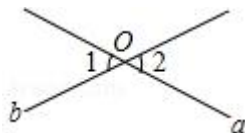


2013 年湖南省湘西州中考数学试卷

一、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1. (3 分) -2013 的绝对值是_____.

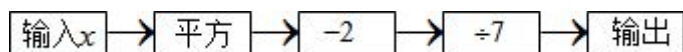
2. (3 分) 如图，直线 a 和直线 b 相交于点 O ， $\angle 1 = 50^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ _____.



3. (3 分) 吉首至怀化的高速公路 2012 年 12 月 23 日顺利通车后，赴凤凰古城游玩的游客越来越多. 据统计，今年春节期间，凤凰古城接待游客约为 210000 人，其中 210000 人用科学记数法表示为_____人.

4. (3 分) 函数 $y = \sqrt{3x-1}$ 的自变量 x 的取值范围是_____.

5. (3 分) 下面是一个简单的数值运算程序，当输入 x 的值为 3 时，则输出的数值为_____. (用科学记数器计算或笔算)



6. (3 分) 小明把如图所示的矩形纸板挂在墙上，玩飞镖游戏（每次飞镖均落在纸板上），则飞镖落在阴影区域的概率是_____.



二、选择题（本大题小题，每小题分，共分，将每个小题所给四个选项中唯一正确选项的代号涂在答题卡上）

7. (3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $a^2 - a^4 = a^8$

B. $(x-2)(x-3) = x^2 - 6$

C. $(x-2)^2 = x^2 - 4$

D. $2a+3a = 5a$

8. (3 分) 若 $x > y$ ，则下列式子错误的是 ()

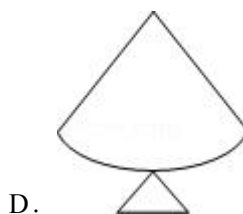
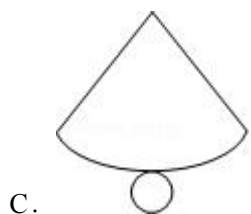
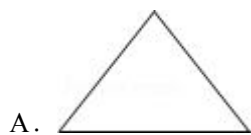
A. $x-3 > y-3$

B. $-3x > -3y$

C. $x+3 > y+3$

D. $\frac{x}{3} > \frac{y}{3}$

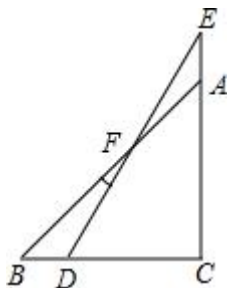
9. (3 分) 下列图形中，是圆锥侧面展开图的是 ()



10. (3分) 在某次体育测试中, 九年级(2)班6位同学的立定跳远成绩(单位: 米)分别是: 1.83, 1, 85, 1.96, 2.08, 1.85, 1.98, 则这组数据的众数是()

- A. 1.83 B. 1.85 C. 2.08 D. 1.96

11. (3分) 如图, 一副分别含有 30° 和 45° 角的两个直角三角板, 拼成如下图形, 其中 $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle E = 30^\circ$, 则 $\angle BFD$ 的度数是()

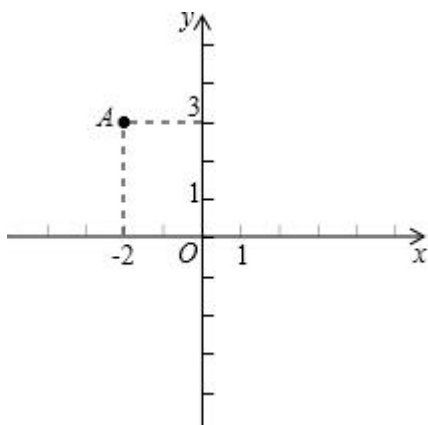


- A. 15° B. 25° C. 30° D. 10°

12. (3分) 下列说法中, 正确的是()

- A. 同位角相等
B. 对角线相等的四边形是平行四边形
C. 四条边相等的四边形是菱形
D. 矩形的对角线一定互相垂直

13. (3分) 如图, 在平面直角坐标系中, 将点 $A(-2, 3)$ 向右平移3个单位长度后, 那么平移后对应的点 A' 的坐标是()

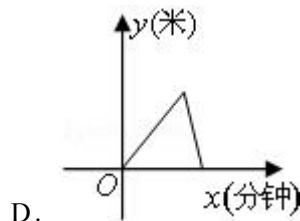
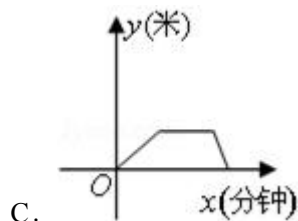
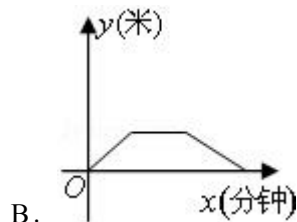
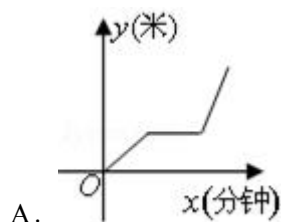


- A. $(-2, -3)$ B. $(-2, 6)$ C. $(1, 3)$ D. $(-2, 1)$

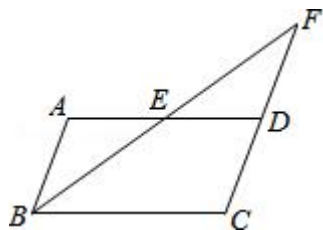
14. (3分) 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径分别为 $3cm$ 和 $5cm$ ，若圆心距 $O_1O_2 = 8cm$ ，则 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的位置关系是()

- A. 相交 B. 相离 C. 内切 D. 外切

15. (3分) 小芳的爷爷每天坚持体育锻炼，某天他慢步行走到离家较远的公园，打了一会儿太极拳，然后沿原路跑步到家里，下面能够反映当天小芳爷爷离家的距离 y (米)与时间 x (分钟)之间关系的大致图象是()



16. (3分) 如图，在 $\square ABCD$ 中， E 是 AD 边上的中点，连接 BE ，并延长 BE 交 CD 延长线于点 F ，则 $\triangle EDF$ 与 $\triangle BCF$ 的周长之比是()



- A. $1:2$ B. $1:3$ C. $1:4$ D. $1:5$

三、解答题(本大题9个小题，共72分，每个题目都要求在答题卡的相应位置写出计算或

证明的主要步骤)

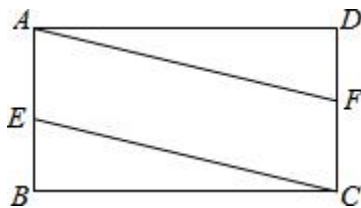
17. (8分) 计算: $(\frac{1}{3})^{-1} - \sqrt{4} - \sin 30^\circ$.

18. (8分) 解方程组:
$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-2y=11 \end{cases}$$
.

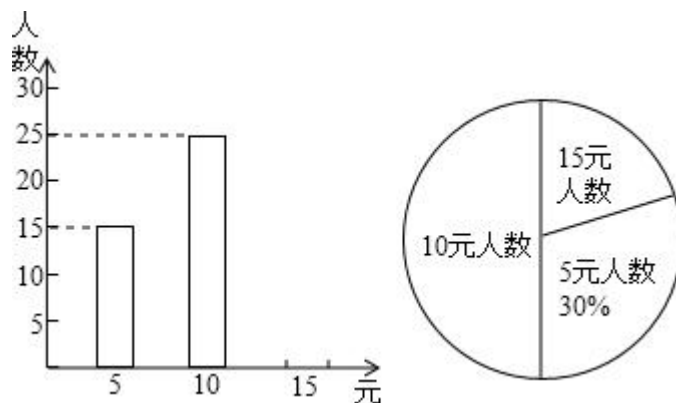
19. (8分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点, 连接 AF , CE .

(1) 求证: $\triangle BEC \cong \triangle DFA$;

(2) 求证: 四边形 $AECF$ 是平行四边形.



20. (8分) 雅安地震, 牵动着全国人民的心, 地震后某中学举行了爱心捐款活动, 下图是该校九年级某班学生为雅安灾区捐款情况绘制的不完整的条形统计图和扇形统计图.



(1) 求该班人数;

(2) 补全条形统计图;

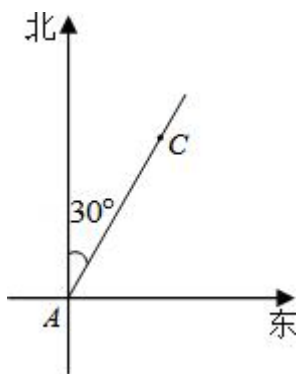
(3) 在扇形统计图中, 捐款“15元人数”所在扇形的圆心角 $\angle AOB$ 的度数;

(4) 若该校九年级有 800 人, 据此样本, 请你估计该校九年级学生共捐款多少元?

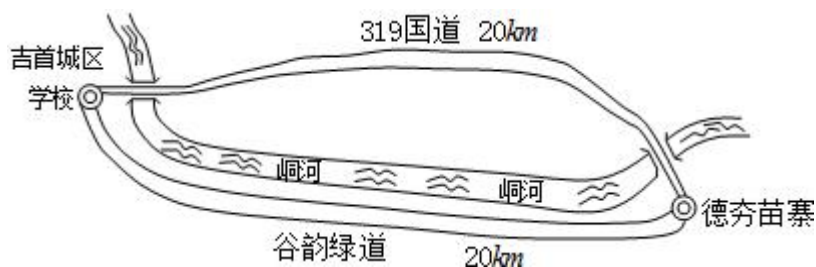
21. (8分) 钓鱼岛自古以来就是中国的神圣领土, 为宣誓主权, 我海监船编队奉命在钓鱼岛附近海域进行维权活动, 如图, 一艘海监船以 30 海里/小时的速度向正北方向航行, 海监船在 A 处时, 测得钓鱼岛 C 在该船的北偏东 30° 方向上, 航行半小时后, 该船到达点 B 处, 发现此时钓鱼岛 C 与该船距离最短.

(1) 请在图中作出该船在点 B 处的位置;

(2) 求钓鱼岛 C 到 B 处距离 (结果保留根号)

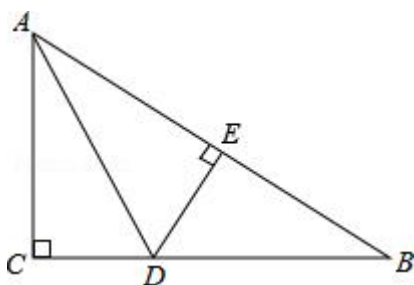


22. (8分) 吉首城区某中学组织学生到距学校 20km 的德夯苗寨参加社会实践活动，一部分学生沿“谷韵绿道”骑自行车先走，半小时后，其余学生沿 319 国道乘汽车前往，结果他们同时到达（两条道路路程相同），已知汽车速度是自行车速度的 2 倍，求骑自行车学生的速度.



23. (8分) 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle CAB$ ， $DE \perp AB$ 于 E ，若 $AC = 6$ ， $BC = 8$ ， $CD = 3$.

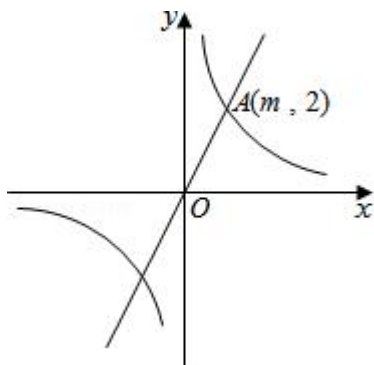
- (1) 求 DE 的长；
- (2) 求 $\triangle ADB$ 的面积.



24. (8分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，正比例函数 $y = kx$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{2}{x}$

的图象有一个交点 $A(m, 2)$.

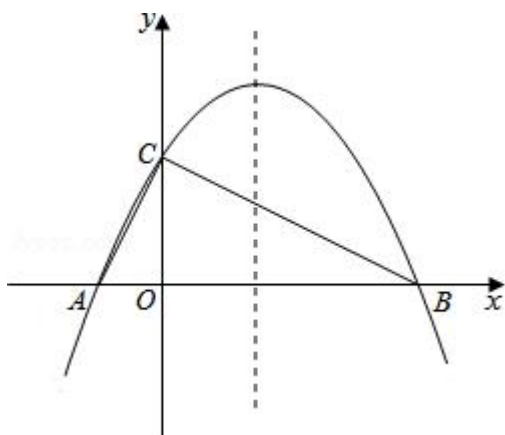
- (1) 求 m 的值；
- (2) 求正比例函数 $y = kx$ 的解析式；
- (3) 试判断点 $B(2, 3)$ 是否在正比例函数图象上，并说明理由.



25. (8分) 如图, 已知抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + 4$ 与 x 轴相交于 A 、 B 两点, 与 y 轴相交于点 C ,

若已知 A 点的坐标为 $A(-2, 0)$.

- (1) 求抛物线的解析式及它的对称轴方程;
- (2) 求点 C 的坐标, 连接 AC 、 BC 并求线段 BC 所在直线的解析式;
- (3) 试判断 $\triangle AOC$ 与 $\triangle COB$ 是否相似? 并说明理由;
- (4) 在抛物线的对称轴上是否存在点 Q , 使 $\triangle ACQ$ 为等腰三角形? 若存在, 求出符合条件的 Q 点坐标; 若不存在, 请说明理由.



2013 年湖南省湘西州中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1. 【分析】根据负数的绝对值等于它的相反数即可求解.

【解答】解： $|-2013| = 2013$.

故答案为：2013.

【点评】考查了绝对值，计算绝对值要根据绝对值的定义求解. 第一步列出绝对值的表达式；第二步根据绝对值定义去掉这个绝对值的符号.

2. 【分析】根据对顶角相等即可求解.

【解答】解： $\because \angle 2$ 与 $\angle 1$ 是对顶角，

$$\therefore \angle 2 = \angle 1 = 50^\circ.$$

故答案为 50° .

【点评】本题考查了对顶角的识别与对顶角的性质，牢固掌握对顶角相等的性质是解题的关键.

3. 【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】解：将 210000 用科学记数法表示为 2.1×10^5 .

故答案为： 2.1×10^5 .

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. 【分析】根据二次根式的性质，被开方数大于或等于 0，可以求出 x 的范围.

【解答】解：根据题意得： $3x - 1 \geq 0$,

$$\text{解得：} x \geq \frac{1}{3}.$$

$$\text{故答案为：} x \geq \frac{1}{3}.$$

【点评】考查了函数自变量的取值范围，函数自变量的范围一般从三个方面考虑：

- (1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；
- (2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；
- (3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负.

5. 【分析】输入 x 的值为 3 时，得出它的平方是 9，再加 (-2) 是 7，最后再除以 7 等于 1.

【解答】解：由题图可得代数式为： $(x^2 - 2) \div 7$.

当 $x = 3$ 时，原式 $= (3^2 - 2) \div 7 = (9 - 2) \div 7 = 7 \div 7 = 1$

故答案为：1.

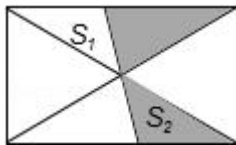
【点评】此题考查了代数式求值，此类题要能正确表示出代数式，然后代值计算，解答本题的关键就是弄清楚题目给出的计算程序.

6. 【分析】先根据矩形的性质求出矩形对角线所分的四个三角形面积相等，再求出 $S_1 = S_2$ 即可.

【解答】解：根据矩形的性质易证矩形的对角线把矩形分成的四个三角形均为同底等高的三角形，故其面积相等，

根据平行线的性质易证 $S_1 = S_2$ ，故阴影部分的面积占一份，

故针头扎在阴影区域的概率为 $\frac{1}{4}$.



【点评】此题主要考查了几何概率问题，用到的知识点为：概率 = 相应的面积与总面积之比.

二、选择题（本大题小题，每小题分，共分，将每个小题所给四个选项中唯一正确选项的代号涂在答题卡上）

7. 【分析】根据合并同类项的法则，多项式乘多项式的法则，完全平方公式对各选项分析判断后利用排除法求解.

【解答】解： A 、 a^2 与 a^4 不是同类项，不能合并，故本选项错误；

B 、 $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$ ，故本选项错误；

C 、 $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ ，故本选项错误；

D 、 $2a + 3a = 5a$ ，故本选项正确.

故选： D .

【点评】本题考查了合并同类项，多项式乘多项式，完全平方公式，属于基础题，熟练掌握运算法则与公式是解题的关键.

8. 【分析】根据不等式的性质在不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变；不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变；不等式两边乘（或除

以) 同一个负数, 不等号的方向改变即可得出答案.

【解答】解: A 、不等式两边都减 3, 不等号的方向不变, 正确;

B 、乘以一个负数, 不等号的方向改变, 错误;

C 、不等式两边都加 3, 不等号的方向不变, 正确;

D 、不等式两边都除以一个正数, 不等号的方向不变, 正确.

故选: B .

【点评】此题考查了不等式的性质, 掌握不等式的性质是解题的关键, 不等式的性质: (1) 不等式两边加 (或减) 同一个数 (或式子), 不等号的方向不变; (2) 不等式两边乘 (或除以) 同一个正数, 不等号的方向不变; (3) 不等式两边乘 (或除以) 同一个负数, 不等号的方向改变.

9. 【分析】根据圆锥的侧面展开图的特点作答.

【解答】解: 圆锥的侧面展开图是光滑的曲面, 没有棱, 只是扇形.

故选: B .

【点评】考查了几何体的展开图, 圆锥的侧面展开图是扇形.

10. 【分析】根据众数的定义: 一组数据中出现次数最多的数据求解即可.

【解答】解: 这组数据出现次数最多的是: 1.85, 共两次,

故众数为: 1.85.

故选: B .

【点评】本题考查了众数的定义, 属于基础题, 解答本题的关键是掌握众数的定义: 一组数据中出现次数最多的数据.

11. 【分析】先由三角形外角的性质求出 $\angle BDF$ 的度数, 根据三角形内角和定理即可得出结论.

【解答】解: $\because \text{Rt}\triangle CDE$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle E = 30^\circ$,

$$\therefore \angle BDF = \angle C + \angle E = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ,$$

$$\because \triangle BDF \text{ 中, } \angle B = 45^\circ, \angle BDF = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BFD = 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ = 15^\circ.$$

故选: A .

【点评】本题考查的是三角形外角的性质, 熟知三角形的外角等于与之不相邻的两个内角的和是解答此题的关键.

12. 【分析】根据平行线的性质判断 A 即可; 根据平行四边形的判定判断 B 即可; 根据菱形

的判定判断 C 即可；根据矩形的性质判断 D 即可.

【解答】解： A 、如果两直线平行，同位角才相等，故 A 选项错误；

B 、对角线互相平分的四边形是平行四边形，故 B 选项错误；

C 、四边相等的四边形是菱形，故 C 选项正确；

D 、矩形的对角线互相平分且相等，不一定垂直，故 D 选项错误；

故选： C .

【点评】本题考查了平行线的性质，平行四边形、菱形的判定、矩形的性质的应用，主要考查学生的理解能力和辨析能力.

13. **【分析】**根据平移时，点的坐标变化规律“左减右加”进行计算即可.

【解答】解：根据题意，从点 A 平移到点 A' ，点 A' 的纵坐标不变，横坐标是 $-2+3=1$,

故点 A' 的坐标是 $(1, 3)$.

故选： C .

【点评】此题考查了点的坐标变化和平移之间的联系，平移时点的坐标变化规律是“上加下减，左减右加”.

14. **【分析】**由两圆的半径分别为 $3cm$ 和 $5cm$ ，圆心距为 $8cm$ ，根据两圆位置关系与圆心距 d ，两圆半径 R, r 的数量关系间的联系即可得出两圆位置关系.

【解答】解： $\because$ 两圆的半径分别为 $3cm$ 和 $5cm$ ，圆心距为 $8cm$,

又 $\because 5+3=8 (cm)$,

$\therefore$ 两圆的位置关系是：外切.

故选： D .

【点评】此题考查了圆与圆的位置关系. 注意掌握两圆位置关系与圆心距 d ，两圆半径 R, r 的数量关系间的联系是解此题的关键.

15. **【分析】**分三段考虑，①漫步到公园，此时 y 随 x 的增大缓慢增大；②打太极， y 随 x 的增大，不变；③跑步回家， y 随 x 的增大，快速减小，结合选项判断即可.

【解答】解：小芳的爷爷点的形成分为三段：

①漫步到公园，此时 y 随 x 的增大缓慢增大；

②打太极， y 随 x 的增大，不变；

③跑步回家， y 随 x 的增大，快速减小，

结合图象可得选项 C 中的图象符合.

故选：C.

【点评】 本题考查了函数的图象，理解每阶段中，离家的距离与时间的关系是解答本题的关键.

16. **【分析】** 根据平行四边形性质得出 $AD = BC$, $AD \parallel BC$, 推出 $\triangle EDF \sim \triangle BCF$, 得出 $\triangle EDF$ 与 $\triangle BCF$ 的周长之比为 $\frac{DE}{BC}$, 根据 $BC = AD = 2DE$ 代入求出即可.

【解答】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle EDF \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \triangle EDF \text{ 与 } \triangle BCF \text{ 的周长之比为 } \frac{DE}{BC},$$

$\because E$ 是 AD 边上的中点，

$$\therefore AD = 2DE,$$

$$\therefore AD = BC,$$

$$\therefore BC = 2DE,$$

$$\therefore \triangle EDF \text{ 与 } \triangle BCF \text{ 的周长之比 } 1:2,$$

故选：A.

【点评】 本题考查了平行四边形性质，相似三角形的性质和判定的应用，注意：平行四边形的对边平行且相等，相似三角形的周长之比等于相似比.

三、解答题（本大题 9 个小题，共 72 分，每个题目都要求在答题卡的相应位置写出计算或证明的主要步骤）

17. **【分析】** 本题涉及负指数幂、平方根、特殊角的三角函数值等考点. 针对每个考点分别进行计算，然后根据实数的运算法则求得计算结果.

【解答】 解：原式 $= \frac{1}{\frac{1}{3}} - 2 - \frac{1}{2}$

$$= 3 - 2 - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}.$$

【点评】 本题考查实数的综合运算能力，是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟记特殊角的三角函数值，熟练掌握负指数幂、平方根、特殊角的三角函数值等考点的运算.

18. 【分析】观察原方程组，两个方程的 y 系数互为相反数，可用加减消元法求解.

【解答】解：
$$\begin{cases} x+2y=1 \textcircled{1} \\ 3x-2y=11 \textcircled{2} \end{cases},$$

①+②，得 $4x = 12$,

解得： $x = 3$.

将 $x = 3$ 代入②，得 $9 - 2y = 11$,

解得 $y = -1$.

所以方程组的解是
$$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}.$$

【点评】对二元一次方程组的考查主要突出基础性，题目一般不难，系数比较简单，主要考查方法的掌握.

19. 【分析】(1) 根据 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点，可得出 $BE = DF$ ，继而利用 SAS 可判断 $\triangle BEC \cong \triangle DFA$;

(2) 由 (1) 的结论，可得 $CE = AF$ ，继而可判断四边形 $AECF$ 是平行四边形.

【解答】证明：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AB = CD, AD = BC,$$

又 $\because E$ 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点，

$$\therefore BE = DF,$$

$\because$ 在 $\triangle BEC$ 和 $\triangle DFA$ 中，

$$\begin{cases} BC=DA \\ \angle B=\angle D, \\ BE=DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BEC \cong \triangle DFA (SAS).$$

(2) 由 (1) 得， $CE = AF$ ， $AD = BC$ ，

故可得四边形 $AECF$ 是平行四边形.

【点评】本题考查了矩形的性质、全等三角形的判定与性质及平行四边形的判定，解答本题的关键是熟练掌握矩形的对边相等，四角都为 90° ，及平行四边形的判定定理.

20. 【分析】(1) 根据 5 元占总数的百分比以及 5 元的人数，即可求出总人数；

(2) 用总人数减去 5 元的人数和 10 元的人数，即可求出 15 元的人数，补全条形统计图即可；

(3) 先利用 15 元的人数除以总人数得到其所占总数的百分比，用 360 度乘以所占的百

分比即可得到“15 元人数”所在扇形的圆心角 $\angle AOB$ 的度数；

(4) 根据调查的某班的捐款数与每种情况的捐款人数, 求出某班的平均一个人的捐款数, 用九年级的总人数乘以一个人的捐款数, 即可估计出九年级学生共捐款的钱数.

【解答】解: (1) $15 \div 30\% = 50$ (人);

(2) 15 元的人数为 $50 - 15 - 25 = 10$ (人), 补全条形统计图为:

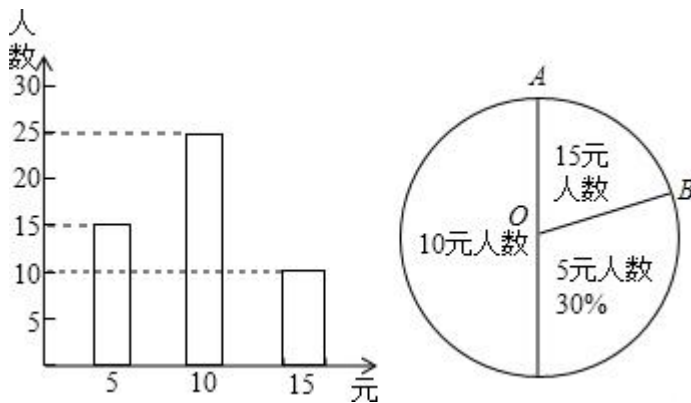
(3) $10 \div 50 = 20\%$,

捐款“15 元人数”所在扇形的圆心角 $\angle AOB$ 的度数 $360^\circ \times 20\% = 72^\circ$;

(4) $15 \times 5 + 25 \times 10 + 10 \times 15 = 475$ 元,

则平均每人捐款为 $475 \div 50 = 9.5$ 元,

估计该校九年级学生共捐款 $800 \times 9.5 = 7600$ 元.



【点评】此题查考了条形统计图, 扇形统计图, 以及用样本估计总体, 理解清题意是解本题的关键.

21. 【分析】(1) 根据垂线段最短知 B 点应是过 C 点所作南北方向的垂线的垂足.

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 利用三角函数的知识求 BC 即可.

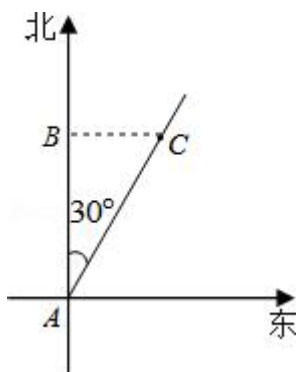
【解答】解: (1) 如图:

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中

$$\because AB = 30 \times 0.5 = 15 \text{ (海里)},$$

$$\therefore BC = AB \tan 30^\circ = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3} \text{ (海里)}.$$

答: 钓鱼岛 C 到 B 处距离为 $5\sqrt{3}$ 海里.



【点评】考查了解直角三角形的应用 - 方向角问题，此题为基础题，涉及用手中工具解题，如尺规，计算器等．

22. 【分析】首先设骑自行车学生的速度是 x 千米/时，则汽车速度是 $2x$ 千米/时，由题意可得等量关系：骑自行车学生行驶 20 千米所用时间 - 汽车行驶 20 千米所用时间 = $\frac{1}{2}$ ，根据等量关系，列出方程即可．

【解答】解：设骑自行车学生的速度是 x 千米/时，由题意得：

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{2x} = \frac{1}{2},$$

解得： $x = 20$ ，

经检验： $x = 20$ 是原分式方程的解，

答：骑自行车学生的速度是 20 千米/时．

【点评】此题主要考查了分式方程的应用，关键是正确理解题意，找出题目中的等量关系，列出方程，注意分式方程要进行检验，这是同学们最容易出错的地方．

23. 【分析】（1）根据角平分线性质得出 $CD = DE$ ，代入求出即可；

（2）利用勾股定理求出 AB 的长，然后计算 $\triangle ADB$ 的面积．

【解答】解：（1） $\because AD$ 平分 $\angle CAB$ ， $DE \perp AB$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore CD = DE,$$

$$\because CD = 3,$$

$$\therefore DE = 3;$$

（2）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得： $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，

$$\therefore \triangle ADB \text{ 的面积为 } S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} \times 10 \times 3 = 15.$$

【点评】本题考查了角平分线性质和勾股定理的运用，注意：角平分线上的点到角两边

的距离相等.

24. 【分析】(1) 将 $A(m, 2)$ 点代入反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, 即可求得 m 的值;

(2) 将 A 点坐标代入正比例函数 $y = kx$, 即可求得正比例函数的解析式;

(3) 将 $x = 2$ 代入 (2) 中所求的正比例函数的解析式, 求出对应的 y 值, 然后与 3 比较, 如果 $y = 3$, 那么点 $B(2, 3)$ 是否在正比例函数图象上; 否则不在.

【解答】解: (1) $\because$ 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象过点 $A(m, 2)$,

$$\therefore 2 = \frac{2}{m},$$

解得 $m = 1$;

(2) $\because$ 正比例函数 $y = kx$ 的图象过点 $A(1, 2)$,

$$\therefore 2 = k \times 1,$$

解得 $k = 2$,

$\therefore$ 正比例函数解析式为 $y = 2x$;

(3) 点 $B(2, 3)$ 不在正比例函数图象上, 理由如下:

将 $x = 2$ 代入 $y = 2x$, 得 $y = 2 \times 2 = 4 \neq 3$,

所以点 $B(2, 3)$ 不在正比例函数 $y = 2x$ 的图象上.

【点评】本题主要考查反比例函数与一次函数的交点问题, 待定系数法求反比例函数解析式和反比例函数图象上点的坐标特征等知识, 解答本题的关键是进行数形结合进行解题, 熟练掌握反比例函数的性质, 本题是一道比较不错的习题.

25. 【分析】方法一:

(1) 利用待定系数法求出抛物线解析式, 利用配方法或利用公式 $x = -\frac{b}{2a}$ 求出对称轴方程;

(2) 在抛物线解析式中, 令 $x = 0$, 可求出点 C 坐标; 令 $y = 0$, 可求出点 B 坐标. 再利用待定系数法求出直线 BD 的解析式;

(3) 根据 $\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OB}$, $\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$, 可以判定 $\triangle AOC \sim \triangle COB$;

(4) 本问为存在型问题. 若 $\triangle ACQ$ 为等腰三角形, 则有三种可能的情形, 需要分类讨论, 逐一计算, 避免漏解.

方法二：

(4) 设点 Q 参数坐标，并分类讨论三种情况，利用两点间距离公式求解 Q 点坐标.

【解答】方法一：

解：(1) $\because$ 抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + 4$ 的图象经过点 $A(-2, 0)$,

$$\therefore -\frac{1}{4} \times (-2)^2 + b \times (-2) + 4 = 0,$$

$$\text{解得：} b = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4,$$

$$\text{又 } \because y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + \frac{25}{4},$$

$$\therefore \text{对称轴方程为：} x = 3.$$

$$(2) \text{ 在 } y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 \text{ 中，令 } x = 0, \text{ 得 } y = 4, \therefore C(0, 4);$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 即 } -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 = 0, \text{ 整理得 } x^2 - 6x - 16 = 0, \text{ 解得：} x = 8 \text{ 或 } x = -2,$$

$$\therefore A(-2, 0), B(8, 0).$$

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

把 $B(8, 0)$, $C(0, 4)$ 的坐标分别代入解析式，得：

$$\begin{cases} 8k + b = 0 \\ b = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得 } k = -\frac{1}{2}, b = 4,$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的解析式为：} y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

(3) 可判定 $\triangle AOC \sim \triangle COB$ 成立.

理由如下：在 $\triangle AOC$ 与 $\triangle COB$ 中，

$$\because OA = 2, OC = 4, OB = 8,$$

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OB},$$

$$\text{又 } \because \angle AOC = \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle COB.$$

(4) $\because$ 抛物线的对称轴方程为: $x=3$,

可设点 $Q(3, t)$, 则可求得:

$$AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$AQ = \sqrt{5^2 + t^2} = \sqrt{25 + t^2},$$

$$CQ = \sqrt{3^2 + (t-4)^2} = \sqrt{(t-4)^2 + 9}.$$

i) 当 $AQ = CQ$ 时,

$$\text{有 } \sqrt{25 + t^2} = \sqrt{(t-4)^2 + 9},$$

$$25 + t^2 = t^2 - 8t + 16 + 9,$$

解得 $t = 0$,

$$\therefore Q_1(3, 0);$$

ii) 当 $AC = AQ$ 时,

$$\text{有 } \sqrt{25 + t^2} = 2\sqrt{5},$$

$$t^2 = -5, \text{ 此方程无实数根,}$$

$\therefore$ 此时 $\triangle ACQ$ 不能构成等腰三角形;

iii) 当 $AC = CQ$ 时,

$$\text{有 } \sqrt{(t-4)^2 + 9} = 2\sqrt{5},$$

$$\text{整理得: } t^2 - 8t + 5 = 0,$$

$$\text{解得: } t = 4 \pm \sqrt{11},$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 坐标为: } Q_2(3, 4 + \sqrt{11}), Q_3(3, 4 - \sqrt{11}).$$

综上所述, 存在点 Q , 使 $\triangle ACQ$ 为等腰三角形, 点 Q 的坐标为: $Q_1(3, 0), Q_2(3, 4 + \sqrt{11}),$

$$Q_3(3, 4 - \sqrt{11}).$$

方法二:

(4) $\because$ 抛物线的对称轴方程为: $x=3$,

$$\therefore Q(3, t), A(-2, 0), C(0, 4),$$

$\because \triangle ACQ$ 为等腰三角形,

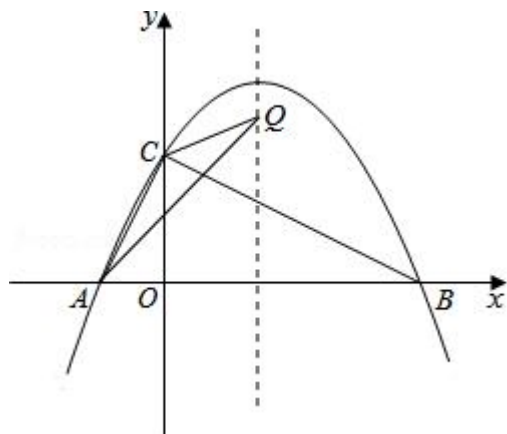
$$\therefore AC = AQ, AC = CQ, AQ = CQ,$$

$$(-2-0)^2 + (0-4)^2 = (3+2)^2 + (t-0)^2, \text{ 无解,}$$

$$(-2-0)^2 + (0-4)^2 = (3-0)^2 + (t-4)^2, t = 4 \pm \sqrt{11},$$

$$(3+2)^2 + (t-0)^2 = (3-0)^2 + (t-4)^2, \quad t=0,$$

综上所述, 存在点 Q , 使 $\triangle ACQ$ 为等腰三角形, 点 Q 的坐标为: $Q_1(3, 0)$, $Q_2(3, 4+\sqrt{11})$, $Q_3(3, 4-\sqrt{11})$.



【点评】 本题考查了二次函数与一次函数的图象与性质、待定系数法、相似三角形的判定、勾股定理、等腰三角形的判定等知识点. 难点在于第(4)问, 符合条件的等腰三角形 $\triangle ACQ$ 可能有多种情形, 需要分类讨论.