

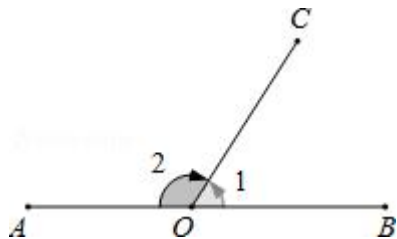
2012 年湖南省邵阳市中考数学试卷

一. 选择题 (本大题共 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 在每个小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的)

1. (3 分) 下列各数中, 最大的数是 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. $\sqrt{2}$

2. (3 分) 如图所示, 已知点 O 是直线 AB 上一点, $\angle 1 = 70^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是 ()



- A. 20° B. 70° C. 110° D. 130°

3. (3 分) 分式方程 $\frac{2}{x} + \frac{x-1}{x} = 2$ 的解是 ()

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

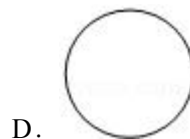
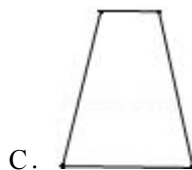
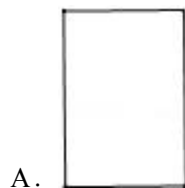
4. (3 分) 把 $2a^2 - 4a$ 因式分解的最终结果是 ()

- A. $2a(a-2)$ B. $2(a^2-2a)$ C. $a(2a-4)$ D. $(a-2)(a+2)$

5. (3 分) 在实验操作技能检测中, 学生通过随机抽取卡片的方式确定检测题目, 现将分别印有题号“①、②、③、④”的 4 张卡片 (卡片的形状、大小一样, 质地相同) 放入盒中, 小明同学从中随机抽取一张卡片, 题号是“①”的概率是 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

6. (3 分) 如图所示, 圆柱体的俯视图是 ()



7. (3 分) 2011 年, 某县通过推广超级稻“种三产四”丰产工程, 粮食产量平均每亩增产 167.1 公斤, 为全县农户新增纯收入 8063.6 万元, 其中 8063.6 万元可以用科学记数法表

示为()

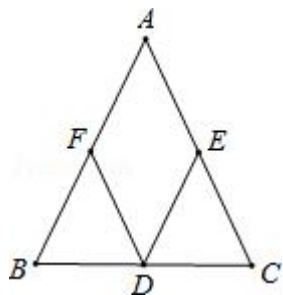
A. 8063.6×10^4 元

B. 80.636×10^6 元

C. 8.0636×10^7 元

D. 0.80636×10^8 元

8. (3分) 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle A < 90^\circ$, 边 BC 、 CA 、 AB 的中点分别是 D 、 E 、 F , 则四边形 $AFDE$ 是()



A. 菱形

B. 正方形

C. 矩形

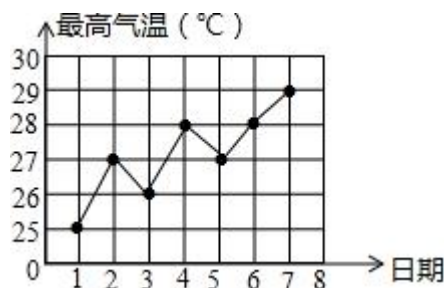
D. 梯形

二. 填空题(本大题共8个小题, 每小题3分, 共24分)

9. (3分) 计算: $|-3| =$ _____.

10. (3分) 3月12日某班50名学生到郊外植树, 平均每人植树 a 棵, 则该班一共植树_____棵.

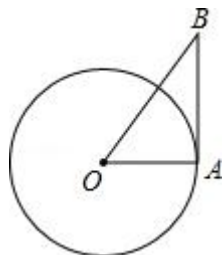
11. (3分) 某地5月1日至7日的每日最高气温如图所示, 这组数据的极差是_____.



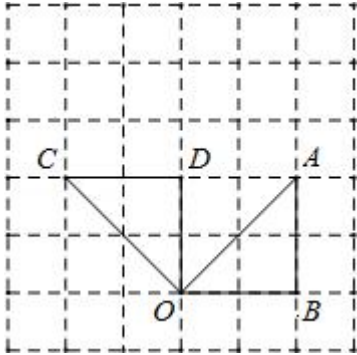
12. (3分) 已知点 $(1, -2)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 常数, $k \neq 0$) 的图象上, 则 k 的值是_____.

13. (3分) 不等式 $4 - 2x > 0$ 的解集是_____.

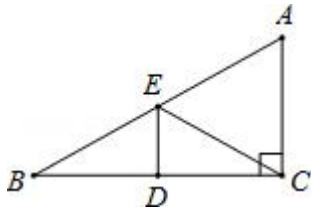
14. (3分) 如图所示, 直线 AB 是 $\odot O$ 的切线, 切点为 A , $OB = 5$, $AB = 4$, 则 OA 的长是_____.



15. (3分) 如图所示, 在正方形网格中 (网格中每个小正方形的边长均为 1), 将 $\triangle OAB$ 绕点 O 按逆时针方向旋转, 得到 $\triangle OCD$, 则 $\angle AOC$ 的度数是_____.



16. (3分) 如图所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, ED 是 BC 的垂直平分线, 请写出图中两条相等的线段是_____.

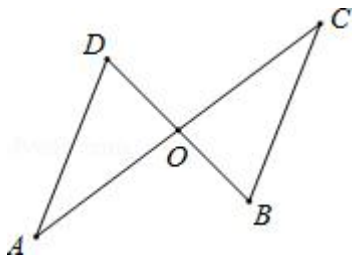


三. 解答题 (本大题共 3 个小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

17. (8分) 计算: $-(-2)^2 - \sqrt{9} \times (3)^{-1}$.

18. (8分) 先化简, 再求值: $x(x+1) - (x+1)(x-1)$, 其中 $x = 2012$.

19. (8分) 如图所示, AC 、 BD 相交于点 O , 且 $OA = OC$, $OB = OD$. 求证: $AD \parallel BC$.



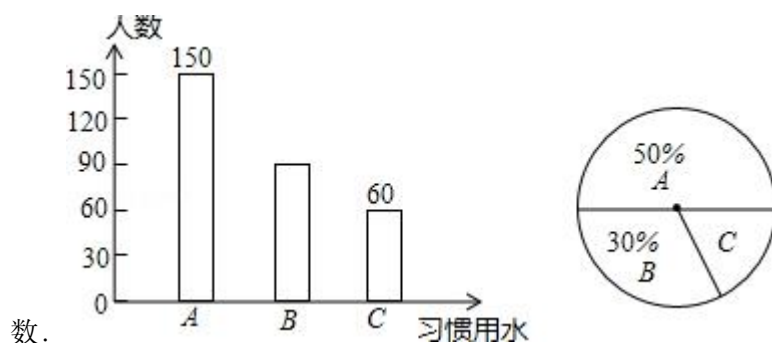
四、应用题 (本大题共 3 个小题, 第 20、21 题每小题 8 分, 第 22 题 10 分, 共 26 分)

20. (8分) 为配合全市“倡导低碳绿色生活, 推进城镇节水减排”的宣传活动, 某校数学课外活动小组把用水习惯分为“很注意解决用水(A)”、“较注意解决用水(B)”、“不注意解决用水(C)”三类情况, 设计了调查问卷在中学生中开展调查, 并将调查结果分析整理后, 制成如图所示的两个统计图.

请根据以上信息解答下列问题:

- (1) 这次调查问卷调查共调查了多少名学生?
- (2) 在扇形统计图中, “B”所对应的扇形的圆心角度数是多少?

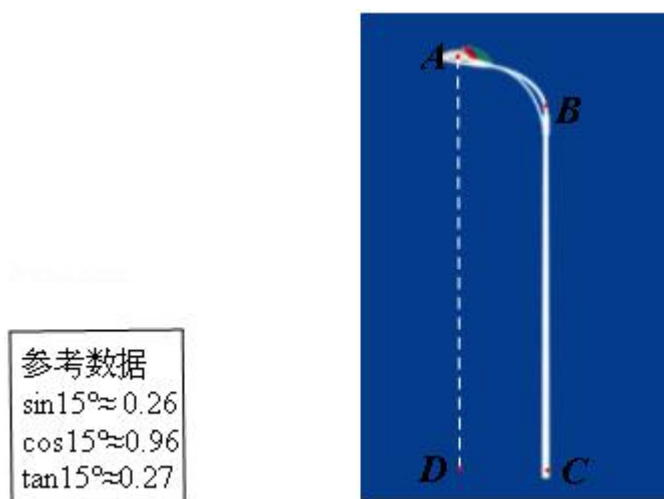
(3) 如果设该校共有学生 3000 人，试估计“不注意解决用水”的学生人数.



21. (8 分) 2012 年，某地开始实施农村义务教育学校营养计划——“蛋奶工程”. 该地农村小学每份营养餐的标准是质量为 300 克，蛋白质含量为 8%，包括一盒牛奶、一包饼干和一个鸡蛋. 已知牛奶的蛋白质含量为 5%，饼干的蛋白质含量为 12.5%，鸡蛋的蛋白质含量为 15%，一个鸡蛋的质量为 60 克.

- (1) 一个鸡蛋中含蛋白质的质量为多少克？
- (2) 每份营养餐中牛奶和饼干的质量分别为多少克？

22. (10 分) 某村为方便村民夜间出行，计划在村内公路旁安装如图所示的路灯，已知路灯灯臂 AB 的长为 $1.2m$ ，灯臂 AB 与灯柱 BC 所成的角 ($\angle ABC$) 的大小为 105° ，要使路灯 A 与路面的距离 AD 为 $7m$ ，试确定灯柱 BC 的高度. (结果保留两位有效数字)



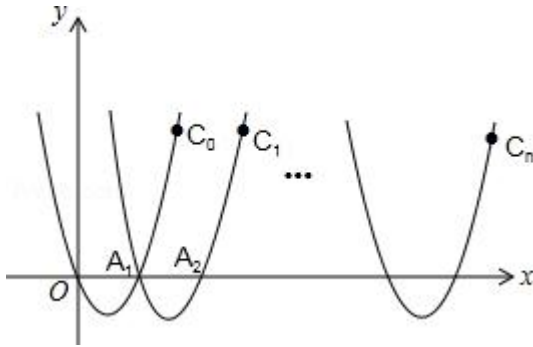
五、探究题 (本大题 10 分)

23. (10 分) 如图所示，已知抛物线 C_0 的解析式为 $y = x^2 - 2x$

- (1) 求抛物线 C_0 的顶点坐标；
- (2) 将抛物线 C_0 每次向右平移 2 个单位，平移 n 次，依次得到抛物线 C_1 、 C_2 、 C_3 、 $\dots$ 、 C_n (n 为正整数)

①求抛物线 C_1 与 x 轴的交点 A_1 、 A_2 的坐标；

②试确定抛物线 C_n 的解析式. (直接写出答案, 不需要解题过程)



六、综合题 (本大题 12 分)

24. (12 分) 如图所示, 直线 $y = -\frac{3}{4}x + b$ 与 x 轴相交于点 $A(4, 0)$, 与 y 轴相交于点 B , 将

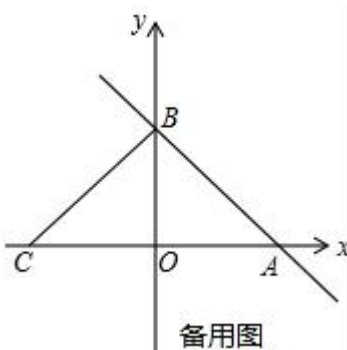
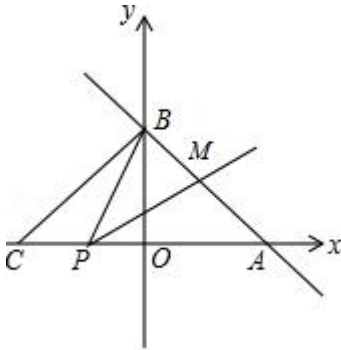
$\triangle AOB$ 沿着 y 轴折叠, 使点 A 落在 x 轴上, 点 A 的对应点为点 C .

(1) 求点 C 的坐标;

(2) 设点 P 为线段 CA 上的一个动点, 点 P 与点 A 、 C 不重合, 连接 PB , 以点 P 为端点作射线 PM 交 AB 于点 M , 使 $\angle BPM = \angle BAC$

①求证: $\triangle PBC \sim \triangle MPA$;

②是否存在点 P 使 $\triangle PBM$ 为直角三角形? 若存在, 请求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2012 年湖南省邵阳市中考数学试卷

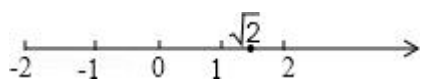
参考答案与试题解析

一. 选择题 (本大题共 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 在每个小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的)

1. 【分析】根据题意画出数轴, 然后把已知数据在数轴对应点找出, 然后利用数形结合的思想便可直接解答.

【解答】解: 由数轴上各数的位置可知 $\sqrt{2} > 1 > 0 > -1$.

故选: D.



【点评】此题主要考查了实数的大小的比较, 解答此题的关键是根据题意画出数轴, 由数轴上右边的数总比左边的大的特点解答.

2. 【分析】直接根据两角互补的定义进行解答即可.

【解答】解: $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle 1 = 70^\circ$,

$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

故选: C.

【点评】本题考查的是余角和补角, 熟知两角互补的定义是解答此题的关键.

3. 【分析】方程两边乘最简公分母 x , 可以把分式方程转化为整式方程求解.

【解答】解: 方程的两边同乘 x , 得

$$2+x-1=2x,$$

解得 $x=1$.

检验: 把 $x=1$ 代入 $x-1 \neq 0$.

$\therefore$ 原方程的解为: $x=1$.

故选: B.

【点评】本题考查了解分式方程, 解题的关键是注意:

(1) 解分式方程的基本思想是“转化思想”, 把分式方程转化为整式方程求解.

(2) 解分式方程一定注意要验根.

4. 【分析】 $2a^2 - 4a$ 中两项的公因式是 $2a$, 提取公因式即可分解.

【解答】解: $2a^2 - 4a = 2a(a-2)$.

故选: A.

【点评】本题考查了提公因式法分解因式，正确确定公因式是关键.

5. 【分析】根据概率公式用 1 除以卡片总数 4 即为所求的答案.

【解答】解：因为小明同学从中随机抽取一张卡片共有 4 种取法，

所以题号是“①”的概率是 $\frac{1}{4}$ ，

故选：B.

【点评】此题考查了概率公式，如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，

其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

6. 【分析】根据俯视图是从上面看到的视图进而得出答案即可.

【解答】解：竖直放置的圆柱体，从上面看是圆，

所以，俯视图是圆.

故选：D.

【点评】本题考查了简单几何体的三视图，熟练掌握圆柱体的三视图是解题的关键.

7. 【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】解：8063.6 万 $= 8063\ 6000 = 8.0636 \times 10^7$ ，

故选：C.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

8. 【分析】首先根据三角形中位线定理证得四边形 $AFDE$ 是平行四边形，然后由等腰三角形的性质证得该平行四边形的邻边相等.

【解答】解： $\because$ 边 BC 、 CA 的中点分别是 D 、 E ，

$\therefore$ 线段 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AB, DE \parallel AC.$$

$$\text{同理, } DF = \frac{1}{2}AC, DF \parallel AC.$$

又 $AB = AC$ ， $\angle A < 90^\circ$ ，

$$\therefore DE \parallel AF, DF \parallel AE, DE = DF,$$

$\therefore$ 四边形 $AFDE$ 是菱形.

故选：A.

【点评】本题考查了菱形的判定、等腰三角形的性质以及三角形中位线定理. 三角形中位线定理：三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半.

二. 填空题（本大题共 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分）

9. 【分析】根据负数的绝对值等于这个数的相反数，即可得出答案.

【解答】解： $|-3|=3$.

故答案为：3.

【点评】此题主要考查了绝对值的性质，正确记忆绝对值的性质是解决问题的关键.

10. 【分析】先根据平均每人植树 a 棵，得出 50 名学生植树的棵树，即可得出答案.

【解答】解： $\because$ 每人植树 a 棵，

$\therefore$ 50 名学生植树 $50a$ 棵，

$\therefore$ 该班一共植树 $50a$ 棵；

故答案为： $50a$.

【点评】此题考查了列代数式，解题的关键是读懂题意，列出代数式，是一道基础题.

11. 【分析】由于极差是一组数据中最大值与最小值的差，所以找出最大值与最小值即可求出极差.

【解答】解：根据图象得这组数据的最大值为 29，最小值为 25，

故极差为 $29 - 25 = 4$ ($^{\circ}\text{C}$).

故答案为： 4°C .

【点评】此题主要考查了极差的定义，极差反映了一组数据变化范围的大小，利用极差定义得出是解题关键.

12. 【分析】将点 $(1, -2)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 常数， $k \neq 0$)，即可得到关于 k 的方程，解答即可求出 k 的值.

【解答】解：将点 $(1, -2)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 得，

$k = xy = 1 \times (-2) = -2$,

故答案为： -2 .

【点评】本题主要考查反比例函数图象上点的坐标特征，所有在反比例函数上的点的横纵坐标的积应等于比例系数.

13. 【分析】根据一元一次方程的解法，移项，系数化为 1 即可得解.

【解答】解：移项得， $-2x > -4$ ，

系数化为1得， $x < 2$ ．

故答案为： $x < 2$ ．

【点评】本题考查了解简单不等式的能力，本题系数化为1时不等式的方向要改变．

14. 【分析】根据切线的性质推知 $\triangle OAB$ 是直角三角形，然后在直角三角形 OAB 中由勾股定理来求 OA 的长度．

【解答】解： $\because$ 直线 AB 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore OA \perp AB$ ，

$\therefore \angle OAB = 90^\circ$ ．

又 $OB = 5$ ， $AB = 4$ ，

$$\therefore OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

故答案是：3．

【点评】本题考查了切线的性质以及勾股定理．解题时利用了切线的性质——圆的切线垂直于经过切点的半径．

15. 【分析】根据网格图得到 $OD = OB = 2$ ， $OC = OA = 2\sqrt{2}$ ， $\angle DOB = 90^\circ$ ，由于 $\triangle OAB$ 绕点 O 按逆时针方向旋转，得到 $\triangle OCD$ ，则有 OB 与 OD 是对应边， OA 与 OC 是对应边，根据旋转的性质得到 $\angle COA$ 与 $\angle DOB$ 都等于旋转角，则 $\angle COA = \angle DOB = 90^\circ$ ．

【解答】解： $\because OD = OB = 2$ ， $OC = OA = 2\sqrt{2}$ ， $\angle DOB = 90^\circ$

而 $\triangle OAB$ 绕点 O 按逆时针方向旋转，得到 $\triangle OCD$ ，

$\therefore OB$ 与 OD 是对应边， OA 与 OC 是对应边，

$\therefore \angle COA = \angle DOB = 90^\circ$ ．

故答案为 90° ．

【点评】本题考查了旋转的性质：旋转前后两图形全等；对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角．也考查了正方形的性质．

16. 【分析】由 ED 是 BC 的垂直平分线，可得 $BE = CE$ ， $BD = CD$ ，又由在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，易证得 $\triangle AEC$ 是等边三角形，即可得 $AE = EC = AC = BE$ ．

【解答】解： $\because ED$ 是 BC 的垂直平分线，

$\therefore BE = CE$ ， $BD = CD$ ，

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle ECB = \angle B = 30^\circ, \angle A = 90^\circ - \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AEC$ 是等边三角形,

$$\therefore AE = EC = AC,$$

$$\therefore AE = AC = EC = BE.$$

$\therefore$ 图中两条相等的线段是: $BE = CE = AC = BE$ 或 $BD = CD$.

故答案为: 此题答案不唯一, 如 $BD = CD$ 等.

【点评】 此题考查了线段垂直平分线的性质、等边三角形的判定与性质以及含 30° 角的直角三角形的性质. 此题难度不大, 注意掌握数形结合思想的应用.

三. 解答题 (本大题共 3 个小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

17. **【分析】** 根据乘方的意义、二次根式的化简、负整数次幂的运算法则计算.

$$\text{【解答】解: 原式} = -4 - 3 \times \frac{1}{3}$$

$$= -4 - 1$$

$$= -5.$$

【点评】 本题考查了实数运算, 解题的关键是注意掌握有关运算法则.

18. **【分析】** 原式第一项利用单项式乘以多项式法则计算, 第二项利用平方差公式化简, 去括号合并得到最简结果, 将 x 的值代入化简后的式子中计算, 即可求出值.

$$\text{【解答】解: 原式} = x^2 + x - (x^2 - 1) = x^2 + x - x^2 + 1 = x + 1,$$

$$\text{当 } x = 2012 \text{ 时, 原式} = 2012 + 1 = 2013.$$

【点评】 此题考查了整式的混合运算 - 化简求值, 涉及的知识有: 平方差公式, 去括号法则, 以及合并同类项法则, 熟练掌握公式及法则是解本题的关键.

19. **【分析】** 根据 SAS 证 $\triangle AOD \cong \triangle COB$, 推出 $\angle A = \angle C$, 根据平行线的判定推出即可.

【解答】 证明: $\because AC, BD$ 交于点 O ,

$$\therefore \angle AOD = \angle COB,$$

在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COB$ 中,

$$\therefore \begin{cases} AO = CO \\ \angle AOD = \angle COB \\ OD = OB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB (SAS)$$

$$\therefore \angle A = \angle C,$$

$\therefore AD \parallel BC$.

【点评】 本题考查了平行线的判定和全等三角形的性质和判定，注意：全等三角形的判定定理有 SAS ， ASA ， AAS ， SSS 。

四、应用题（本大题共 3 个小题，第 20、21 题每小题 8 分，第 22 题 10 分，共 26 分）

20. **【分析】**（1）根据 A 组有 150 人，占总人数的 50%，据此即可求得总人数；

（2） 360° 乘以 B 组所占的比例即可求得圆心角；

（3）用 3000 人乘以 C 组所占的比例即可求解。

【解答】 解：（1） $150 \div 50\% = 300$ （名）。

答：这次调查问卷调查共调查了 300 名学生。

（2） $360^\circ \times 30\% = 108^\circ$ 。

答：在扇形统计图中，“ B ”所对应的扇形的圆心角度数是 108° 。

（3） $3000 \times (1 - 50\% - 30\%) = 600$ （人）。

答：估计该校“不注意解决用水”的学生人数为 600 人。

【点评】 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键。条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小。

21. **【分析】**（1）鸡蛋中蛋白质的质量 = 鸡蛋的重量 $\times$ 鸡蛋的蛋白质含量就可以直接求出答案；

（2）设每份营养餐中牛奶的质量为 x 克，则饼干的质量为 $(300 - 60 - x)$ 克，根据题意列出方程求出其解就可以

【解答】 解：（1）由题意得：

$60 \times 15\% = 9$ （克）。

答：一个鸡蛋中含蛋白质的质量为 9 克。

（2）设每份营养餐中牛奶的质量为 x 克，则饼干的质量为 $(300 - 60 - x)$ 克，由题意得：

$5\%x + 12.5\%(300 - 60 - x) + 60 \times 15\% = 300 \times 8\%$

解得： $x = 200$ 。

故饼干的质量为： $300 - 60 - x = 40$ （克）。

答：每份营养餐中牛奶和饼干的质量分别为 200 克和 40 克.

【点评】 本题考查了列一元一次方程解实际问题的运用，根据各种食品的蛋白质的和加起来等于总蛋白质就可以建立方程，在解答时确定等量关系是关键.

22. 【分析】 如图，过点 B 作 $BE \perp AD$ ，垂足为 E ，则四边形 $BCDE$ 为矩形，根据矩形的性质和解直角三角形求解即可.

【解答】 解：如图，过点 B 作 $BE \perp AD$ ，垂足为 E ，则四边形 $BCDE$ 为矩形.

$$\therefore DE = BC, \angle CBE = 90^\circ.$$

$$\because \angle ABC = 105^\circ, \therefore \angle ABE = 15^\circ.$$

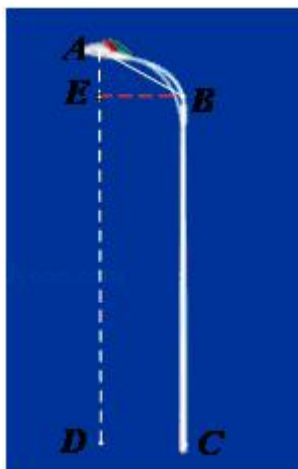
在 $\triangle ABE$ 中， $AB = 1.2$ ， $\angle ABE = 15^\circ$ ，

$$\therefore \sin 15^\circ = \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{1.2},$$

$$\therefore AE = 1.2 \times \sin 15^\circ \approx 1.2 \times 0.26 = 0.312$$

$$\therefore BC = DE = AD - AE = 7 - 0.312 = 6.688 \approx 6.7.$$

答：灯柱 BC 的高度约为 $6.7m$.



锦元数学工作室绘制

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用，解答此题的关键是作出辅助线，构造直角三角形，将求灯柱高的问题转化为解直角三角形的问题解答.

五、探究题（本大题 10 分）

23. 【分析】（1）把抛物线解析式整理成顶点式形式，然后即可得到顶点坐标；

（2）①先求出原抛物线与 x 轴的交点坐标，再根据向右平移横坐标加，纵坐标不变求出交点 A_1 、 A_2 的坐标即可；

②根据原抛物线的顶点坐标求出抛物线 C_n 的顶点坐标，然后利用顶点式解析式的形式写出即可.

【解答】解：(1) $\because y = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$,

$\therefore$ 抛物线 C_0 的顶点坐标为 $(1, -1)$;

(2) ①当 $y = 0$ 时, 则有 $x^2 - 2x = 0$, 解得: $x_1 = 0, x_2 = 2$,

则 $O(0, 0), A_1(2, 0)$,

$\therefore$ 将抛物线 C_0 向右平移 2 个单位, 得到抛物线 C_1 ,

$\therefore$ 此时抛物线 C_0 与 x 轴的交点 $O(0, 0), A_1(2, 0)$ 也随之向右平移 2 个单位,

$\therefore$ 抛物线 C_1 与 x 轴的交点 A_1, A_2 的坐标分别为: $A_1(2, 0), A_2(4, 0)$;

②抛物线 C_n 的顶点坐标为 $(1+2n, -1)$,

则抛物线 C_n 的解析式为: $y = [x - (1+2n)]^2 - 1$,

即 $y = x^2 - (4n+2)x + 4n^2 + 4n$.

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换, 利用点的坐标的移动解答图象的移动是解题的关键, 平移规律为“左加右减, 上加下减”.

六、综合题 (本大题 12 分)

24. 【分析】(1) A 与 C 关于 y 轴对称, 据此即可确定 C 的坐标;

(2) ①根据点 C 与点 A 关于 y 轴对称, 即可得到 $BC = BA$, 则 $\angle BCP = \angle MAP$, 再根据三角形的外角的性质即可证得 $\angle PMA = \angle BPC$, 从而证得两个三角形相似;

②首先求得 B 的坐标, 当 $\angle PBM = 90^\circ$ 时, 则有 $\triangle BPO \sim \triangle ABO$, 根据相似三角形的对应边的比相等, 即可求得 PO 的长, 求得 P 的坐标;

当 $\angle PMB = 90^\circ$ 时, 则 $\angle PMA = 90^\circ$ 时, $BP \perp AC$, 则此时点 P 与点 O 重合. 则 P 的坐标可以求得.

【解答】(1) 解: $\because A(4, 0)$, 且点 C 与点 A 关于 y 轴对称, $\therefore C(-4, 0)$.

(2) ①证明: $\because \angle BPM = \angle BAC$, 且 $\angle PMA = \angle BPM + \angle PBM$, $\angle BPC = \angle BAC + \angle PBM$,
 $\therefore \angle PMA = \angle BPC$.

又 $\because$ 点 C 与点 A 关于 y 轴对称, 且 $\angle BPM = \angle BAC$,

$\therefore \angle BCP = \angle MAP$.

$\therefore \triangle PBC \sim \triangle MPA$.

②存在.

解：∵ 直线 $y = -\frac{3}{4}x + b$ 与 x 轴相交于点 $A(4, 0)$,

∴ 把 $A(4, 0)$ 代入 $y = -\frac{3}{4}x + b$, 得: $b = 3$. ∴ $y = -\frac{3}{4}x + 3$. ∴ $B(0, 3)$.

当 $\angle PBM = 90^\circ$ 时, 则有 $\triangle BPO \sim \triangle ABO$

∴ $\frac{PO}{BO} = \frac{BO}{AO}$, 即 $\frac{PO}{3} = \frac{3}{4}$. ∴ $PO = \frac{9}{4}$ 即: $P_1(-\frac{9}{4}, 0)$.

当 $\angle PMB = 90^\circ$ 时, 则 $\angle PMA = 90^\circ$ (如图).

∴ $\angle PAM + \angle MPA = 90^\circ$.

∵ $\angle BPM = \angle BAC$,

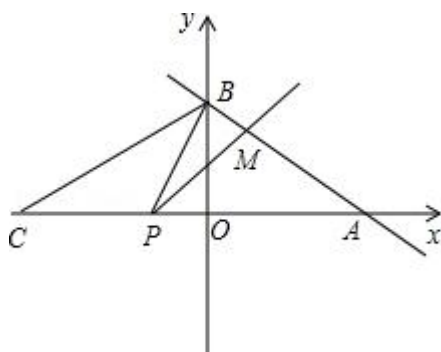
∴ $\angle BPM + \angle APM = 90^\circ$.

∴ $BP \perp AC$.

∵ 过点 B 只有一条直线与 AC 垂直,

∴ 此时点 P 与点 O 重合, 即: 符合条件的点 P_2 的坐标为: $P_2(0, 0)$.

∴ 使 $\triangle PBM$ 为直角三角形的点 P 有两个 $P_1(-\frac{9}{4}, 0)$, $P_2(0, 0)$.



【点评】 本题是一次函数与相似三角形的性质与判定的综合应用, 正确证明 $\triangle PBC \sim \triangle MPA$ 是关键.