ，则对角线 BD 的长是 ()



A. 1

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $2\sqrt{3}$

考点：菱形的性质.

分析：利用菱形的性质以及等边三角形的判定方法得出 $\triangle DAB$ 是等边三角形，进而得出 BD 的长.

解答：解： $\because$ 菱形 ABCD 的边长为 2，

$$\therefore AD=AB=2,$$

$$\text{又} \because \angle DAB=60^\circ,$$

$$\therefore \triangle DAB \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore AD=BD=AB=2,$$

则对角线 BD 的长是 2.

故选：C.

点评：此题主要考查了菱形的性质以及等边三角形的判定，得出 $\triangle DAB$ 是等边三角形是解题关键.

9. (3 分) (2014•长沙) 下列四个圆形图案中，分别以它们所在圆的圆心为旋转中心，顺时针旋转 120° 后，能与原图形完全重合的是 ()

A.



B.



C.



D.



考点：旋转对称图形.

分析：求出各旋转对称图形的最小旋转角度，继而可作出判断.

解答：解：A、最小旋转角度 $= \frac{360}{3} = 120^\circ$;

$$\text{B、最小旋转角度} = \frac{360}{4} = 90^\circ;$$

$$\text{C、最小旋转角度} = \frac{360}{2} = 180^\circ;$$

D、最小旋转角度 $= \frac{360}{5} = 72^\circ$;

综上可得：顺时针旋转 120° 后，能与原图形完全重合的是 A.

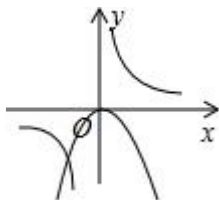
故选 A.

点评： 本题考查了旋转对称图形的知识，求出各图形的最小旋转角度是解题关键.

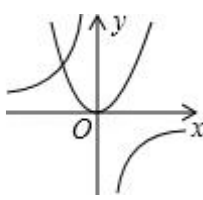
10. (3 分) (2014•长沙) 函数 $y = \frac{a}{x}$ 与 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 在同一平面直角坐标系中的图象可能是

()

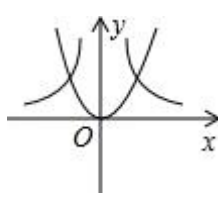
A.



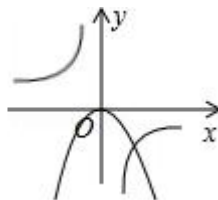
B.



C.



D.



考点： 二次函数的图象；反比例函数的图象.

分析： 分 $a > 0$ 和 $a < 0$ 两种情况，根据二次函数图象和反比例函数图象作出判断即可得解.

解答： 解： $a > 0$ 时， $y = \frac{a}{x}$ 的函数图象位于第一三象限， $y = ax^2$ 的函数图象位于第一二象限且经过原点，

$a < 0$ 时， $y = \frac{a}{x}$ 的函数图象位于第二四象限， $y = ax^2$ 的函数图象位于第三四象限且经过原点，

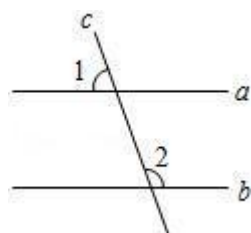
纵观各选项，只有 D 选项图形符合.

故选 D.

点评： 本题考查了二次函数图象，反比例函数图象，熟记反比例函数图象与二次函数图象的性质是解题的关键，难点在于分情况讨论.

二、填空题 (共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分)

11. (3 分) (2014•长沙) 如图，直线 $a \parallel b$ ，直线 c 分别与 a ， b 相交，若 $\angle 1 = 70^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ 110 度.



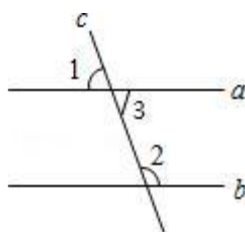
考点： 平行线的性质；对顶角、邻补角.

专题： 计算题.

分析： 直线 $a \parallel b$ ，直线 c 分别与 a ， b 相交，根据平行线的性质，以及对顶角的定义可求出.

解答： 解： $\because \angle 1 = 70^\circ$ ，
 $\therefore \angle 3 = \angle 1 = 70^\circ$ ，
 $\because a \parallel b$ ，
 $\therefore \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ，
 $\therefore \angle 2 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

故填 110.



点评: 本题考查两直线平行, 同位角相等及邻补角互补.

12. (3 分) (2014•长沙) 抛物线 $y=3(x-2)^2+5$ 的顶点坐标是 (2, 5).

考点: 二次函数的性质.

分析: 由于抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的顶点坐标为 (h, k) , 由此即可求解.

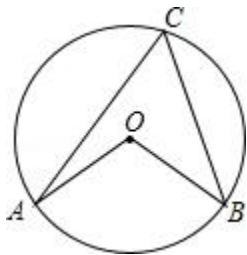
解答: 解: $\because$ 抛物线 $y=3(x-2)^2+5$,

$\therefore$ 顶点坐标为: $(2, 5)$.

故答案为: $(2, 5)$.

点评: 此题主要考查了二次函数的性质, 解题的关键是熟练掌握抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的顶点坐标为 (h, k) .

13. (3 分) (2014•长沙) 如图, A、B、C 是 $\odot O$ 上的三点, $\angle AOB=100^\circ$, 则 $\angle ACB=$ 50 度.



考点: 圆周角定理.

分析: 根据圆周角定理即可直接求解.

解答: 解: $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ$.

故答案是: 50.

点评: 此题主要考查了圆周角定理: 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 都等于这条弧所对的圆心角的一半.

14. (3 分) (2014•长沙) 已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 3kx + 4 = 0$ 的一个根是 1, 则 $k=$ 2.

考点: 一元二次方程的解.

分析: 把 $x=1$ 代入已知方程列出关于 k 的一元一次方程, 通过解方程求得 k 的值.

解答: 解: 依题意, 得

$2 \times 1^2 - 3k \times 1 + 4 = 0$, 即 $2 - 3k + 4 = 0$,

解得, $k=2$.

故答案是: 2.

点评： 本题考查了一元二次方程的解的定义．此题是通过代入法列出关于 k 的新方程，通过解新方程可以求得 k 的值．

15. (3 分) (2014•长沙) 100 件外观相同的产品中有 5 件不合格，现从中任意抽取 1 件进行检测，抽到不合格产品的概率是 $\frac{1}{20}$ ．

考点： 概率公式．

分析： 由 100 件外观相同的产品中有 5 件不合格，直接利用概率公式求解即可求得答案．

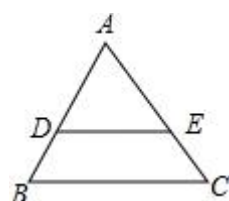
解答： 解：∵ 100 件外观相同的产品中有 5 件不合格，

∴ 从中任意抽取 1 件进行检测，抽到不合格产品的概率是： $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ ．

故答案为： $\frac{1}{20}$ ．

点评： 此题考查了概率公式的应用．注意用到的知识点为： 概率=所求情况数与总情况数之比．

16. (3 分) (2014•长沙) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$ ， $\triangle ADE$ 的面积是 8，则 $\triangle ABC$ 的面积为 18．



考点： 相似三角形的判定与性质．

分析： 根据相似三角形的判定，可得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，根据相似三角形的性质，可得答案．

解答： 解：∵ 在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ，

∴ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ．

∴ $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$ ，

∴ $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ ．

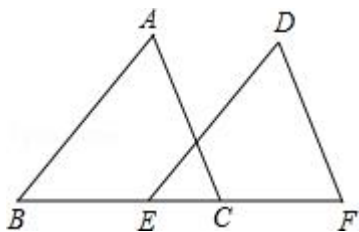
$\frac{8}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9}$ ，

∴ $S_{\triangle ABC} = 18$ ，

故答案为： 18．

点评： 本题考查了相似三角形判定与性质，利用了相似三角形的判定与性质．

17. (3 分) (2014•长沙) 如图，点 B、E、C、F 在一条直线上， $AB \parallel DE$ ， $AB = DE$ ， $BE = CF$ ， $AC = 6$ ，则 $DF =$ 6．



考点：全等三角形的判定与性质.

分析：根据题中条件由 SAS 可得 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，根据全等三角形的性质可得 $AC=DF=6$.

解答：证明： $\because AB \parallel DE$,

$$\therefore \angle B = \angle DEF$$

$$\because BE = CF,$$

$$\therefore BC = EF,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle B = \angle DEF, \\ BC = EF \end{cases}$$

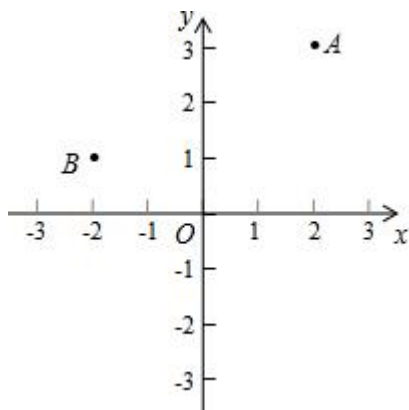
$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AC = DF = 6.$$

故答案是： 6.

点评： 本题主要考查了全等三角形的判定及性质问题，应熟练掌握. 全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具. 在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件.

18. (3 分) (2014•长沙) 如图，在平面直角坐标系中，已知点 A (2, 3)，点 B (-2, 1)，在 x 轴上存在点 P 到 A, B 两点的距离之和最小，则 P 点的坐标是 (-1, 0).



考点：轴对称-最短路线问题；坐标与图形性质.

分析：作 A 关于 x 轴的对称点 C，连接 BC 交 x 轴于 P，则此时 $AP+BP$ 最小，求出 C 的坐标，设直线 BC 的解析式是 $y=kx+b$ ，把 B、C 的坐标代入求出 k、b，得出直线 BC 的解析式，求出直线与 x 轴的交点坐标即可.

解答：解：作 A 关于 x 轴的对称点 C，连接 BC 交 x 轴于 P，则此时 $AP+BP$ 最小，

$$\because A \text{ 点的坐标为 } (2, 3), B \text{ 点的坐标为 } (-2, 1),$$

$$\therefore C (2, -3),$$

设直线 BC 的解析式是: $y=kx+b$,

把 B、C 的坐标代入得:
$$\begin{cases} -2k+b=1 \\ 2k+b=-3 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} k=-1 \\ b=-1 \end{cases}$$
.

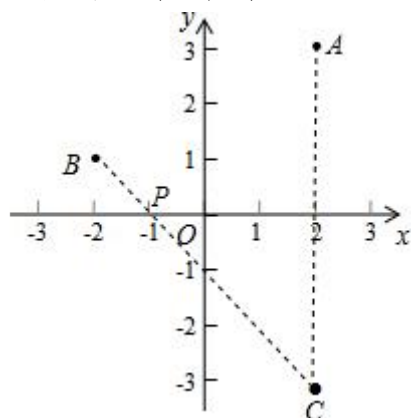
即直线 BC 的解析式是 $y=-x-1$,

当 $y=0$ 时, $-x-1=0$,

解得: $x=-1$,

$\therefore$ P 点的坐标是 $(-1, 0)$.

故答案为: $(-1, 0)$.



点评: 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 用待定系数法求一次函数的解析式, 轴对称 - 最短路线问题的应用, 关键是能找出 P 点, 题目具有一定的代表性, 难度适中.

三、解答题 (共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

19. (6 分) (2014•长沙) 计算: $(-1)^{2014} + \sqrt[3]{8} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \sqrt{2}\sin 45^\circ$.

考点: 实数的运算; 负整数指数幂; 特殊角的三角函数值.

分析: 本题涉及零指数幂、乘方、特殊角的三角函数值、二次根式化简四个考点. 针对每个考点分别进行计算, 然后根据实数的运算法则求得计算结果.

解答: 解: 原式 $= 1 + 2 - 3 + 1$
 $= 1$.

点评: 本题考查实数的综合运算能力, 是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟记特殊角的三角函数值, 熟练掌握负整数指数幂、零指数幂、二次根式、绝对值等考点的运算.

20. (6 分) (2014•长沙) 先简化, 再求值: $\left(1 + \frac{1}{x-2}\right) + \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}$, 其中 $x=3$.

考点: 分式的化简求值.

专题: 计算题.

分析：原式括号中两项通分并利用同分母分式的加法法则计算，同时利用除法法则变形，约分得到最简结果，将 x 的值代入计算即可求出值.

解答：解：原式 $= \frac{x-2+1}{x-2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)^2}$

$$= \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)^2}$$

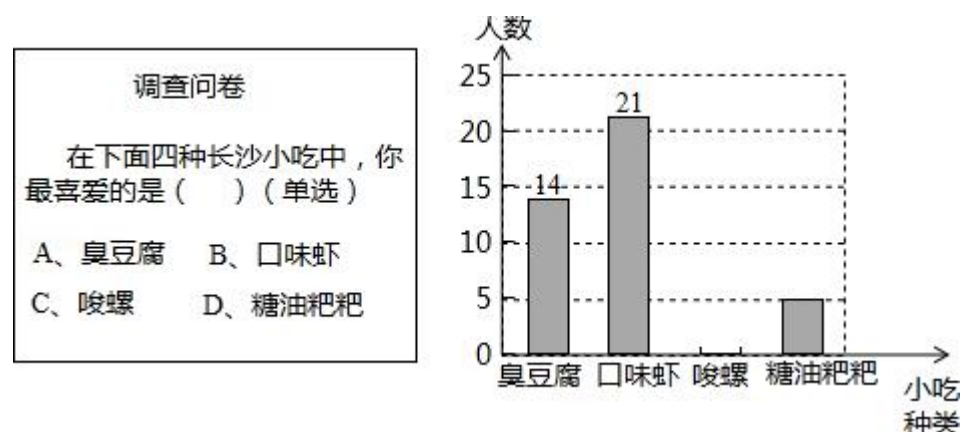
$$= \frac{x+2}{x-1},$$

$$\text{当 } x=3 \text{ 时, 原式} = \frac{3+2}{3-1} = \frac{5}{2}.$$

点评：此题考查了分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

四、解答题（共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

21. (8 分) (2014·长沙) 某数学兴趣小组在全校范围内随机抽取了 50 名同学进行“舌尖上的长沙—我最喜爱的长沙小吃”调查活动，将调查问卷整理后绘制成如图所示的不完整条形统计图：



请根据所给信息解答以下问题：

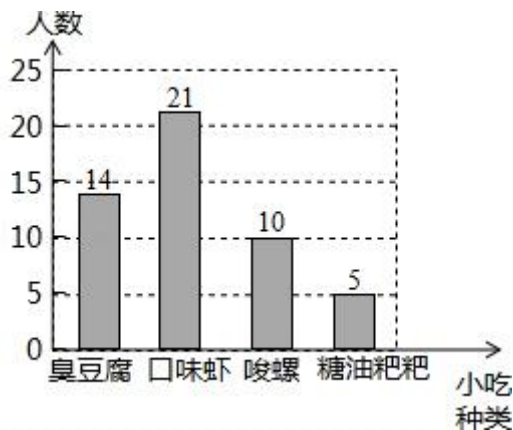
- (1) 请补全条形统计图；
- (2) 若全校有 2000 名同学，请估计全校同学中最喜爱“臭豆腐”的同学有多少人？
- (3) 在一个不透明的口袋中有四个完全相同的小球，把它们分别标号为四种小吃的序号 A、B、C、D，随机地摸出一个小球然后放回，再随机地摸出一个小球，请用列表或画树形图的方法，求出恰好两次都摸到“A”的概率.

考点：条形统计图；用样本估计总体；列表法与树状图法.

专题：计算题.

分析： (1) 总人数以及条形统计图求出喜欢“唆螺”的人数，补全条形统计图即可；
 (2) 求出喜欢“臭豆腐”的百分比，乘以 2000 即可得到结果；
 (3) 列表得出所有等可能的情况数，找出恰好两次都摸到“A”的情况数，即可求出所求的概率.

解答：解：(1) 根据题意得：喜欢“唆螺”人数为：50 - (14+21+5) = 10 (人)，
 补全统计图，如图所示：



(2) 根据题意得: $2000 \times \frac{14}{50} \times 100\% = 560$ (人),

则估计全校同学中最喜爱“臭豆腐”的同学有 560 人;

(3) 列表如下:

	A	B	C	D
A	(A, A)	(B, A)	(C, A)	(D, A)
B	(A, B)	(B, B)	(C, B)	(D, B)
C	(A, C)	(B, C)	(C, C)	(D, C)
D	(A, D)	(B, D)	(C, D)	(D, D)

所有等可能的情况有 16 种, 其中恰好两次都摸到“A”的情况有 1 种,

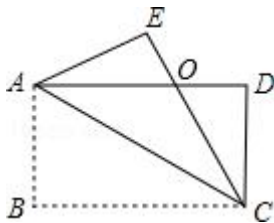
$$\text{则 } P = \frac{1}{16}.$$

点评: 此题考查了条形统计图, 用样本估计总体, 以及列表法与树状图法, 弄清题意是解本题的关键.

22. (8 分) (2014•长沙) 如图, 四边形 ABCD 是矩形, 把矩形沿对角线 AC 折叠, 点 B 落在点 E 处, CE 与 AD 相交于点 O.

(1) 求证: $\triangle AOE \cong \triangle COD$;

(2) 若 $\angle OCD = 30^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, 求 $\triangle AOC$ 的面积.



考点: 翻折变换 (折叠问题).

分析: (1) 根据矩形的对边相等可得 $AB = CD$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, 再根据翻折的性质可得 $AB = AE$, $\angle B = \angle E$, 然后求出 $AE = CD$, $\angle D = \angle E$, 再利用“角角边”证明即可;

(2) 根据全等三角形对应边相等可得 $AO = CO$, 解直角三角形求出 CO , 然后利用三角形的面积公式列式计算即可得解.

解答: (1) 证明: $\because$ 四边形 ABCD 是矩形,
 $\therefore AB=CD, \angle B=\angle D=90^\circ$,
 $\because$ 矩形 ABCD 沿对角线 AC 折叠点 B 落在点 E 处,
 $\therefore AB=AE, \angle B=\angle E$,
 $\therefore AE=CD, \angle D=\angle E$,
 在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COD$ 中,

$$\begin{cases} \angle D=\angle E \\ \angle AOE=\angle COD, \\ AE=CD \end{cases}$$
 $\therefore \triangle AOE \cong \triangle COD$ (AAS);

(2) 解: $\because \triangle AOE \cong \triangle COD$,
 $\therefore AO=CO$,
 $\because \angle OCD=30^\circ, AB=\sqrt{3}$,
 $\therefore CO=CD \div \cos 30^\circ = \sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$,
 $\therefore \triangle AOC$ 的面积 $= \frac{1}{2} AO \cdot CD = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

点评: 本题考查了翻折变换的性质, 全等三角形的判定与性质, 矩形的性质, 熟记各性质并确定出三角形全等的条件是解题的关键.

五、解答题 (共 2 小题, 每小题 9 分, 共 18 分)

23. (9 分) (2014·长沙) 为建设“秀美幸福之市”, 长沙市绿化提质改造工程正如火如荼地进行, 某施工队计划购买甲、乙两种树苗共 400 棵对芙蓉路的某标段道路进行绿化改造, 已知甲种树苗每棵 200 元, 乙种树苗每棵 300 元.

- (1) 若购买两种树苗的总金额为 90000 元, 求需购买甲、乙两种树苗各多少棵?
- (2) 若购买甲种树苗的金额不少于购买一中树苗的金额, 至少应购买甲种树苗多少棵?

考点: 一元一次不等式的应用; 二元一次方程组的应用.

分析: (1) 设购买甲种树苗 x 棵, 则购买乙种树苗 $(400-x)$ 棵, 根据购买两种树苗的总金额为 90000 元建立方程求出其解即可;

(2) 设至少应购买甲种树苗 a 棵, 则购买乙种树苗 $(400-a)$ 棵, 根据购买甲种树苗的金额不少于购买一中树苗的金额建立不等式求出其解即可.

解答: 解: (1) 设购买甲种树苗 x 棵, 则购买乙种树苗 $(400-x)$ 棵, 由题意, 得
 $200x+300(400-x)=90000$,
 解得: $x=300$,
 $\therefore$ 购买乙种树苗 $400-300=100$ 棵,
 答: 购买甲种树苗 300 棵, 则购买乙种树苗 100 棵;

(2) 设至少应购买甲种树苗 a 棵, 则购买乙种树苗 $(400-a)$ 棵, 由题意, 得
 $200a \geq 300(400-a)$,
 解得: $a \geq 240$.
 答: 至少应购买甲种树苗 240 棵.

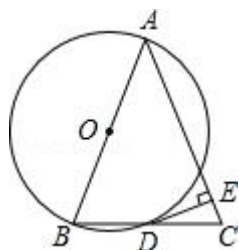
点评: 本题考查了列一元一次方程解实际问题的运用, 一元一次不等式的解法的运用, 解答时建立

方程和不等式是关键.

24. (9分) (2014·长沙) 如图, 以 $\triangle ABC$ 的一边 AB 为直径作 $\odot O$, $\odot O$ 与 BC 边的交点恰好为 BC 的中点 D , 过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 AC 于点 E .

(1) 求证: $DE \perp AC$;

(2) 若 $AB=3DE$, 求 $\tan \angle ACB$ 的值.



考点: 切线的性质.

分析: (1) 连接 OD , 可以证得 $DE \perp OD$, 然后证明 $OD \parallel AC$ 即可证明 $DE \perp AC$;

(2) 利用 $\triangle ADE \sim \triangle CDE$, 求出 DE 与 CE 的比值即可.

解答: (1) 证明: 连接 OD ,

$\because D$ 是 BC 的中点, $OA=OB$,

$\therefore OD$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore OD \parallel AC$,

$\because DE$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OD \perp DE$,

$\therefore DE \perp AC$;

(2) 解: 连接 AD ,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADB=90^\circ$,

$\because DE \perp AC$,

$\therefore \angle ADC=\angle DEC=\angle AED=90^\circ$,

$\therefore \angle ADE=\angle DCE$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDE$ 中,

$$\begin{cases} \angle AED=\angle DEC \\ \angle ADE=\angle DCE \end{cases}$$

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle ADE$,

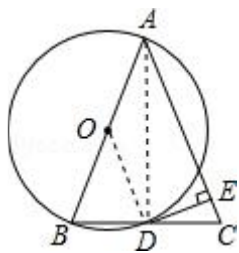
$$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{CE}{DE},$$

设 $\tan \angle ACB=x$, $CE=a$, 则 $DE=ax$, $AC=3ax$, $AE=3ax-a$,

$$\therefore \frac{ax}{3ax-a} = \frac{a}{ax}, \text{ 整理得: } x^2 - 3x + 1 = 0,$$

$$\text{解得: } x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$



点评: 本题主要考查了切线的性质的综合应用, 解答本题的关键在于如何利用三角形相似求出线段 DE 与 CE 的比值.

六、解答题 (共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

25. (10 分) (2014·长沙) 在平面直角坐标系中, 我们不妨把横坐标与纵坐标相等的点称为“梦之点”, 例如点 $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, ... 都是“梦之点”, 显然, 这样的“梦之点”有无数个.

(1) 若点 $P(2, m)$ 是反比例函数 $y = \frac{n}{x}$ (n 为常数, $n \neq 0$) 的图象上的“梦之点”, 求这个反比例函数的解析式;

(2) 函数 $y = 3kx + s - 1$ (k, s 是常数) 的图象上存在“梦之点”吗? 若存在, 请求出“梦之点”的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 若二次函数 $y = ax^2 + bx + 1$ (a, b 是常数, $a > 0$) 的图象上存在两个不同的“梦之点” $A(x_1, x_1)$, $B(x_2, x_2)$, 且满足 $-2 < x_1 < 2$, $|x_1 - x_2| = 2$, 令 $t = b^2 - 2b + \frac{157}{48}$, 试求出 t 的取值范围.

考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 先由“梦之点”的定义得出 $m=2$, 再将点 P 坐标代入 $y = \frac{n}{x}$, 运用待定系数法即可求出反比例函数的解析式;

(2) 假设函数 $y = 3kx + s - 1$ (k, s 是常数) 的图象上存在“梦之点” (x, x) , 则有 $x = 3kx + s - 1$, 整理得 $(3k - 1)x = 1 - s$, 再分三种情况进行讨论即可;

(3) 先将 $A(x_1, x_1)$, $B(x_2, x_2)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 1$, 得到 $ax_1^2 + (b - 1)x_1 + 1 = 0$, $ax_2^2 + (b - 1)x_2 + 1 = 0$, 根据方程的解的定义可知 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + (b - 1)x + 1 = 0$ 的两个根, 由根与系数的关系可得 $x_1 + x_2 = \frac{1 - b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{a}$, 则 $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 -$

$$4x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - 2b + 1 - 4a}{a^2} = 4, \text{ 整理得出 } b^2 - 2b = (2a + 1)^2 - 2, \text{ 则 } t = b^2 - 2b + \frac{157}{48} = (2a + 1)^2 + \frac{61}{48}. \text{ 再}$$

由 $-2 < x_1 < 2$, $|x_1 - x_2| = 2$, 得出 $-4 < x_2 < 4$, $-8 < x_1 \cdot x_2 < 8$, 即 $-8 < \frac{1}{a} < 8$, 又 $a > 0$, 解不

等式组得出 $a > \frac{1}{8}$, 进而求出 t 的取值范围.

解答: 解: (1) $\because$ 点 $P(2, m)$ 是“梦之点”,

$$\therefore m = 2,$$

$\because$ 点 $P(2, 2)$ 在反比例函数 $y = \frac{n}{x}$ (n 为常数, $n \neq 0$) 的图象上,

$$\therefore n = 2 \times 2 = 4,$$

∴反比例函数的解析式为 $y=\frac{4}{x}$;

(2) 假设函数 $y=3kx+s-1$ (k, s 是常数) 的图象上存在“梦之点” (x, x) ,
则有 $x=3kx+s-1$,

整理, 得 $(3k-1)x=1-s$,

当 $3k-1 \neq 0$, 即 $k \neq \frac{1}{3}$ 时, 解得 $x=\frac{1-s}{3k-1}$;

当 $3k-1=0$, $1-s=0$, 即 $k=\frac{1}{3}$, $s=1$ 时, x 有无穷多解;

当 $3k-1=0$, $1-s \neq 0$, 即 $k=\frac{1}{3}$, $s \neq 1$ 时, x 无解;

综上所述, 当 $k \neq \frac{1}{3}$ 时, “梦之点”的坐标为 $(\frac{1-s}{3k-1}, \frac{1-s}{3k-1})$; 当 $k=\frac{1}{3}$, $s=1$ 时, “梦之点”有无数个; 当 $k=\frac{1}{3}$, $s \neq 1$ 时, 不存在“梦之点”;

(3) ∵二次函数 $y=ax^2+bx+1$ (a, b 是常数, $a > 0$) 的图象上存在两个不同的“梦之点” $A(x_1, x_1)$, $B(x_2, x_2)$,

$$\therefore x_1 = ax_1^2 + bx_1 + 1, \quad x_2 = ax_2^2 + bx_2 + 1,$$

$$\therefore ax_1^2 + (b-1)x_1 + 1 = 0, \quad ax_2^2 + (b-1)x_2 + 1 = 0,$$

∴ x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + (b-1)x + 1 = 0$ 的两个不等实根,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{1-b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{a},$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{1-b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{b^2 - 2b + 1 - 4a}{a^2} = 4,$$

$$\therefore b^2 - 2b = 4a^2 + 4a - 1 = (2a+1)^2 - 2,$$

$$\therefore t = b^2 - 2b + \frac{157}{48} = (2a+1)^2 - 2 + \frac{157}{48} = (2a+1)^2 + \frac{61}{48}.$$

$$\therefore -2 < x_1 < 2, \quad |x_1 - x_2| = 2,$$

$$\therefore -4 < x_2 < 0 \text{ 或 } 0 < x_2 < 4,$$

$$\therefore -4 < x_2 < 4,$$

$$\therefore -8 < x_1 \cdot x_2 < 8,$$

$$\therefore -8 < \frac{1}{a} < 8,$$

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore a > \frac{1}{8}$$

$$\therefore (2a+1)^2 + \frac{61}{48} > \frac{25}{16} + \frac{61}{48} = \frac{17}{6},$$

$$\therefore t > \frac{17}{6}.$$

点评: 本题是二次函数的综合题, 考查了运用待定系数法求反比例函数的解析式, 形如 $ax=b$ 的方程

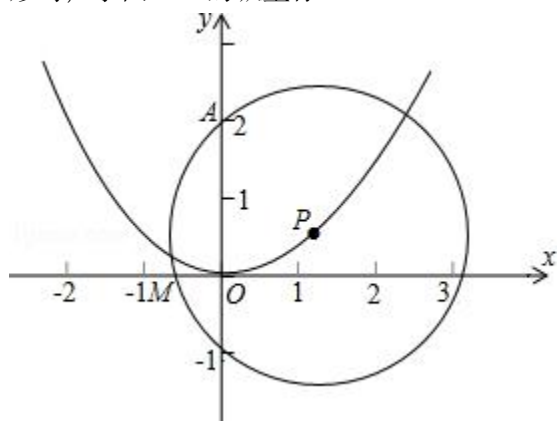
的解的情况，一元二次方程根与系数的关系，不等式的性质等知识，综合性较强，有一定难度.

26. (10 分) (2014•长沙) 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的对称轴为 y 轴，且经过 $(0, 0)$ 和 $(\sqrt{a}, \frac{1}{16})$ 两点，点 P 在该抛物线上运动，以点 P 为圆心的 $\odot P$ 总经过定点 $A(0, 2)$.

(1) 求 a, b, c 的值;

(2) 求证: 在点 P 运动的过程中, $\odot P$ 始终与 x 轴相交;

(3) 设 $\odot P$ 与 x 轴相交于 $M(x_1, 0)$, $N(x_2, 0)$ ($x_1 < x_2$) 两点, 当 $\triangle AMN$ 为等腰三角形时, 求圆心 P 的纵坐标.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 根据题意得出二次函数一般形式进而将已知点代入求出 a, b, c 的值即可;

(2) 设 $P(x, y)$, 表示出 $\odot P$ 的半径 r , 进而与 $\frac{1}{4}x^2$ 比较得出答案即可;

(3) 分别表示出 AM, AN 的长, 进而分别利用当 $AM=AN$ 时, 当 $AM=MN$ 时, 当 $AN=MN$ 时, 求出 a 的值, 进而得出圆心 P 的纵坐标即可.

解答: 解: (1) $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的对称轴为 y 轴, 且经过 $(0, 0)$ 和 $(\sqrt{a}, \frac{1}{16})$ 两点,

$\therefore$ 抛物线的一般式为: $y=ax^2$,

$\therefore \frac{1}{16}=a(\sqrt{a})^2$,

解得: $a=\pm\frac{1}{4}$,

$\because$ 图象开口向上, $\therefore a=\frac{1}{4}$,

$\therefore$ 抛物线解析式为: $y=\frac{1}{4}x^2$,

故 $a=\frac{1}{4}$, $b=c=0$;

(2) 设 $P(x, y)$, $\odot P$ 的半径 $r = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$,

又 $\because y = \frac{1}{4}x^2$, 则 $r = \sqrt{x^2 + (\frac{1}{4}x^2 - 2)^2}$,

化简得: $r = \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + 4} > \frac{1}{4}x^2$,

$\therefore$ 点 P 在运动过程中, $\odot P$ 始终与 x 轴相交;

(3) 设 $P(a, \frac{1}{4}a^2)$, $\because PA = \sqrt{\frac{1}{16}a^4 + 4}$,

作 $PH \perp MN$ 于 H , 则 $PM = PN = \sqrt{\frac{1}{16}a^4 + 4}$,

又 $\because PH = \frac{1}{4}a^2$,

则 $MH = NH = \sqrt{\frac{1}{16}a^4 + 4 - (\frac{1}{4}a^2)^2} = 2$,

故 $MN = 4$,

$\therefore M(a-2, 0)$, $N(a+2, 0)$,

又 $\because A(0, 2)$, $\therefore AM = \sqrt{(a-2)^2 + 4}$, $AN = \sqrt{(a+2)^2 + 4}$.

当 $AM = AN$ 时, $\sqrt{(a-2)^2 + 4} = \sqrt{(a+2)^2 + 4}$,

解得: $a = 0$,

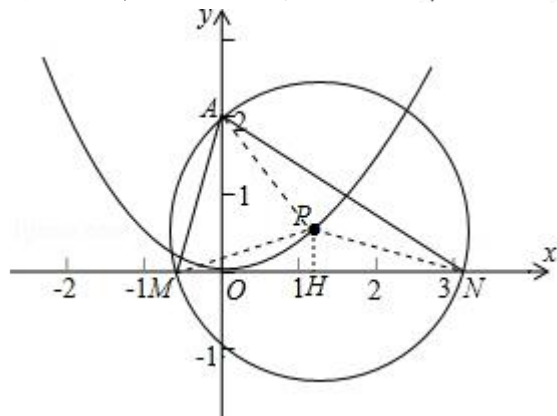
当 $AM = MN$ 时, $\sqrt{(a-2)^2 + 4} = 4$,

解得: $a = 2 \pm 2\sqrt{3}$ (负数舍去), 则 $\frac{1}{4}a^2 = 4 + 2\sqrt{3}$;

当 $AN = MN$ 时, $\sqrt{(a+2)^2 + 4} = 4$,

解得: $a = -2 \pm 2\sqrt{3}$ (负数舍去), 则 $\frac{1}{4}a^2 = 4 - 2\sqrt{3}$;

综上所述, P 的纵坐标为 0 或 $4 + 2\sqrt{3}$ 或 $4 - 2\sqrt{3}$.



点评: 此题主要考查了二次函数综合以及等腰三角形的性质以及勾股定理等知识, 根据题意利用数形结合以及分类讨论得出是解题关键.
