

2012 年湖南省衡阳市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. (2012•衡阳) -3 的绝对值是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. -3 C. 3 D. $-\frac{1}{3}$

2. (2012•衡阳) 2012 年我省各级政府将总投入 594 亿元教育经费用于“教育强省”战略，将 594 亿元用于科学记数法（保留两个有效数字）表示为 ()

- A. 5.94×10^{10} B. 5.9×10^{10} C. 5.9×10^{11} D. 6.0×10^{10}

3. (2012•衡阳) 下列运算正确的是 ()

- A. $3a+2a=5a^2$ B. $(2a)^3=6a^3$ C. $(x+1)^2=x^2+1$ D. $x^2-4=(x+2)(x-2)$

4. (2012•衡阳) 函数 $y=\frac{2}{\sqrt{x+2}}$ 中自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x > -2$ B. $x \geq 2$ C. $x \neq -2$ D. $x \geq -2$

5. (2012•衡阳) 一个圆锥的三视图如图所示，则此圆锥的底面积为 ()



- A. $30\pi\text{cm}^2$ B. $25\pi\text{cm}^2$ C. $50\pi\text{cm}^2$ D. $100\pi\text{cm}^2$

6. (2012•衡阳) 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

- A. 等边三角形 B. 平行四边形 C. 正方形 D. 等腰梯形

7. (2012•衡阳) 为备战 2012 年伦敦奥运会，甲乙两位射击运动员在一次训练中的成绩为（单位：环）

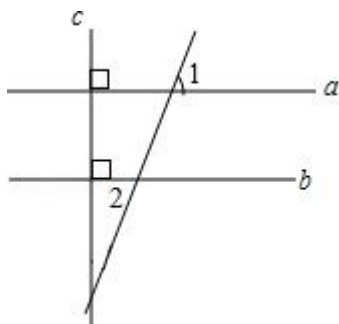
甲：9 10 9 8 10 9 8

乙：8 9 10 7 10 8 10

下列说法正确的是 ()

- A. 甲的中位数为 8 B. 乙的平均数为 9 C. 甲的众数为 9 D. 乙的极差为 2

8. (2012•衡阳) 如图，直线 $a \perp$ 直线 c ，直线 $b \perp$ 直线 c ，若 $\angle 1=70^\circ$ ，则 $\angle 2=$ ()



A. 70° B. 90° C. 110° D. 80°

9. (2012•衡阳) 掷两枚普通正六面体骰子, 所得点数之和为 11 的概率为 ()

A. $\frac{1}{18}$ B. $\frac{1}{36}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{15}$

10. (2012•衡阳) 已知 $\odot O$ 的直径等于 12cm, 圆心 O 到直线 l 的距离为 5cm, 则直线 l 与 $\odot O$ 的交点个数为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 无法确定

11. (2012•衡阳) 为了丰富同学们的课余生活, 体育委员小强到体育用品商店购羽毛球拍和乒乓球拍, 若购 1 副羽毛球拍和 1 副乒乓球拍共需 50 元, 小强一共用 320 元购买了 6 副同样的羽毛球拍和 10 副同样的乒乓球拍, 若设每副羽毛球拍为 x 元, 每副乒乓球拍为 y 元, 列二元一次方程组得 ()

A.
$$\begin{cases} x+y=50 \\ 6(x+y)=320 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x+y=50 \\ 6x+10y=320 \end{cases}$$

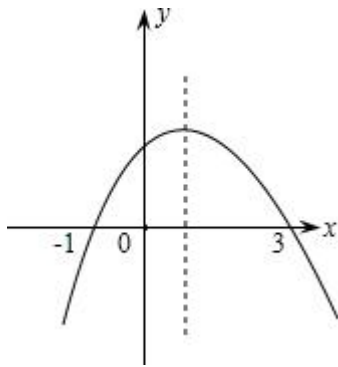
C.
$$\begin{cases} x+y=50 \\ 6x+y=320 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x+y=50 \\ 10x+6y=320 \end{cases}$$

12. (2012•衡阳) 如图为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象, 则下列说法:

① $a > 0$ ② $2a+b=0$ ③ $a+b+c > 0$ ④ 当 $-1 < x < 3$ 时, $y > 0$

其中正确的个数为 ()



A. 1

B. 2

C. 3

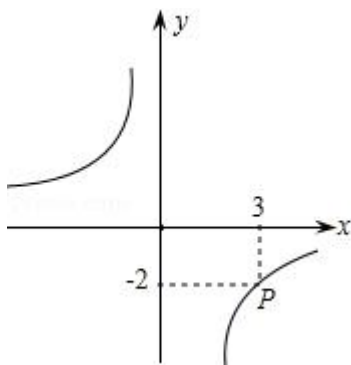
D. 4

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 满分 24 分)

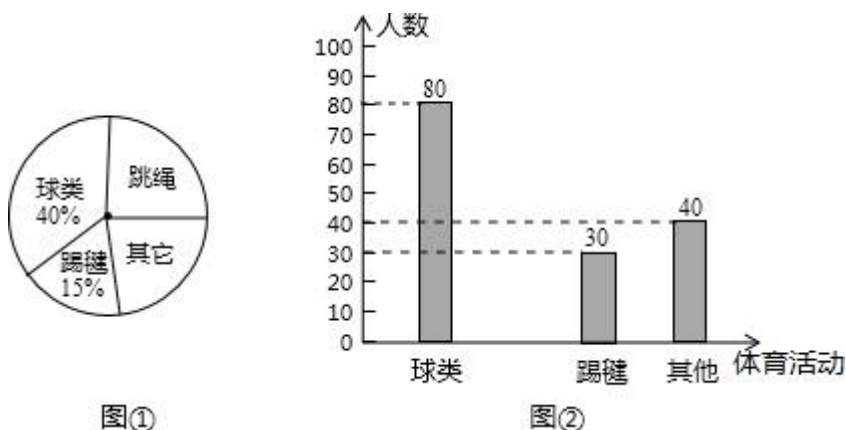
13. (2012•衡阳) 计算 $\sqrt{24} - \sqrt{18} \times \sqrt{\frac{1}{3}}$ = _____.

14. (2012•衡阳) 分式方程 $\frac{2}{x} = \frac{3}{x+1}$ 的解为 $x =$ _____.

15. (2012•衡阳) 如图, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 P , 则 $k =$ _____.

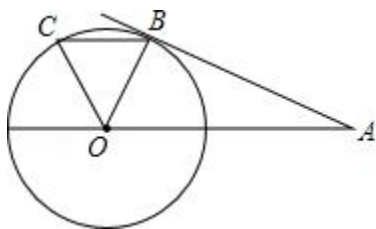


16. (2012•衡阳) 某校为了丰富学生的课外体育活动，欲增购一批体育器材，为此该校对一部分学生进行了一次题为“你喜欢的体育活动”的问卷调查（每人限选一项）
根据收集到的数据，绘制成如图的统计图（不完整）：

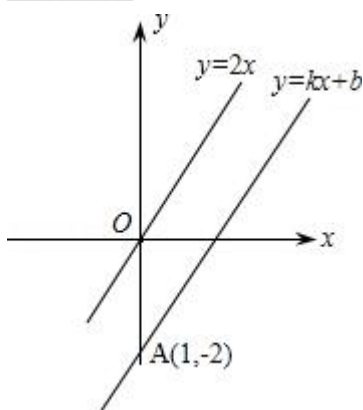


根据图中提供的信息得出“跳绳”部分学生共有_____人.

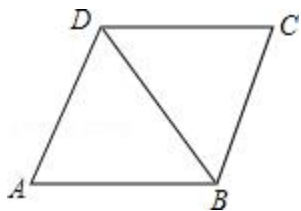
17. (2012•衡阳) 如图， $\odot O$ 的半径为 6cm，直线 AB 是 $\odot O$ 的切线，切点为点 B ，弦 $BC \parallel AO$ ，若 $\angle A = 30^\circ$ ，则劣弧 $\widehat{BC}$ 的长为_____cm.



18. (2012•衡阳) 如图，一次函数 $y=kx+b$ 的图象与正比例函数 $y=2x$ 的图象平行且经过点 $A(1, -2)$ ，则 $kb=$ _____.



19. (2012•衡阳) 如图, 菱形 ABCD 的周长为 20cm, 且 $\tan \angle ABD = \frac{4}{3}$, 则菱形 ABCD 的面积为 _____ cm^2 .



20. (2012•衡阳) 观察下列等式

$$\textcircled{1} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\textcircled{3} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

...

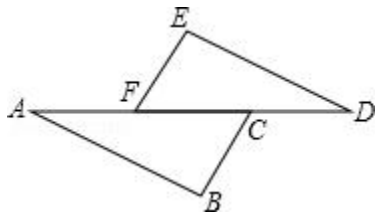
根据上述规律, 计算 $\sin^2 a + \sin^2 (90^\circ - a) =$ _____.

三、解答题 (本大题共 8 小题, 满分 60 分)

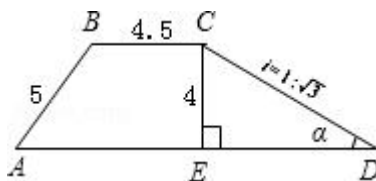
21. (2012•衡阳) 计算: $(-1)^{2012} - (-3) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \sqrt{9}$.

22. (2012•衡阳) 解不等式组 $\begin{cases} \frac{x+1}{3} > 0 & \textcircled{1} \\ 2(x+5) \geq 6(x-1) & \textcircled{2} \end{cases}$, 并把解集在数轴上表示出来.

23. (2012•衡阳) 如图, $AF=DC$, $BC \parallel EF$, 请只补充一个条件, 使得 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, 并说明理由.



24. (2012•衡阳) 如图, 一段河坝的横截面为梯形 ABCD, 试根据图中数据, 求出坝底宽 AD. ($i=CE:ED$, 单位: m)



25. (2012•衡阳) 在一个不透明的口袋里装有分别标有数字 1, 2, 3, 4 四个小球, 除数字不同外, 小球没有任何区别, 每次实验先搅拌均匀.

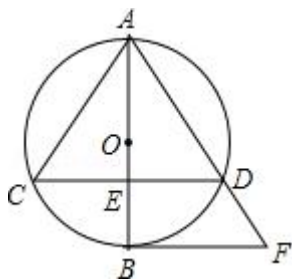
- (1) 若从中任取一球, 球上的数字为偶数的概率为多少?
- (2) 若从中任取一球 (不放回), 再从中任取一球, 请用画树状图或列表格的方法求出两个球上的数字之和为偶数的概率.
- (3) 若设计一种游戏方案: 从中任取两球, 两个球上的数字之差的绝对值为 1 为甲胜, 否则为乙胜, 请问这种游戏方案设计对甲、乙双方公平吗? 说明理由.

26. (2012•衡阳) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 动弦 CD 垂直 AB 于点 E, 过点 B 作直线 BF $\parallel$ CD 交 AD 的延长线于点 F, 若 AB=10cm.

(1) 求证: BF 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 若 AD=8cm, 求 BE 的长.

(3) 若四边形 CBFD 为平行四边形, 则四边形 ACBD 为何种四边形? 并说明理由.



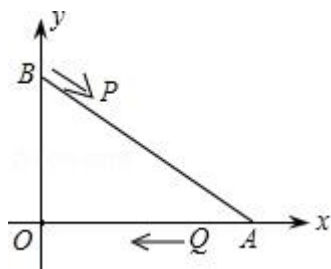
27. (2012•衡阳) 如图, A、B 两点的坐标分别是 (8, 0)、(0, 6), 点 P 由点 B 出发沿 BA 方向向点 A 作匀速直线运动, 速度为每秒 3 个单位长度, 点 Q 由 A 出发沿 AO (O 为坐标原点) 方向向点 O 作匀速直线运动, 速度为每秒 2 个单位长度, 连接 PQ, 若设运动时间为 t ($0 < t < \frac{10}{3}$) 秒. 解答如下问题:

(1) 当 t 为何值时, PQ $\parallel$ BO?

(2) 设 $\triangle AQP$ 的面积为 S,

①求 S 与 t 之间的函数关系式, 并求出 S 的最大值;

②若我们规定: 点 P、Q 的坐标分别为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 则新坐标 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 称为“向量 PQ”的坐标. 当 S 取最大值时, 求“向量 PQ”的坐标.



28. (2012•衡阳) 如图所示, 已知抛物线的顶点为坐标原点 O, 矩形 ABCD 的顶点 A, D 在抛物线上, 且 AD 平行 x 轴, 交 y 轴于点 F, AB 的中点 E 在 x 轴上, B 点的坐标为 (2, 1), 点 P (a, b) 在抛物线上运动. (点 P 异于点 O)

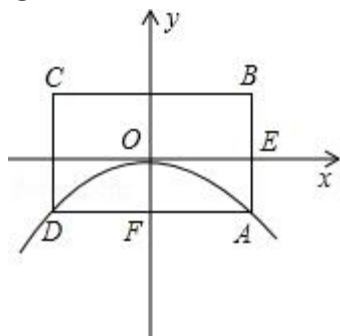
(1) 求此抛物线的解析式.

(2) 过点 P 作 CB 所在直线的垂线, 垂足为点 R,

①求证: PF=PR;

②是否存在点 P, 使得 $\triangle PFR$ 为等边三角形? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

③延长 PF 交抛物线于另一点 Q, 过 Q 作 BC 所在直线的垂线, 垂足为 S, 试判断 $\triangle RSF$ 的形状.



2012 年湖南省衡阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 3 分, 满分 36 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1.

考点: 绝对值.

分析: 根据绝对值的定义: 数轴上某个数与原点的距离叫做这个数的绝对值. 则 -3 的绝对值就是表示 -3 的点与原点的距离.

解答: 解: $|-3|=3$,

故选: C.

点评: 此题主要考查了绝对值, 关键是掌握: 一个正数的绝对值是它本身; 一个负数的绝对值是它的相反数; 0 的绝对值是 0.

2.

考点: 科学记数法与有效数字.

分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 有效数字是从左边第一个不是 0 的数字起后面所有的数字都是有效数字. 用科学记数法表示的数的有效数字只与前面的 a 有关, 与 10 的多少次方无关.

解答: 解: 根据题意先将 594 亿元写成 $594 \times 10^8 = 5.94 \times 10^{10}$ 元. 再用四舍五入法保留两个有效数字即得 5.9×10^{10} 元. 故选 B.

点评: 把一个数 M 记成 $a \times 10^n$ ($1 \leq |a| < 10$, n 为整数) 的形式, 这种记数的方法叫做科学记数法. 同时考查近似数及有效数字的概念.

【规律】

(1) 当 $|M| \geq 1$ 时, n 的值为 M 的整数位数减 1;

(2) 当 $|M| < 1$ 时, n 的相反数是第一个不是 0 的数字前 0 的个数, 包括整数位上的 0.

3.

考点: 完全平方公式; 合并同类项; 幂的乘方与积的乘方; 平方差公式.

专题: 计算题.

分析: 根据合并同类项、幂的乘方及完全平方公式的知识, 分别运算各选项, 从而可得出答案.

解答: 解: A、 $3a+2a=5a$, 故本选项错误;

B、 $(2a)^3=8a^3$, 故本选项错误;

C、 $(x+1)^2=x^2+2x+1$, 故本选项错误;

D、 $x^2-4=(x+2)(x-2)$, 故本选项正确;

故选 D.

点评: 此题考查了完全平方公式、合并同类项及平方差公式, 涉及的知识点较多, 难度一般, 注意掌握各个运算的法则是关键.

4.

考点: 函数自变量的取值范围.

专题: 常规题型.

分析: 根据被开方数大于等于 0, 分母不等于 0 列式计算即可得解.

解答: 解: 根据题意得, $x+2 > 0$,

解得 $x > -2$.

故选 A.

点评: 本题考查的知识点为: 分式有意义, 分母不为 0; 二次根式的被开方数是非负数.

5.

考点：圆锥的计算；由三视图判断几何体。

分析：根据主视图与左视图可以得到：圆锥的底面直径是 10cm，利用圆的面积公式即可求解。

解答：解：根据主视图与左视图可以得到：圆锥的底面直径是 10cm，

则此圆锥的底面积为： $\pi \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25\pi \text{cm}^2$ 。

故选 B。

点评：本题考查了圆锥的三视图，正确理解三视图得到：根据主视图与左视图可以得到：圆锥的底面直径是 10cm 是关键。

6.

考点：中心对称图形；轴对称图形。

分析：根据中心对称图形的定义：旋转 180°后能够与原图形完全重合即是中心对称图形，以及轴对称图形的定义即可判断出。

解答：解：A、不是中心对称图形，是轴对称图形，故此选项错误；

B、是中心对称图形，不是轴对称图形，故此选项错误；

C、是中心对称图形，也是轴对称图形，故此选项正确；

D、不是中心对称图形，是轴对称图形，故此选项错误。

故选 C。

点评：此题主要考查了中心对称图形与轴对称的定义，关键是掌握掌握中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合。

7.

考点：极差；算术平均数；中位数；众数。

分析：分别计算两组数据的众数、平均数、中位数及极差后，选择正确的答案即可。

解答：解：甲：9，10，9，8，10，9，8

A. $\therefore$ 排序后为：8，8，9，9，9，10，10

$\therefore$ 中位数为：9；故此选项错误；

C. 9 出现了 3 次，最多，

$\therefore$ 众数为 9，故此选项正确；

乙：8，9，10，7，10，8，10，

B. $(8+9+10+7+10+8+10) \div 7 = \frac{62}{7} \neq 9$ ，故此选项错误；

D. 极差是 $10 - 7 = 3$ ，故此选项错误；

故选：C。

点评：此题主要考查了平均数、众数、中位数及极差的知识，解题时分别计算出众数、中位数、平均数及极差后找到正确的选项即可。

8.

考点：平行线的判定与性质；对顶角、邻补角；直角三角形的性质。

分析：首先根据垂直于同一条直线的两直线平行可得 $a \parallel b$ ，再根据两直线平行同位角相等可得 $\angle 1 = \angle 3$ 。根据对顶角相等可得 $\angle 2 = \angle 3$ ，利用等量代换可得到 $\angle 2 = \angle 1 = 70^\circ$ 。

解答：解： $\because$ 直线 $a \perp$ 直线 c ，直线 $b \perp$ 直线 c ，

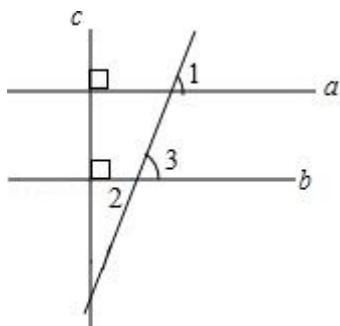
$\therefore a \parallel b$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 3$ ，

$\because \angle 3 = \angle 2$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle 1 = 70^\circ$ 。

故选：A。



点评: 此题主要考查了平行线的判定与性质，关键是掌握平行线的判定方法与性质定理.

9.

考点: 列表法与树状图法.

分析: 首先根据题意列表，然后根据表格求得所有等可能的情况与所得点数之和为 11 的情况，然后利用概率公式求解即可求得答案.

解答: 解：列表得：

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

∴ 所得点数之和为 11 的概率为： $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

故选 A.

点评: 此题考查的是用列表法或树状图法求概率的知识. 注意列表法与树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件.

10.

考点: 直线与圆的位置关系.

分析: 首先求得该圆的半径，再根据直线和圆的位置关系与数量之间的联系进行分析判断. 若 $d < r$ ，则直线与圆相交；若 $d = r$ ，则直线与圆相切；若 $d > r$ ，则直线与圆相离，进而利用直线与圆相交有两个交点，相切有一个交点，相离没有交点，即可得出答案.

解答: 解：根据题意，得

该圆的半径是 6cm，即大于圆心到直线的距离 5cm，则直线和圆相交，

故直线 l 与 $\odot O$ 的交点个数为 2.

故选：C.

点评: 此题主要考查了直线与圆的位置关系，这里要特别注意 12 是圆的直径；掌握直线和圆的位置关系与数量之间的联系是解题的关键.

11.

考点: 由实际问题抽象出二元一次方程组.

专题: 应用题.

分析: 分别根据等量关系：购 1 副羽毛球拍和 1 副乒乓球拍共需 50 元，用 320 元购买了 6 副同样的羽毛球拍和 10 副同样的乒乓球拍，可得出方程，联立可得出方程组.

解答: 解：由题意得，
$$\begin{cases} x+y=50 \\ 6x+10y=320 \end{cases}$$

故选 B.

点评: 此题考查了由实际问题抽象二元一次方程组的知识，属于基础题，关键是仔细审题得出两个等量关系，建立方程组.

12.

考点：二次函数图象与系数的关系。

分析：由抛物线的开口方向判断 a 与 0 的关系，由 $x=1$ 时的函数值判断 $a+b+c>0$ ，然后根据对称轴推出 $2a+b$ 与 0 的关系，根据图象判断 $-1<x<3$ 时， y 的符号。

解答：解：①图象开口向下，能得到 $a<0$ ；

②对称轴在 y 轴右侧， $x=\frac{-1+3}{2}=1$ ，则有 $-\frac{b}{2a}=1$ ，即 $2a+b=0$ ；

③当 $x=1$ 时， $y>0$ ，则 $a+b+c>0$ ；

④由图可知，当 $-1<x<3$ 时， $y>0$ 。

故选 C。

点评：本题主要考查图象与二次函数系数之间的关系，会利用对称轴的范围求 $2a$ 与 b 的关系，以及二次函数与方程之间的转换，根的判别式的熟练运用。

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分）

13.

考点：二次根式的混合运算。

分析：首先化简第一个二次根式，计算后边的两个二次根式的积，然后合并同类二次根式即可求解。

解答：解：原式 $=2\sqrt{6}-\sqrt{6}=\sqrt{6}$ ，
故答案是： $\sqrt{6}$

点评：本题考查了二次根式的混合运算，正确运用二次根式的乘法简化了运算，正确观察式子的特点是关键。

14.

考点：解分式方程。

分析：观察可得最简公分母是 $x(x+1)$ ，方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解。

解答：解：去分母得： $2(x+1)=3x$ ，
去括号得： $2x+2=3x$ ，
移项得： $2x-3x=-2$ ，
合并同类项得： $-x=-2$ ，
把 x 的系数化为 1 得： $x=2$ ，
检验：把 $x=2$ 代入最简公分母 $x(x+1)=6\neq 0$ ，
故原分式方程的解为： $x=2$ 。
故答案为：2。

点评：此题主要考查了解分式方程，解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解；解分式方程一定要注意要验根。

15.

考点：待定系数法求反比例函数解析式。

分析：首先根据图象写出 P 点坐标，再利用待定系数法把 P 点坐标代入反比例函数解析式中即可得到 k 的值。

解答：解：根据图象可得 P (3, -2)，
把 P (3, -2) 代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中得：

$$k=xy=-6,$$

故答案为：-6。

点评：此题主要考查了待定系数法求反比例函数解析式，凡是图象经过的点都能满足解析式。

16.

考点：条形统计图；扇形统计图。

分析：先求得总人数，然后用总人数减去其他各个小组的频数即可。

解答：解： $\because$ 从条形统计图知喜欢球类的有 80 人，占 40%
 $\therefore$ 总人数为 $80\div 40\%=200$ 人
 $\therefore$ 喜欢跳绳的有 $200-80-30-40=50$ 人，

故答案为 50.

点评: 本题考查了条形统计图及扇形统计图的知识, 解题的关键是从两种统计图中整理出进一步解题的有关信息.

考点: 弧长的计算; 等边三角形的判定与性质; 切线的性质.

专题: 数形结合.

分析: 根据切线的性质可得出 $OB \perp AB$, 继而求出 $\angle BOA$ 的度数, 利用弦 $BC \parallel AO$, 及 $OB=OC$ 可得出 $\angle BOC$ 的度数, 代入弧长公式即可得出答案.

解答: 解: $\because$ 直线 AB 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore OB \perp AB,$$

$$\text{又} \because \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOA = 60^\circ,$$

$$\because \text{弦 } BC \parallel AO, OB = OC,$$

$$\therefore \triangle OBC \text{ 是等边三角形,}$$

$$\text{即可得 } \angle BOC = 60^\circ,$$

$$\therefore \text{劣弧 } \widehat{BC} \text{ 的长} = \frac{60\pi R}{180} = 2\pi \text{cm}.$$

故答案为: 2π .

点评: 此题考查了弧长的计算公式、切线的性质, 根据切线的性质及圆的性质得出 $\triangle OBC$ 是等边三角形是解答本题的关键, 另外要熟练记忆弧长的计算公式.

18.

考点: 两条直线相交或平行问题.

分析: 根据两条平行直线的解析式的 k 值相等求出 k 的值, 然后把点 A 的坐标代入解析式求出 b 值, 再代入代数式进行计算即可.

解答: 解: $\because y=kx+b$ 的图象与正比例函数 $y=2x$ 的图象平行,

$$\therefore k=2,$$

$$\because y=kx+b \text{ 的图象经过点 } A(1, -2),$$

$$\therefore 2+b=-2,$$

$$\text{解得 } b=-4,$$

$$\therefore kb=2 \times (-4) = -8.$$

故答案为: -8 .

点评: 本题考查了两直线平行的问题, 根据两平行直线的解析式的 k 值相等求出 $k=2$ 是解题的关键.

19.

考点: 菱形的性质; 解直角三角形.

专题: 数形结合.

分析: 连接 AC 交 BD 于点 O , 则可设 $BO=3x$, $AO=4x$, 继而在 $RT\triangle ABO$ 中利用勾股定理求出 AB , 结合菱形的周长为 20cm 可得出 x 的值, 再由菱形的面积等于对角线乘积的一半即可得出答案.

解答: 解: 连接 AC 交 BD 于点 O ,

$$\text{则 } AC \perp BD, AO=OC, BO=DO,$$

$$\text{设 } BO=3x, AO=4x,$$

$$\text{则 } AB=5x,$$

$$\text{又} \because \text{菱形 } ABCD \text{ 的周长为 } 20\text{cm},$$

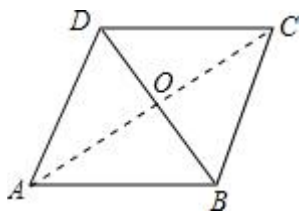
$$\therefore 4 \times 5x = 20\text{cm},$$

$$\text{解得: } x=1,$$

$$\text{故可得 } AO=4, BO=3, AC=2AO=8\text{cm}, BD=2BO=6\text{cm},$$

$$\text{故可得 } \frac{1}{2}AC \times BD = 24\text{cm}^2.$$

故答案为: 24 .



点评: 此题考查了菱形的性质，掌握菱形的对角线互相垂直且平分的性质，及菱形的面积等于对角线乘积的一半是解答本题的关键。

20.

考点: 互余两角三角函数的关系。

专题: 规律型。

分析: 根据①②③可得出规律，即 $\sin^2 a + \sin^2 (90^\circ - a) = 1$ ，继而可得出答案。

解答: 解：由题意得， $\sin^2 30^\circ + \sin^2 (90^\circ - 30^\circ) = 1$ ；

$$\sin^2 45^\circ + \sin^2 (90^\circ - 45^\circ) = 1;$$

$$\sin^2 60^\circ + \sin^2 (90^\circ - 60^\circ) = 1;$$

$$\text{故可得 } \sin^2 a + \sin^2 (90^\circ - a) = 1.$$

故答案为：1.

点评: 此题考查了互余两角的三角函数的关系，属于规律型题目，注意根据题意总结，另外 $\sin^2 a + \sin^2 (90^\circ - a) = 1$ 是个恒等式，同学们可以记住并直接运用。

三、解答题（本大题共 8 小题，满分 60 分）

21.

考点: 实数的运算；负整数指数幂。

专题: 计算题。

分析: 分别计算负整数指数幂、二次根式的化简，然后合并即可得出答案。

解答: 解：原式 $= 1 + 3 - 2 + 3 = 5$ 。

点评: 此题考查了实数的运算，关键是掌握各部分的运算法则，属于基础题，注意细心运算。

22.

考点: 解一元一次不等式组；在数轴上表示不等式的解集。

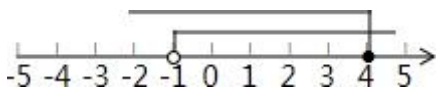
专题: 探究型。

分析: 分别求出各不等式的解集，再求出其公共解集，并在数轴上表示出来即可。

解答: 解：∵ 由①得， $x > -1$ ；由②得， $x \leq 4$ ，

$$\therefore \text{此不等式组的解集为：} -1 < x \leq 4,$$

在数轴上表示为：



点评: 本题考查的是在数轴上表示一元一次不等式组的解集，熟知实心圆点与空心圆点的区别是解答此题的关键。

23.

考点: 全等三角形的判定。

专题: 开放型。

分析: 首先由 $AF = DC$ 可得 $AC = DF$ ，再由 $BC \parallel EF$ 根据两直线平行，内错角相等可得 $\angle EFD = \angle BCA$ ，再加上条件 $EF = BC$ 即可利用 SAS 证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

解答: 解：补充条件： $EF = BC$ ，可使得 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。理由如下：

$$\because AF = DC,$$

$$\therefore AF + FC = DC + FC,$$

$$\text{即：} AC = DF,$$

$$\because BC \parallel EF,$$

$$\therefore \angle EFD = \angle BCA,$$

在 $\triangle EFD$ 和 $\triangle BCA$ 中,
$$\begin{cases} EF=BC \\ \angle EFD=\angle BCA, \\ EF=BC \end{cases}$$

 $\therefore \triangle EFD \cong \triangle BCA$ (SAS).

点评: 此题主要考查了全等三角形的判定, 关键是熟练掌握判定定理: SSS、SAS、ASA、AAS、HL.

24.

考点: 解直角三角形的应用-坡度坡角问题.

分析: 作 $BF \perp AD$ 于点F, 在直角 $\triangle ABF$ 中利用勾股定理即可求得AF的长, 在直角 $\triangle CED$ 中, 利用坡比的定义即可求得ED的长度, 进而即可求得AD的长.

解答: 解: 作 $BF \perp AD$ 于点F. 则 $BF=CE=4m$,

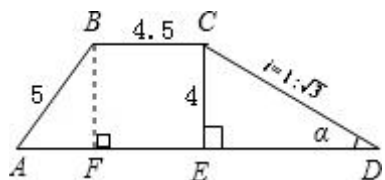
在直角 $\triangle ABF$ 中, $AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3m$,

在直角 $\triangle CED$ 中, 根据 $i = \frac{CE}{ED}$,

则 $ED = \frac{CE}{i} = \frac{4}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 4\sqrt{3}m$.

则 $AD = AF + EF + ED = 3 + 4.5 + 4\sqrt{3} = (7.5 + 4\sqrt{3})m$.

答: 坝底宽AD为 $(7.5 + 4\sqrt{3})m$.



点评: 本题考查了坡度坡角的问题, 把梯形的计算通过作高线转化成直角三角形的计算是解决本题的基本思路.

25.

考点: 游戏公平性; 概率公式; 列表法与树状图法.

分析: (1) 由不透明的口袋里装有分别标有数字1, 2, 3, 4四个小球, 球上的数字为偶数的是2与4, 利用概率公式即可求得答案;

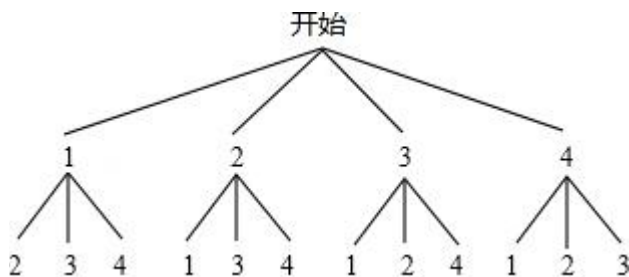
(2) 首先画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与两个球上的数字之和为偶数的情况, 利用概率公式即可求得答案;

(3) 分别求得甲胜与乙胜的概率, 比较概率, 即可得出结论.

解答: 解: (1) $\because$ 不透明的口袋里装有分别标有数字1, 2, 3, 4四个小球, 球上的数字为偶数的是2与4,

$\therefore$ 从中任取一球, 球上的数字为偶数的概率为: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

(2) 画树状图得:



$\therefore$ 共有12种等可能的结果, 两个球上的数字之和为偶数的有(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)共4种情况,

$\therefore$ 两个球上的数字之和为偶数的概率为: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$;

(3) $\because$ 两个球上的数字之差的绝对值为 1 的有 (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3) 共 4 种情况,

$$\therefore P(\text{甲胜}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, P(\text{乙胜}) = \frac{2}{3},$$

$\therefore P(\text{甲胜}) \neq P(\text{乙胜})$,

$\therefore$ 这种游戏方案设计对甲、乙双方不公平.

点评: 本题考查的是游戏公平性的判断. 判断游戏公平性就要计算每个事件的概率, 概率相等就公平, 否则就不公平.

26.

考点: 切线的判定; 勾股定理; 垂径定理; 圆周角定理; 相似三角形的判定与性质.

专题: 几何综合题.

分析: (1) 欲证明 BF 是 $\odot O$ 的切线, 只需证明 $AB \perp BF$ 即可;

(2) 连接 BD, 在直角三角形 ABD 中, 利用射影定理可以求得 AE 的长度, 最后结合图形知 $BE = AB - AE$;

(3) 连接 BC. 四边形 CBFD 为平行四边形, 则四边形 ACBD 是正方形. 根据平行四边形的对边平行、平行线的性质、圆周角定理以及同弧所对的圆周角相等可以推知 $\angle CAD = \angle BDA = 90^\circ$, 即 CD 是 $\odot O$ 的直径, 然后由全等三角形的判定与性质推知 $AC = BD$; 根据正方形的判定定理证得四边形 ACBD 是正方形.

解答: 解: (1) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $CD \perp AB$, $BF \parallel CD$,

$\therefore BF \perp AB$, 即 BF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 如图 1, 连接 BD.

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$ (直径所对的圆周角是直角);

又 $\because DE \perp AB$

$\therefore AD^2 = AE \cdot AB$;

$\because AD = 8\text{cm}$, $AB = 10\text{cm}$,

$AE = 6.4\text{cm}$,

$\therefore BE = AB - AE = 3.6\text{cm}$;

(3) 连接 BC.

四边形 CBFD 为平行四边形, 则四边形 ACBD 是正方形. 理由如下:

$\because$ 四边形 CBFD 为平行四边形,

$\therefore BC \parallel FD$, 即 $BC \parallel AD$;

$\therefore \angle BCD = \angle ADC$ (两直线平行, 内错角相等),

$\because \angle BCD = \angle BAD$, $\angle CAB = \angle CDB$, (同弧所对的圆周角相等),

$\therefore \angle CAB + \angle BAD = \angle CDB + \angle ADC$, 即 $\angle CAD = \angle BDA$;

又 $\because \angle BDA = 90^\circ$ (直径所对的圆周角是直角),

$\therefore \angle CAD = \angle BDA = 90^\circ$,

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的直径, 即点 E 与点 O 重合 (或线段 CD 过圆形 O), 如图 2,

在 $\triangle OBC$ 和 $\triangle ODA$ 中,

$$\because \begin{cases} OC = OD \\ \angle COB = \angle DOA = 90^\circ \\ OB = OA \end{cases},$$

$\therefore \triangle OBC \cong \triangle ODA$ (SAS),

$\therefore BC = DA$ (全等三角形的对应边相等),

$\therefore$ 四边形 ACBD 是平行四边形 (对边平行且相等的四边形是平行四边形);

$\because \angle ACB = 90^\circ$ (直径所对的圆周角是直角), $AC = AD$,

$\therefore$ 四边形 ACBD 是正方形.

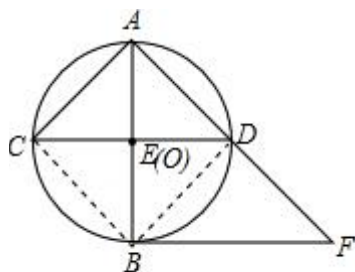


图2

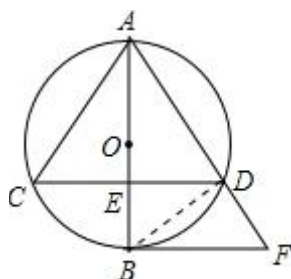


图1

点评: 本题综合考查了切线的判定、全等三角形的判定与性质、圆周角定理、垂径定理等知识点. 要证某线是圆的切线, 已知此线过圆上某点, 连接圆心与这点 (即为半径), 再证垂直即可.

27.

考点: 平行线分线段成比例; 二次函数的最值; 勾股定理; 三角形中位线定理.

专题: 代数几何综合题; 动点型.

分析: (1) 如图①所示, 当 $PQ \parallel BO$ 时, 利用平行线分线段成比例定理, 列线段比例式 $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AO}$, 求出 t 的值;

(2) ①求 S 关系式的要点是求得 $\triangle AQP$ 的高, 如图②所示, 过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D , 构造平行线 $PD \parallel BO$, 由线段比例关系 $\frac{AP}{AB} = \frac{PD}{OB}$ 求得 PD , 从而 S 可求出. S 与 t 之间的函数关系式是一个关于 t 的

二次函数, 利用二次函数求极值的方法求出 S 的最大值;

②本问关键是求出点 P 、 Q 的坐标. 当 S 取最大值时, 可推出此时 PD 为 $\triangle OAB$ 的中位线, 从而可求出点 P 的纵横坐标, 又易求 Q 点坐标, 从而求得点 P 、 Q 的坐标; 求得 P 、 Q 的坐标之后, 代入“向量 PQ ”坐标的定义 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, 即可求解.

解答: 解: (1) $\because A$ 、 B 两点的坐标分别是 $(8, 0)$ 、 $(0, 6)$, 则 $OB=6$, $OA=8$,

$$\therefore AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

如图①, 当 $PQ \parallel BO$ 时, $AQ=2t$, $BP=3t$, 则 $AP=10-3t$.

$$\because PQ \parallel BO, \therefore \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AO}, \text{ 即 } \frac{10-3t}{10} = \frac{2t}{8}, \text{ 解得 } t = \frac{20}{11},$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{20}{11} \text{ 秒时, } PQ \parallel BO.$$

(2) 由 (1) 知: $OA=8$, $OB=6$, $AB=10$.

①如图②所示, 过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D , 则 $PD \parallel BO$,

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{PD}{OB}, \text{ 即 } \frac{10-3t}{10} = \frac{PD}{6}, \text{ 解得 } PD = 6 - \frac{9}{5}t.$$

$$S = \frac{1}{2}AQ \cdot PD = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot \left(6 - \frac{9}{5}t\right) = 6t - \frac{9}{5}t^2 = -\frac{9}{5}\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + 5,$$

$$\therefore S \text{ 与 } t \text{ 之间的函数关系式为: } S = -\frac{9}{5}\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + 5 \quad \left(0 < t < \frac{10}{3}\right),$$

当 $t = \frac{5}{3}$ 秒时, S 取得最大值, 最大值为 5 (平方单位).

②如图②所示, 当 S 取最大值时, $t=\frac{5}{3}$,

$\therefore PD=6-\frac{9}{5}t=3$, $\therefore PD=\frac{1}{2}BO$, 又 $PD \parallel BO$,

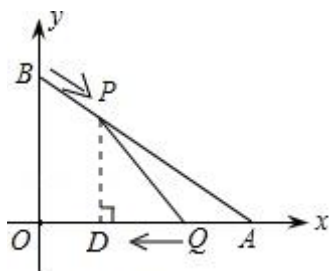
$\therefore$ 此时 PD 为 $\triangle OAB$ 的中位线, 则 $OD=\frac{1}{2}OA=4$,

$\therefore P(4, 3)$.

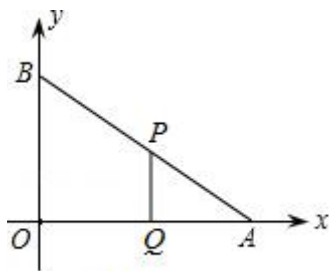
又 $AQ=2t=\frac{10}{3}$, $\therefore OQ=OA-AQ=\frac{14}{3}$, $\therefore Q(\frac{14}{3}, 0)$.

依题意, “向量 PQ ”的坐标为 $(\frac{14}{3}-4, 0-3)$, 即 $(\frac{2}{3}, -3)$.

$\therefore$ 当 S 取最大值时, “向量 PQ ”的坐标为 $(\frac{2}{3}, -3)$.



图②



图①

点评: 本题是典型的动点型问题, 解题过程中, 综合利用了平行线分线段成比例定理 (或相似三角形的判定与性质)、勾股定理、二次函数求极值及三角形中位线性质等知识点. 第 (2) ② 问中, 给出了“向量 PQ ”的坐标的新定义, 为题目增添了新意, 不过同学们无须为此迷惑, 求解过程依然是利用自己所熟悉的数学知识.

28.

考点: 二次函数综合题.

专题: 代数几何综合题; 数形结合.

分析: (1) 根据题意能判断出点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线交点, 因此 D 、 B 关于原点对称, A 、 C 关于 x 轴对称, 得到 A 、 D 的坐标后, 利用待定系数法可确定抛物线的解析式.

(2) ①首先根据抛物线的解析式, 用一个未知数表示出点 P 的坐标, 然后表示出 PF 、 RF 的长, 两者进行比较即可得证;

②首先表示 RF 的长, 若 $\triangle PFR$ 为等边三角形, 则满足 $PF=PR=FR$, 列式求解即可;

③根据①的思路, 不难看出 $QF=QS$, 若连接 SF 、 RF , 那么 $\triangle QSF$ 、 $\triangle PRF$ 都是等腰三角形, 先用 $\angle SQF$ 、 $\angle RPF$ 表示出 $\angle DFS$ 、 $\angle RFP$ 的和, 用 180° 减去这个和值即可判断出 $\triangle RSF$ 的形状.

解答: 解: (1) $\because$ 抛物线的顶点为坐标原点,

$\therefore A$ 、 D 关于抛物线的对称轴对称;

$\because E$ 是 AB 的中点,

$\therefore O$ 是矩形 $ABCD$ 对角线的交点, 又 $B(2, 1)$

$\therefore A(2, -1)$ 、 $D(-2, -1)$;

由于抛物线的顶点为 $(0, 0)$, 可设其解析式为: $y=ax^2$, 则有:

$$4a = -1, a = -\frac{1}{4}$$

∴ 抛物线的解析式为: $y = -\frac{1}{4}x^2$.

(2) ①证明: 由抛物线的解析式知: $P(a, -\frac{1}{4}a^2)$, 而 $R(a, 1)$ 、 $F(0, -1)$, 则:

$$\text{则: } PF = \sqrt{(a-0)^2 + (-\frac{1}{4}a^2+1)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}a^4 + \frac{1}{2}a^2 + 1} = \frac{1}{4}a^2 + 1,$$

$$PR = \sqrt{(a-a)^2 + (-\frac{1}{4}a^2-1)^2} = \frac{1}{4}a^2 + 1.$$

∴ $PF = PR$.

$$\text{②由①得: } RF = \sqrt{a^2 + 4};$$

若 $\triangle PFR$ 为等边三角形, 则 $RF = PF = FR$, 得:

$$\sqrt{a^2 + 4} = \frac{1}{4}a^2 + 1, \text{ 即: } \frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{2}a^2 - 3 = 0, \text{ 得:}$$

$$a^2 = -4 \text{ (舍去)}, a^2 = 12;$$

$$\therefore a = \pm 2\sqrt{3}, -\frac{1}{4}a^2 = -3;$$

∴ 存在符合条件的 P 点, 坐标为 $(2\sqrt{3}, -3)$ 、 $(-2\sqrt{3}, -3)$.

③同①可证得: $QF = QS$;

在等腰 $\triangle SQF$ 中, $\angle 1 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle SQF)$;

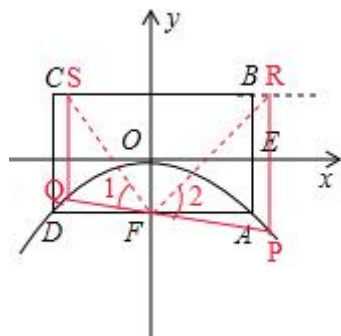
同理, 在等腰 $\triangle RPF$ 中, $\angle 2 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle RPF)$;

∵ $QS \perp BC$ 、 $PR \perp BC$,

∴ $QS \parallel PR$, $\angle SQP + \angle RPF = 180^\circ$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle SQF - \angle RPF) = 90^\circ$$

∴ $\angle SFR = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 90^\circ$, 即 $\triangle SFR$ 是直角三角形.



点评: 该题考查了二次函数的性质及解析式的确定、矩形的性质、特殊三角形的判定等知识, 综合性较强. 在解答题目时, 要注意数形结合, 并灵活应用前面小题中证得的结论.