

2013 年湖南省张家界市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题 3 分，共计 24 分）

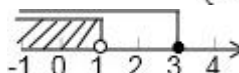
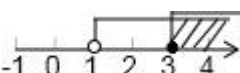
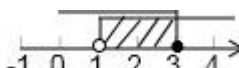
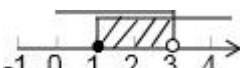
1. (3 分) -2013 的绝对值是 ()

- A. -2013 B. 2013 C. $\frac{1}{2013}$ D. $-\frac{1}{2013}$

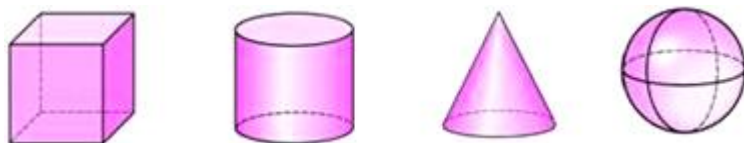
2. (3 分) 下列运算正确的是 ()

- A. $3a - 2a = 1$ B. $x^8 - x^4 = x^2$
C. $\sqrt{(-2)^2} = -2$ D. $-(2x^2y)^3 = -8x^6y^3$

3. (3 分) 把不等式组 $\begin{cases} x > 1 \\ 2x - 1 \leq 5 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()

- A.  B. 
C.  D. 

4. (3 分) 下面四个几何体中，俯视图不是圆形的几何体的个数是 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. (3 分) 下列各式中能用完全平方公式进行因式分解的是 ()

- A. $x^2 + x + 1$ B. $x^2 + 2x - 1$ C. $x^2 - 1$ D. $x^2 - 6x + 9$

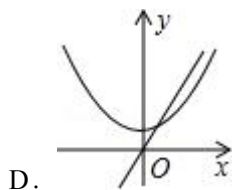
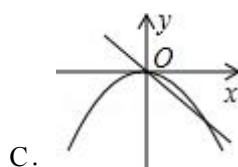
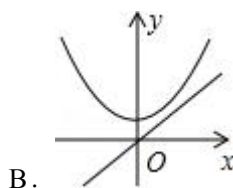
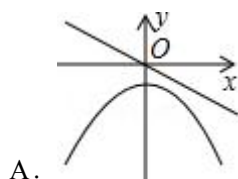
6. (3 分) 顺次连接等腰梯形四边中点所得的四边形一定是 ()

- A. 矩形 B. 正方形 C. 菱形 D. 直角梯形

7. (3 分) 下列事件中是必然事件的为 ()

- A. 有两边及一角对应相等的三角形全等
B. 方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 有两个不等实根
C. 面积之比为 1:4 的两个相似三角形的周长之比也是 1:4
D. 圆的切线垂直于过切点的半径

8. (3 分) 若正比例函数 $y = mx$ ($m \neq 0$), y 随 x 的增大而减小, 则它和二次函数 $y = mx^2 + m$ 的图象大致是 ()

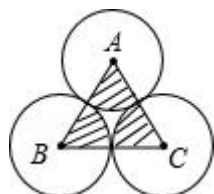


二、填空题（本大题共 8 个小题，每小题 3 分，共计 24 分）

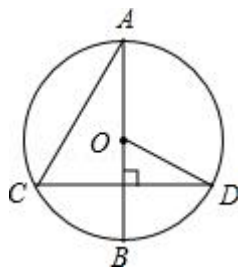
9. (3 分) 我国除了约 960 万平方千米的陆地面积外，还有约 3000000 平方千米的海洋面积，3000000 用科学记数法表示为_____.

10. (3 分) 若 3, a , 4, 5 的众数是 4，则这组数据的平均数是_____.

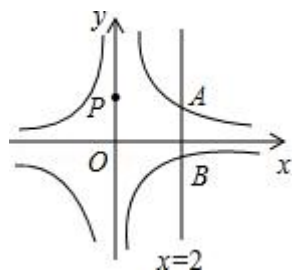
11. (3 分) 如图， $\odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$ 两两外切，它们的半径都是 a ，顺次连接三个圆心，则图中阴影部分的面积是_____.



12. (3 分) 如图， $\odot O$ 的直径 AB 与弦 CD 垂直，且 $\angle BAC = 40^\circ$ ，则 $\angle BOD =$ _____.



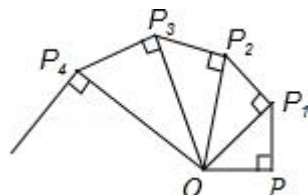
13. (3 分) 如图，直线 $x = 2$ 与反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 和 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象分别交于 A 、 B 两点，若点 P 是 y 轴上任意一点，则 $\triangle PAB$ 的面积是_____.



14. (3 分) 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + 4x + 3 = 0$ 有实数根，则 k 的非负整数值是_____.

15. (3分) 从 1, 2, 3 这三个数字中任意取出两个不同的数字, 则取出的两个数字都是奇数的概率是_____.

16. (3分) 如图, $OP = 1$, 过 P 作 $PP_1 \perp OP$, 得 $OP_1 = \sqrt{2}$; 再过 P_1 作 $P_1P_2 \perp OP_1$ 且 $P_1P_2 = 1$, 得 $OP_2 = \sqrt{3}$; 又过 P_2 作 $P_2P_3 \perp OP_2$ 且 $P_2P_3 = 1$, 得 $OP_3 = 2$; ... 依此法继续作下去, 得 $OP_{2012} = \underline{\hspace{2cm}}$.

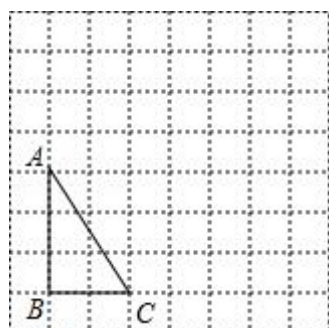


三、解答题 (本大题共 9 个小题, 共计 72 分)

17. (6分) 计算: $(2013-\pi)^0 - (\frac{1}{2})^{-2} - 2\sin 60^\circ + |\sqrt{3}-1|$.

18. (6分) 先简化, 再求值: $\frac{x}{x^2-2x+1} \div (\frac{x+1}{x^2-1} + 1)$, 其中 $x = \sqrt{2}+1$.

19. (6分) 如图, 在方格纸上, 以格点连线为边的三角形叫做格点三角形, 请按要求完成下列操作: 先将格点 $\triangle ABC$ 绕 A 点逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 再将 $\triangle A_1B_1C_1$ 沿直线 B_1C_1 作轴反射得到 $\triangle A_2B_2C_2$.



20. (8分) 为增强市民的节水意识, 某市对居民用水实行“阶梯收费”: 规定每户每月不超过月用水标准部分的水价为 1.5 元/吨, 超过月用水标准量部分的水价为 2.5 元/吨. 该市小明家 5 月份用水 12 吨, 交水费 20 元. 请问: 该市规定的每户月用水标准量是多少吨?

21. (8分) 某班在一次班会课上, 就“遇见路人摔倒后如何处理”的主题进行讨论, 并对全班 50 名学生的处理方式进行了统计, 得出相关统计表和统计图.

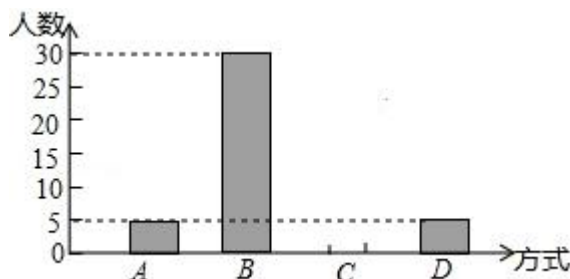
组别	A	B	C	D
处理方式	迅速离开	马上救助	视情况而定	只看热闹
人数	m	30	n	5

请根据表图所提供的信息回答下列问题:

(1) 统计表中的 $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 补全频数分布直方图;

(3) 若该校有 2000 名学生, 请据此估计该校学生采取“马上救助”方式的学生有多少人?



22. (8 分) 国家海洋局将中国钓鱼岛最高峰命名为“高华峰”, 并对钓鱼岛进行常态化立体巡航. 如图 1, 在一次巡航过程中, 巡航飞机飞行高度为 2001 米, 在点 A 测得高华峰顶 F 点的俯角为 30° , 保持方向不变前进 1200 米到达 B 点后测得 F 点俯角为 45° , 如图 2. 请据此计算钓鱼岛的最高海拔高度多少米. (结果保留整数, 参考数值: $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{2} = 1.414$)



图1

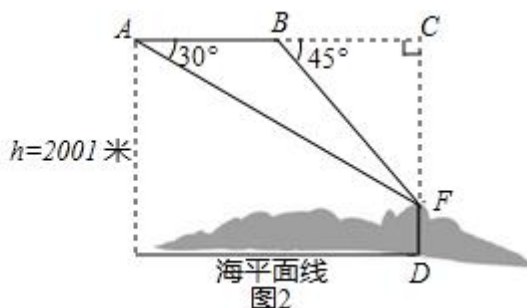


图2

23. (8 分) 阅读材料: 求 $1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2013}$ 的值.

解: 设 $S = 1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2012}+2^{2013}$, 将等式两边同时乘 2 得:

$$2S = 2+2^2+2^3+2^4+2^5+\dots+2^{2013}+2^{2014}$$

$$\text{将下式减去上式得 } 2S - S = 2^{2014} - 1$$

$$\text{即 } S = 2^{2014} - 1$$

$$\text{即 } 1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2013} = 2^{2014} - 1$$

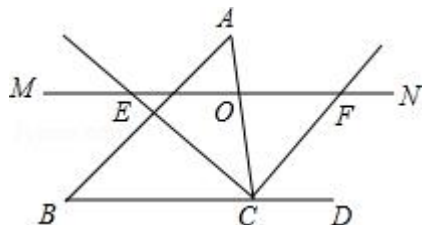
请你仿照此法计算:

(1) $1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{10}$

(2) $1+3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^n$ (其中 n 为正整数).

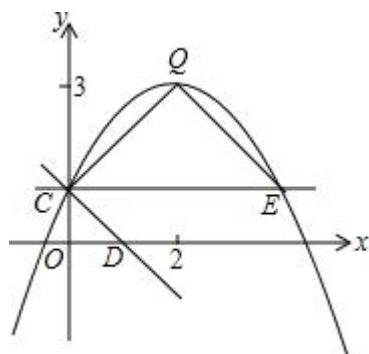
24. (10 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 O 是边 AC 上一个动点, 过 O 作直线 $MN \parallel BC$. 设 MN 交 $\angle ACB$ 的平分线于点 E , 交 $\angle ACB$ 的外角平分线于点 F .

- (1) 求证: $OE = OF$;
- (2) 若 $CE = 12$, $CF = 5$, 求 OC 的长;
- (3) 当点 O 在边 AC 上运动到什么位置时, 四边形 $AECF$ 是矩形? 并说明理由.



25. (12 分) 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象过点 $C(0, 1)$, 顶点为 $Q(2, 3)$, 点 D 在 x 轴正半轴上, 且 $OD = OC$.

- (1) 求直线 CD 的解析式;
- (2) 求抛物线的解析式;
- (3) 将直线 CD 绕点 C 逆时针方向旋转 45° 所得直线与抛物线相交于另一点 E , 求证: $\triangle CEQ \sim \triangle CDO$;
- (4) 在 (3) 的条件下, 若点 P 是线段 QE 上的动点, 点 F 是线段 OD 上的动点, 问: 在 P 点和 F 点移动过程中, $\triangle PCF$ 的周长是否存在最小值? 若存在, 求出这个最小值; 若不存在, 请说明理由.



2013 年湖南省张家界市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题 3 分，共计 24 分）

1. 【分析】计算绝对值要根据绝对值定义去掉这个绝对值的符号.

【解答】解： $|-2013| = 2013$.

故选：B.

【点评】此题考查了绝对值的性质，要求掌握绝对值的性质及其定义，并能熟练运用到实际运算当中.

绝对值规律总结：一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0.

2. 【分析】A、合并同类项得到结果，即可作出判断；

B、本选项不能合并，错误；

C、利用二次根式的化简公式计算得到结果，即可作出判断；

D、原式利用积的乘方与幂的乘方运算法则计算得到结果，即可作出判断.

【解答】解：A、 $3a - 2a = a$ ，本选项错误；

B、本选项不能合并，错误；

C、 $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$ ，本选项错误；

D、 $-(2x^2y)^3 = -8x^6y^3$ ，本选项正确，

故选：D.

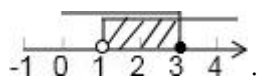
【点评】此题考查了积的乘方与幂的乘方，合并同类项，同底数幂的乘法，熟练掌握公式及法则是解本题的关键.

3. 【分析】求出不等式组的解集，表示在数轴上即可.

【解答】解：
$$\begin{cases} x > 1 \text{ ①} \\ 2x - 1 \leq 5 \text{ ②} \end{cases}$$

由②得： $x \leq 3$,

则不等式组的解集为 $1 < x \leq 3$ ，表示在数轴上，如图所示：



故选：C.

【点评】此题考查了在数轴上表示不等式的解集，以及解一元一次不等式组，把每个不

等式的解集在数轴上表示出来 ($>$, $\geq$ 向右画; $<$, $\leq$ 向左画), 数轴上的点把数轴分成若干段, 如果数轴的某一段上面表示解集的线的条数与不等式的个数一样, 那么这段就是不等式组的解集. 有几个就要几个. 在表示解集时“ $\geq$ ”, “ $\leq$ ”要用实心圆点表示; “ $<$ ”, “ $>$ ”要用空心圆点表示.

4. 【分析】根据俯视图是分别从物体上面看, 所得到的图形进行解答即可.

【解答】解: 俯视图不是圆的几何体只有正方体,

故选: A .

【点评】本题考查了几何体的三视图, 掌握定义是关键. 注意所有的看到的棱都应表现在三视图中.

5. 【分析】根据完全平方公式的特点: 两项平方项的符号相同, 另一项是两底数积的 2 倍, 对各选项分析判断后利用排除法求解.

【解答】解: A 、 x^2+x+1 不符合完全平方公式法分解因式的式子特点, 故 A 错误;

B 、 x^2+2x-1 不符合完全平方公式法分解因式的式子特点, 故 B 错误;

C 、 x^2-1 不符合完全平方公式法分解因式的式子特点, 故 C 错误;

D 、 $x^2-6x+9=(x-3)^2$, 故 D 正确.

故选: D .

【点评】本题考查了用公式法进行因式分解, 能用公式法进行因式分解的式子的特点需熟记.

6. 【分析】根据等腰梯形的性质及中位线定理和菱形的判定, 可推出四边形为菱形.

【解答】解: 如图, 已知: 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$, E 、 F 、 G 、 H 分别是各边的中点,

求证: 四边形 $EFGH$ 是菱形.

证明: 连接 AC 、 BD .

$\because E$ 、 F 分别是 AB 、 BC 的中点,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC.$$

$$\text{同理 } FG = \frac{1}{2}BD, \quad GH = \frac{1}{2}AC, \quad EH = \frac{1}{2}BD,$$

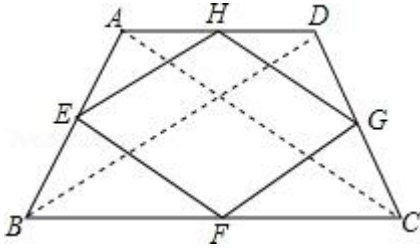
又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$$\therefore AC = BD,$$

$$\therefore EF = FG = GH = HE,$$

∴ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

故选: C .



【点评】 此题主要考查了等腰梯形的性质, 三角形的中位线定理和菱形的判定. 用到的知识点: 等腰梯形的两底角相等; 三角形的中位线平行于第三边, 并且等于第三边的一半; 四边相等的四边形是菱形.

7. **【分析】** 必然事件就是一定发生的事件, 即发生的概率是 1 的事件.

【解答】 解: A 、只有两边及夹角对应相等的两三角形全等, 而两边及其中一边的对角对应相等的两三角形不一定全等, 是随机事件;

B 、由于判别式 $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, 所以方程无实数根, 是不可能事件;

C 、面积之比为 1: 4 的两个相似三角形的周长之比也是 1: 2, 是不可能事件;

D 、圆的切线垂直于过切点的半径, 是必然事件.

故选: D .

【点评】 本题考查了必然事件、不可能事件、随机事件的概念, 理解概念是解决基础题的主要方法. 用到的知识点为:

必然事件指在一定条件下一定发生的事件; 不可能事件指在一定条件下一定不发生的事件; 不确定事件即随机事件是指在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事件.

8. **【分析】** 根据正比例函数图象的性质确定 $m < 0$, 则二次函数 $y = mx^2 + m$ 的图象开口方向向下, 且与 y 轴交于负半轴.

【解答】 解: ∵ 正比例函数 $y = mx$ ($m \neq 0$), y 随 x 的增大而减小,

∴ 该正比例函数图象经过第二、四象限, 且 $m < 0$.

∴ 二次函数 $y = mx^2 + m$ 的图象开口方向向下, 且与 y 轴交于负半轴.

综上所述, 符合题意的只有 A 选项.

故选: A .

【点评】 本题考查了二次函数图象、正比例函数图象. 利用正比例函数的性质, 推知 $m < 0$ 是解题的突破口.

二、填空题 (本大题共 8 个小题, 每小题 3 分, 共计 24 分)

9. 【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数．

【解答】解：将 3000000 用科学记数法表示为 3×10^6 ．

故答案为： 3×10^6 ．

【点评】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

10. 【分析】先根据众数的定义求出 a 的值，再根据平均数的定义列出算式，再进行计算即可．

【解答】解： $\because 3, a, 4, 5$ 的众数是 4，

$$\therefore a = 4,$$

$$\therefore \text{这组数据的平均数是 } (3+4+4+5) \div 4 = 4;$$

故答案为：4．

【点评】此题考查了众数和算术平均数，关键是根据众数的定义求出 a 的值，用到的知识点是众数的定义、平均数的计算公式．

11. 【分析】根据三角形内角和定理以及扇形面积公式直接求出即可．

【解答】解： $\because \odot A, \odot B, \odot C$ 两两外切，它们的半径都是 a ，

$$\therefore \text{阴影部分的面积是：} \frac{\pi \times a^2 \times (\angle A + \angle B + \angle C)}{360} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

$$\text{故答案为：} \frac{\pi a^2}{2}.$$

【点评】此题主要考查了扇形面积求法，根据已知得出扇形圆心角的和是解题关键．

12. 【分析】根据垂径定理可得点 B 是 $\widehat{CD}$ 中点，由圆周角定理可得 $\angle BOD = 2\angle BAC$ ，继而得出答案．

【解答】解： $\because \odot O$ 的直径 AB 与弦 CD 垂直，

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{BD},$$

$$\therefore \angle BOD = 2\angle BAC = 80^\circ.$$

故答案为： 80° ．

【点评】此题考查了圆周角定理，注意掌握在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半．

13. 【分析】先分别求出 A 、 B 两点的坐标，得到 AB 的长度，再根据三角形的面积公式即可得出 $\triangle PAB$ 的面积.

【解答】解： $\because$ 把 $x=2$ 分别代入 $y=\frac{2}{x}$ 、 $y=-\frac{1}{x}$ ，得 $y=1$ 、 $y=-\frac{1}{2}$.

$$\therefore A(2, 1), B(2, -\frac{1}{2}),$$

$$\therefore AB = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}.$$

$\because P$ 为 y 轴上的任意一点，

$\therefore$ 点 P 到直线 $x=2$ 的距离为 2，

$$\therefore \triangle PAB \text{ 的面积} = \frac{1}{2}AB \times 2 = AB = \frac{3}{2}.$$

故答案是： $\frac{3}{2}$.

【点评】此题考查了反比例函数图象上点的坐标特征及三角形的面积，求出 AB 的长度是解答本题的关键，难度一般.

14. 【分析】根据方程有实数根，得到根的判别式的值大于等于 0 列出关于 k 的不等式，求出不等式的解集得到 k 的范围，即可确定出 k 的非负整数值.

【解答】解：根据题意得： $\Delta = 16 - 12k \geq 0$ ，且 $k \neq 0$ ，

$$\text{解得：} k \leq \frac{4}{3},$$

则 k 的非负整数值为 1.

故答案为：1

【点评】此题考查了根的判别式，根的判别式的值大于 0，方程有两个不相等的实数根；根的判别式的值等于 0，方程有两个相等的实数根；根的判别式的值小于 0，方程没有实数根.

15. 【分析】首先列出树状图，可以直观的看出总共有几种情况，再找出都是奇数的情况，根据概率公式进行计算即可.

【解答】解：如图所示：

$$\text{取出的两个数字都是奇数的概率是：}\frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

故答案为： $\frac{1}{3}$.



【点评】此题主要考查了画树状图，以及概率公式，关键是正确画出树状图.

16. 【分析】首先根据勾股定理求出 OP_4 ，再由 OP_1 ， OP_2 ， OP_3 的长度找到规律进而求出 OP_{2012} 的长.

【解答】解：由勾股定理得： $OP_4 = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$,

$\because OP_1 = \sqrt{2}$; 得 $OP_2 = \sqrt{3}$;

依此类推可得 $OP_n = \sqrt{n+1}$,

$\therefore OP_{2012} = \sqrt{2013}$,

故答案为： $\sqrt{2013}$.

【点评】本题考查了勾股定理的运用，解题的关键是由已知数据找到规律.

三、解答题（本大题共 9 个小题，共计 72 分）

17. 【分析】分别进行零指数幂、负整数指数幂、特殊角的三角函数值、绝对值等运算，然后按照实数的运算法则计算即可.

【解答】解：原式 $= 1 - 4 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} - 1 = -4$.

【点评】本题考查了实数的运算，涉及了零指数幂、负整数指数幂、特殊角的三角函数值、绝对值等知识，属于基础题.

18. 【分析】原式除数括号中两项通分并利用同分母分式的加法法则计算，同时利用除以一个数等于乘以这个数的倒数将除法运算化为乘法运算，约分得到最简结果，将 x 的值代入计算即可求出值.

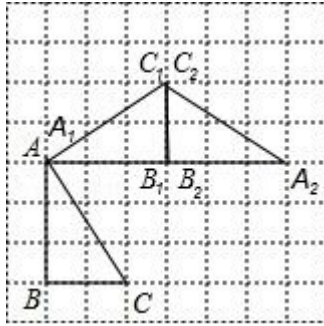
【解答】解：原式 $= \frac{x}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)}$
 $= \frac{1}{x-1}$,

当 $x = \sqrt{2} + 1$ 时，原式 $= \frac{1}{\sqrt{2} + 1 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点评】此题考查了分式的化简求值，分式的加减运算关键是通分，通分的关键是找最简公分母；分式的乘除运算关键是约分，约分的关键是找公因式.

19. 【分析】 $\triangle ABC$ 绕 A 点逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ， $\triangle A_1B_1C_1$ 沿直线 B_1C_1 作轴反射得出 $\triangle A_2B_2C_2$ 即可.

【解答】解：如图所示：



【点评】此题主要考查了图形的旋转变换以及轴对称图形，根据已知得出对应点位置是解题关键．

20. 【分析】设该市规定的每户每月标准用水量为 x 吨，然后可得出方程，解出即可．

【解答】解：设该市规定的每户每月标准用水量为 x 吨，

$$\because 12 \times 1.5 = 18 < 20,$$

$$\therefore x < 12$$

$$\text{则 } 1.5x + 2.5(12 - x) = 20,$$

$$\text{解得：} x = 10.$$

答：该市规定的每户每月标准用水量为 10 吨．

【点评】本题考查了一元一次方程的应用，属于基础题，解题关键是判断出 x 的范围，根据等量关系得出方程．

21. 【分析】（1）根据条形统计图可以求得 m 的值，然后利用 50 减去其它各组的人数即可求得 n 的值；

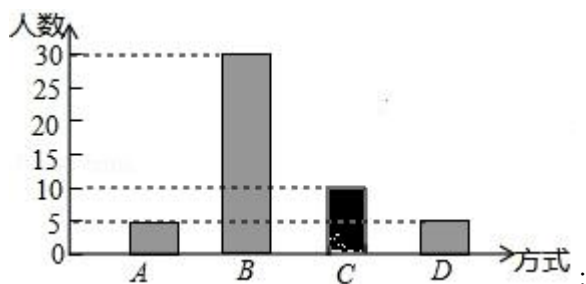
（2）根据（1）的结果即可作出统计图；

（3）利用总人数 2000 乘以所占的比例即可求解．

【解答】解：（1）根据条形图可以得到： $m = 5$ ， $n = 50 - 5 - 30 - 5 = 10$ （人）

故答案是：5，10；

（2）



$$(3) 2000 \times \frac{30}{50} = 1200 \text{ (人)}.$$

【点评】 本题考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力. 利用统计图获取信息时, 必须认真观察、分析、研究统计图, 才能作出正确的判断和解决问题.

22. **【分析】** 设 $CF = x$, 在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 和 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中, 分别用 CF 表示 AC 、 BC 的长度, 然后根据 $AC - BC = 1200$, 求得 x 的值, 用 $h - x$ 即可求得最高海拔.

【解答】 解: 设 $CF = x$,

在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 和 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中,

$$\because \angle BAF = 30^\circ, \angle CBF = 45^\circ,$$

$$\therefore BC = CF = x,$$

$$\frac{CF}{AC} = \tan 30^\circ,$$

$$\text{即 } AC = \sqrt{3}x,$$

$$\because AC - BC = 1200 \text{ 米},$$

$$\therefore \sqrt{3}x - x = 1200,$$

$$\text{解得: } x = 600(\sqrt{3} + 1),$$

$$\text{则 } DF = h - x = 2001 - 600(\sqrt{3} + 1) \approx 362 \text{ (米)}.$$

答: 钓鱼岛的最高海拔高度约 362 米.

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用, 解答本题的关键是根据俯角构造直角三角形求出 AC 、 BC 的长度, 难度一般.

23. **【分析】** (1) 设 $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10}$, 两边乘以 2 后得到关系式, 与已知等式相减, 变形即可求出所求式子的值;

(2) 同理即可得到所求式子的值.

$$\text{【解答】解: (1) 设 } S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10},$$

$$\text{将等式两边同时乘 2 得: } 2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10} + 2^{11},$$

$$\text{将下式减去上式得: } 2S - S = 2^{11} - 1, \text{ 即 } S = 2^{11} - 1,$$

$$\text{则 } 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10} = 2^{11} - 1;$$

$$(2) \text{ 设 } S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n \text{ ①},$$

$$\text{两边同时乘 3 得: } 3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n + 3^{n+1} \text{ ②},$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{得: } 3S - S = 3^{n+1} - 1, \text{ 即 } S = \frac{1}{2} (3^{n+1} - 1),$$

$$\text{则 } 1+3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^n = \frac{1}{2} (3^{n+1} - 1).$$

【点评】此题考查了同底数幂的乘法，弄清题中的技巧是解本题的关键.

24. 【分析】(1) 根据平行线的性质以及角平分线的性质得出 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, 进而得出答案;

(2) 根据已知得出 $\angle 2 + \angle 4 = \angle 5 + \angle 6 = 90^\circ$, 进而利用勾股定理求出 EF 的长, 即可得出 CO 的长;

(3) 根据平行四边形的判定以及矩形的判定得出即可.

【解答】(1) 证明: $\because MN$ 交 $\angle ACB$ 的平分线于点 E , 交 $\angle ACB$ 的外角平分线于点 F ,

$$\therefore \angle 2 = \angle 5, \angle 4 = \angle 6,$$

$$\because MN \parallel BC,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 5, \angle 3 = \angle 6,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4,$$

$$\therefore EO = CO, FO = CO,$$

$$\therefore OE = OF;$$

$$(2) \text{解: } \because \angle 2 = \angle 5, \angle 4 = \angle 6,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 4 = \angle 5 + \angle 6 = 90^\circ,$$

$$\because CE = 12, CF = 5,$$

$$\therefore EF = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}EF = 6.5;$$

(3) 解: 当点 O 在边 AC 上运动到 AC 中点时, 四边形 $AECF$ 是矩形.

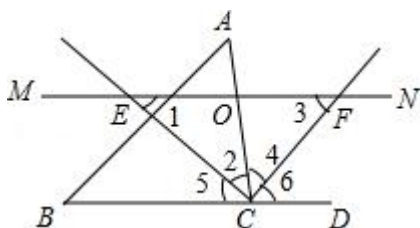
证明: 当 O 为 AC 的中点时, $AO = CO$,

$$\because EO = FO,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

$$\because \angle ECF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 平行四边形 $AECF$ 是矩形.



【点评】此题主要考查了矩形的判定、平行四边形的判定和直角三角形的判定等知识，根据已知得出 $\angle ECF = 90^\circ$ 是解题关键．

25. 【分析】方法一：

(1) 利用待定系数法求出直线解析式；

(2) 利用待定系数法求出抛物线的解析式；

(3) 关键是证明 $\triangle CEQ$ 与 $\triangle CDO$ 均为等腰直角三角形；

(4) 如答图②所示，作点 C 关于直线 QE 的对称点 C' ，作点 C 关于 x 轴的对称点 C'' ，连接 $C'C''$ ，交 OD 于点 F ，交 QE 于点 P ，则 $\triangle PCF$ 即为符合题意的周长最小的三角形，由轴对称的性质可知， $\triangle PCF$ 的周长等于线段 $C'C''$ 的长度．

利用轴对称的性质、两点之间线段最短可以证明此时 $\triangle PCF$ 的周长最小．

如答图③所示，利用勾股定理求出线段 $C'C''$ 的长度，即 $\triangle PCF$ 周长的最小值．

方法二：

(1) 略．

(2) 略．

(3) 分别求出 C ， Q ， E 三点坐标，从而证明 $\triangle CEQ \sim \triangle CDO$ ．

(4) 分别找出点 C 关于直线 QE 的对称点坐标 C' 以及点 C 关于 x 轴的对称点 C'' ，当 C' ， P ， F ， C'' 四点共线时， $\triangle PCF$ 的周长存在最小值．

【解答】方法一：

解：(1) $\because C(0, 1)$ ， $OD = OC$ ， $\therefore D$ 点坐标为 $(1, 0)$ ．

设直线 CD 的解析式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，

将 $C(0, 1)$ ， $D(1, 0)$ 代入得：
$$\begin{cases} 1 = b \\ k + b = 0 \end{cases}$$

解得： $b = 1$ ， $k = -1$ ，

$\therefore$ 直线 CD 的解析式为： $y = -x + 1$ ．

(2) 设抛物线的解析式为 $y = a(x - 2)^2 + 3$ ，

将 $C(0, 1)$ 代入得: $1 = a \times (-2)^2 + 3$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$.

$$\therefore y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1.$$

(3) 证明: 由题意可知, $\angle ECD = 45^\circ$,

$\because OC = OD$, 且 $OC \perp OD$, $\therefore \triangle OCD$ 为等腰直角三角形, $\angle ODC = 45^\circ$,

$\therefore \angle ECD = \angle ODC$, $\therefore CE \parallel x$ 轴, 则点 C 、 E 关于对称轴 (直线 $x = 2$) 对称,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(4, 1)$.

如答图①所示, 设对称轴 (直线 $x = 2$) 与 CE 交于点 M , 则 $M(2, 1)$,

$\therefore ME = CM = QM = 2$, $\therefore \triangle QME$ 与 $\triangle QMC$ 均为等腰直角三角形, $\therefore \angle QEC = \angle QCE = 45^\circ$.

又 $\because \triangle OCD$ 为等腰直角三角形, $\therefore \angle ODC = \angle OCD = 45^\circ$,

$\therefore \angle QEC = \angle QCE = \angle ODC = \angle OCD = 45^\circ$,

$\therefore \triangle CEQ \sim \triangle CDO$.

(4) 存在.

如答图②所示, 作点 C 关于直线 QE 的对称点 C' , 作点 C 关于 x 轴的对称点 C'' , 连接 $C' C''$, 交 OD 于点 F , 交 QE 于点 P , 则 $\triangle PCF$ 即为符合题意的周长最小的三角形, 由轴对称的性质可知, $\triangle PCF$ 的周长等于线段 $C' C''$ 的长度.

(证明如下: 不妨在线段 OD 上取异于点 F 的任一点 F' , 在线段 QE 上取异于点 P 的任一点 P' , 连接 $F' C''$, $F' P'$, $P' C'$.)

由轴对称的性质可知, $\triangle P' CF'$ 的周长 $= F' C'' + F' P' + P' C'$;

而 $F' C'' + F' P' + P' C'$ 是点 C' , C'' 之间的折线段,

由两点之间线段最短可知: $F' C'' + F' P' + P' C' > C' C''$,

即 $\triangle P' CF'$ 的周长大于 $\triangle PCE$ 的周长.)

如答图③所示, 连接 $C' E$,

$\because C, C'$ 关于直线 QE 对称, $\triangle QCE$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \triangle QC' E$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \triangle CEC'$ 为等腰直角三角形,

$\therefore$ 点 C' 的坐标为 $(4, 5)$;

$\because C, C''$ 关于 x 轴对称, $\therefore$ 点 C'' 的坐标为 $(0, -1)$.

过点 C' 作 $C'N \perp y$ 轴于点 N , 则 $NC' = 4$, $NC'' = 4+1+1 = 6$,

在 $Rt\triangle C'NC''$ 中, 由勾股定理得: $C'C'' = \sqrt{NC'^2 + NC''^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

综上所述, 在 P 点和 F 点移动过程中, $\triangle PCF$ 的周长存在最小值, 最小值为 $2\sqrt{13}$.

方法二:

(1) 略.

(2) 略.

(3) $\because OC = OD$, 且 $OC \perp OD$,

$\therefore \triangle OCD$ 为等腰直角三角形, $\angle ODC = 45^\circ$,

$\therefore \angle ECD = \angle ODC$, $CE \parallel x$ 轴, 则点 C, E 关于对称轴对称,

$\therefore E(4, 1)$, $QC = \sqrt{(2-0)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$,

$QE = \sqrt{(2-4)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore QC = QE$,

$\because K_{QC} = \frac{3-1}{2-0} = 1$, $K_{QE} = \frac{3-1}{2-4} = -1$,

$\therefore K_{QC} \times K_{QE} = -1$, $\therefore QC \perp QE$,

$\therefore \triangle CQE$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \triangle CEQ \sim \triangle CDO$.

(4) 过点 C 作关于 x 轴和直线 QE 的对称点 C'' , C' ,

显然 C'' 的坐标为 $(0, -1)$,

$\because QC \perp QE$,

$\therefore$ 点 Q 为 CC' 的中点, 由中点公式,

$\therefore \frac{C_x + C'_x}{2} = Q_x$, $\frac{C_y + C'_y}{2} = Q_y$,

$\therefore C'(4, 5)$,

$\because CF = C''F$, $PC = PC'$,

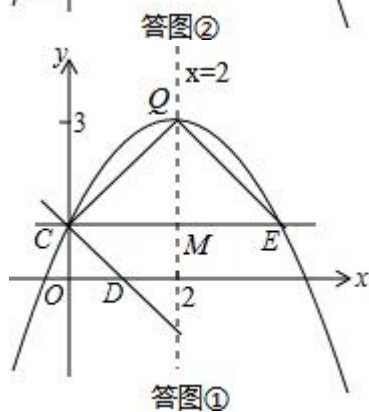
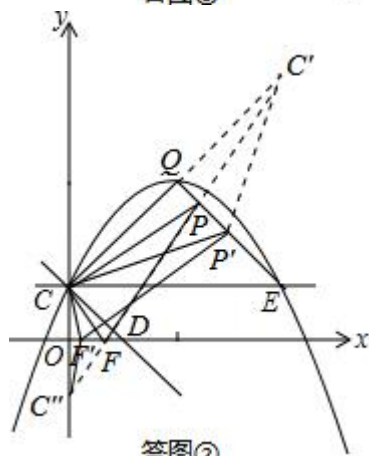
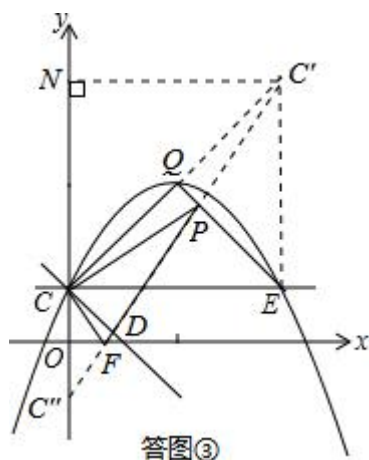
$\therefore$ 当 C', P, F, C'' 四点共线时, 周长最短.

$\therefore CF + FP + PC = C''F + FP + PC' = C''C'$,

$\therefore C''(0, -1)$, $C'(4, 5)$,

$$\therefore C''C' = \sqrt{(0-4)^2 + (-1-5)^2} = 2\sqrt{13},$$

$\therefore \triangle PCF$ 的周长存在最小值，最小值为 $2\sqrt{13}$.



【点评】 本题是中考压轴题，综合考查了二次函数的图象与性质、待定系数法、相似三角形、等腰直角三角形、勾股定理、轴对称的性质等重要知识点，涉及考点较多，有一定的难度．本题难点在于第（4）问，如何充分利用轴对称的性质确定 $\triangle PCF$ 周长最小时的几何图形，是解答本题的关键．