

## 2012 年湖南省怀化市中考数学试卷

### 一、选择题（共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分）

1. (3 分) 64 的立方根是 ( )

- A. 4                      B.  $\pm 4$                       C. 8                      D.  $\pm 8$

2. (3 分) 在我们的生活中，常见到很多美丽的图案，下列图案中，既是中心对称，又是轴对称图形的是 ( )



3. (3 分) 已知  $a < b$ ，下列式子不成立的是 ( )

- A.  $a+1 < b+1$                       B.  $3a < 3b$   
C.  $-\frac{1}{2}a > -\frac{1}{2}b$                       D. 如果  $c < 0$ ，那么  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

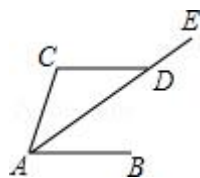
4. (3 分) 在平面直角坐标系中，点  $(-3, 3)$  所在的象限是 ( )

- A. 第一象限                      B. 第二象限                      C. 第三象限                      D. 第四象限

5. (3 分) 在函数  $y = \sqrt{2x-3}$  中，自变量  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $x > \frac{3}{2}$                       B.  $x \leq \frac{3}{2}$                       C.  $x \neq \frac{3}{2}$                       D.  $x \geq \frac{3}{2}$

6. (3 分) 如图，已知  $AB \parallel CD$ ， $AE$  平分  $\angle CAB$ ，且交于点  $D$ ， $\angle C = 110^\circ$ ，则  $\angle EAB$  为 ( )



- A.  $30^\circ$                       B.  $35^\circ$                       C.  $40^\circ$                       D.  $45^\circ$

7. (3 分) 为了比较甲乙两种水稻秧苗是否出苗更整齐，每种秧苗各取 10 株分别量出每株长度，发现两组秧苗的平均长度一样，甲、乙方差分别是 3.9、15.8，则下列说法正确的是 ( )

- A. 甲秧苗出苗更整齐                      B. 乙秧苗出苗更整齐  
C. 甲、乙出苗一样整齐                      D. 无法确定

8. (3分) 等腰三角形的底边长为 6, 底边上的中线长为 4, 它的腰长为 ( )

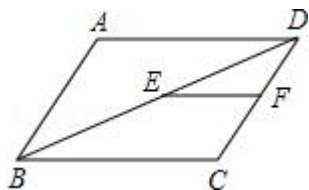
- A. 7                      B. 6                      C. 5                      D. 4

## 二、填空题

9. (3分) 分解因式:  $x^2 - xy + xz - yz =$  \_\_\_\_\_.

10. (3分) 当  $x = 1$ ,  $y = \frac{1}{5}$  时,  $3x(2x+y) - 2x(x-y) =$  \_\_\_\_\_.

11. (3分) 如图, 在  $\square ABCD$  中,  $AD = 8$ , 点  $E$ 、 $F$  分别是  $BD$ 、 $CD$  的中点, 则  $EF =$  \_\_\_\_\_.

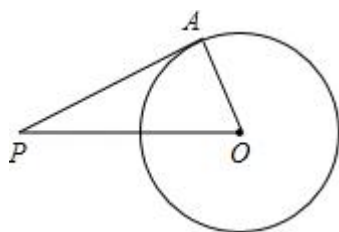


12. (3分) 如果点  $P_1(3, y_1)$ ,  $P_2(2, y_2)$  在一次函数  $y = 2x - 1$  的图象上, 则  $y_1$  \_\_\_\_\_  $y_2$ . (填 “>”, “<” 或 “=”)

13. (3分) 一个多边形的每一个外角都等于  $30^\circ$ , 则这个多边形的边数是 \_\_\_\_\_.

14. (3分) 方程组  $\begin{cases} x+2y=-5 \\ 7x-2y=13 \end{cases}$  的解是 \_\_\_\_\_.

15. (3分) 如图, 点  $P$  是  $\odot O$  外一点,  $PA$  是  $\odot O$  的切线, 切点为  $A$ ,  $\odot O$  的半径  $OA = 2\text{cm}$ ,  $\angle P = 30^\circ$ , 则  $PO =$  \_\_\_\_\_  $\text{cm}$ .



16. (3分) 某段时间, 小明连续 7 天测得日最高温度如下表所示, 那么这 7 天的最高温度的平均气温是 \_\_\_\_\_  $^\circ\text{C}$ .

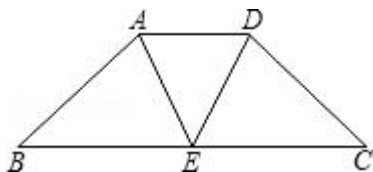
|                         |    |    |    |
|-------------------------|----|----|----|
| 温度 ( $^\circ\text{C}$ ) | 26 | 27 | 25 |
| 天数                      | 1  | 3  | 3  |

## 三、解答题

17. 计算:  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - (\sqrt{3}+1)^0 - \sqrt{8} + |-5| - (\sin 30^\circ)^{-1}$ .

18. 解分式方程:  $\frac{2}{3-x} = \frac{x}{x-1}$ .

19. 如图, 在等腰梯形  $ABCD$  中,  $E$  为底  $BC$  的中点, 连接  $AE$ ,  $DE$ . 求证:  $AE = DE$ .



20. 投掷一枚普通的正方体骰子 24 次.

(1) 你认为下列四种说法哪种是正确的?

- ① 出现 1 点的概率等于出现 3 点的概率;
- ② 投掷 24 次, 2 点一定会出现 4 次;
- ③ 投掷前默念几次“出现 4 点”, 投掷结果出现 4 点的可能性就会加大;
- ④ 连续投掷 6 次, 出现的点数之和不可能等于 37.

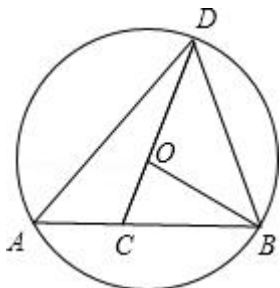
(2) 求出现 5 点的概率;

(3) 出现 6 点大约有多少次?

21. 如图, 已知  $AB$  是  $\odot O$  的弦,  $OB = 4$ ,  $\angle OBC = 30^\circ$ , 点  $C$  是弦  $AB$  上任意一点 (不与点  $A$ 、 $B$  重合), 连接  $CO$  并延长  $CO$  交  $\odot O$  于点  $D$ , 连接  $AD$ 、 $DB$ .

(1) 当  $\angle ADC = 18^\circ$  时, 求  $\angle DOB$  的度数;

(2) 若  $AC = 2\sqrt{3}$ , 求证:  $\triangle ACD \sim \triangle OCB$ .



22. 已知  $x_1, x_2$  是一元二次方程  $(a - 6)x^2 + 2ax + a = 0$  的两个实数根.

(1) 是否存在实数  $a$ , 使  $-x_1 + x_1x_2 = 4 + x_2$  成立? 若存在, 求出  $a$  的值; 若不存在, 请你说明理由;

(2) 求使  $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$  为负整数的实数  $a$  的整数值.

23. 如图, 四边形  $ABCD$  是边长为  $3\sqrt{2}$  的正方形, 长方形  $AEFG$  的宽  $AE = \frac{7}{2}$ , 长  $EF = \frac{7}{2}\sqrt{3}$ . 将

长方形  $AEFG$  绕点  $A$  顺时针旋转  $15^\circ$  得到长方形  $AMNH$  (如图), 这时  $BD$  与  $MN$  相交于点  $O$ .

(1) 求  $\angle DOM$  的度数;

(2) 在图中, 求  $D$ 、 $N$  两点间的距离;

(3) 若把长方形  $AMNH$  绕点  $A$  再顺时针旋转  $15^\circ$  得到长方形  $ARTZ$ , 请问此时点  $B$  在

矩形  $ARTZ$  的内部、外部、还是边上？并说明理由．

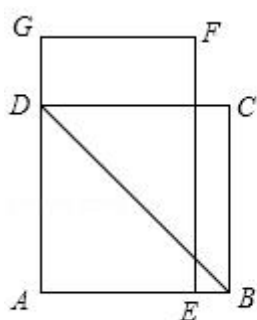


图1

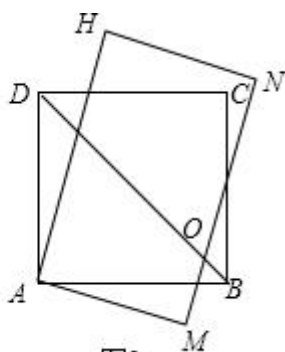


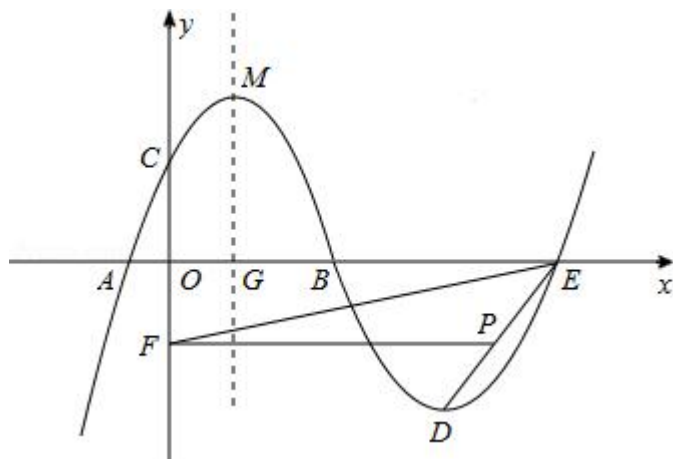
图2

24. (10分) 如图，抛物线  $m: y = -\frac{1}{4}(x+h)^2+k$  与  $x$  轴的交点为  $A$ 、 $B$ ，与  $y$  轴的交点为  $C$ ，顶点为  $M(3, \frac{25}{4})$ ，将抛物线  $m$  绕点  $B$  旋转  $180^\circ$ ，得到新的抛物线  $n$ ，它的顶点为  $D$ ；

(1) 求抛物线  $n$  的解析式；

(2) 设抛物线  $n$  与  $x$  轴的另一个交点为  $E$ ，点  $P$  是线段  $ED$  上一个动点 ( $P$  不与  $E$ 、 $D$  重合)，过点  $P$  作  $y$  轴的垂线，垂足为  $F$ ，连接  $EF$ 。如果  $P$  点的坐标为  $(x, y)$ ， $\triangle PEF$  的面积为  $S$ ，求  $S$  与  $x$  的函数关系式，写出自变量  $x$  的取值范围，并求出  $S$  的最大值；

(3) 设抛物线  $m$  的对称轴与  $x$  轴的交点为  $G$ ，以  $G$  为圆心， $A$ 、 $B$  两点间的距离为直径作  $\odot G$ ，试判断直线  $CM$  与  $\odot G$  的位置关系，并说明理由。



## 2012 年湖南省怀化市中考数学试卷

### 参考答案与试题解析

#### 一、选择题（共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分）

1. 【分析】如果一个数  $x$  的立方等于  $a$ ，那么  $x$  是  $a$  的立方根，根据此定义求解即可．

【解答】解： $\because 4$  的立方等于 64，

$\therefore 64$  的立方根等于 4．

故选：A．

【点评】此题主要考查了求一个数的立方根，解题时应先找出所要求的这个数是哪一个数的立方．由开立方和立方是互逆运算，用立方的方法求这个数的立方根．注意一个数的立方根与原数的性质符号相同．

2. 【分析】根据轴对称及中心对称的定义，结合选项即可作出判断．

【解答】解：A、不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项错误；

B、不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故本选项错误；

C、既是轴对称图形，也是中心对称图形，故本选项正确；

D、不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项错误；

故选：C．

【点评】此题考查了轴对称图形及中心对称图形的判断，解答本题的关键是熟练掌握轴对称及中心对称的定义，属于基础题．

3. 【分析】利用不等式的性质知：不等式两边同时乘以一个正数不等号方向不变，同乘以或除以一个负数不等号方向改变．

【解答】解：A、不等式两边同时加上 1，不等号方向不变，故本选项正确，不符合题意；

B、不等式两边同时乘以 3，不等号方向不变，故本选项正确，不符合题意；

C、不等式两边同时乘以  $-\frac{1}{2}$ ，不等号方向改变，故本选项正确，不符合题意；

D、不等式两边同时乘以负数  $c$ ，不等号方向改变，故本选项错误，符合题意．

故选：D．

【点评】本题考查了不等式的性质，解题的关键是牢记不等式的性质，特别是在不等式的两边同时乘以或除以一个负数时，不等号方向改变．

4. 【分析】根据象限的特点，判断出所求的点的横纵坐标的符号，进而判断点所在的象限．

【解答】解： $\because$  点  $(-3, 3)$  的横坐标是负数，纵坐标是正数，

∴点在平面直角坐标系的第二象限，

故选：B.

【点评】本题主要考查了平面直角坐标系中各个象限的点的坐标的符号特点．四个象限的符号特点分别是：第一象限（+，+）；第二象限（-，+）；第三象限（-，-）；第四象限（+，-）.

5. 【分析】函数关系中主要有二次根式．根据二次根式的意义，被开方数是非负数即可求解．

【解答】解：根据题意得： $2x - 3 \geq 0$ ，

解得  $x \geq \frac{3}{2}$ ．

故选：D.

【点评】考查了函数自变量的取值范围，函数自变量的范围一般从三个方面考虑：

- （1）当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；
- （2）当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为0；
- （3）当函数表达式是二次根式时，被开方数为非负数．

6. 【分析】由  $AB \parallel CD$ ，根据两直线平行，同旁内角互补，即可求得  $\angle CAB$  的度数，又由  $AE$  平分  $\angle CAB$ ，即可求得答案．

【解答】解：∵  $AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle C + \angle CAB = 180^\circ \text{ ,}$$

$$\therefore \angle C = 110^\circ \text{ ,}$$

$$\therefore \angle CAB = 70^\circ \text{ ,}$$

$$\therefore AE \text{ 平分 } \angle CAB,$$

$$\therefore \angle EAB = \frac{1}{2} \angle CAB = 35^\circ \text{ .}$$

故选：B.

【点评】此题考查了平行线的性质与角平分线的定义．此题比较简单，注意掌握两直线平行，同旁内角互补定理的应用．

7. 【分析】方差反映一组数据的波动大小，方差越大，波动性越大，反之也成立，即可得出答案．

【解答】解：∵甲、乙方差分别是3.9、15.8，

$$\therefore S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2 \text{ ,}$$

∴甲秧苗出苗更整齐；

故选：A.

【点评】本题考查方差的定义与意义：一般地设  $n$  个数据， $x_1, x_2, \dots, x_n$  的平均数为  $\bar{x}$ ，方差  $S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$ ，它反映了一组数据的波动大小，

方差越大，波动性越大，反之也成立.

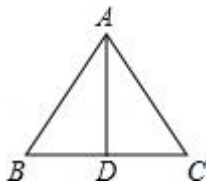
8. 【分析】根据等腰三角形的性质可知  $BC$  上的中线  $AD$  同时是  $BC$  上的高线，根据勾股定理求出  $AB$  的长即可.

【解答】解： $\because$  等腰三角形  $ABC$  中， $AB = AC$ ， $AD$  是  $BC$  上的中线，

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC = 3, AD \text{ 同时是 } BC \text{ 上的高线},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 5,$$

故选：C.



【点评】本题考查勾股定理及等腰三角形的性质. 解题关键是得出中线  $AD$  是  $BC$  上的高线，难度适中.

## 二、填空题

9. 【分析】当被分解的式子是四项时，应考虑运用分组分解法进行分解. 本题前两项、后两项都有公因式，且分解后还能继续分解，故使前两项一组，后两项一组.

【解答】解： $x^2 - xy + xz - yz$ ,

$$= (x^2 - xy) + (xz - yz),$$

$$= x(x - y) + z(x - y),$$

$$= (x - y)(x + z).$$

【点评】本题考查用分组分解法进行因式分解. 难点是采用两两分组还是三一分组. 本题前两项、后两项都有公因式，且分解后还能继续分解，故使前两项一组，后两项一组.

10. 【分析】先根据分式混合运算的法则把原式化简，再把  $x = 1, y = \frac{1}{5}$  代入进行计算即可.

【解答】解：原式  $= 6x^2 + 3xy - 2x^2 + 2xy$

$$= 4x^2 + 5xy,$$

当  $x = 1$ ,  $y = \frac{1}{5}$  时, 原式  $= 4 + 5 \times \frac{1}{5} = 5$ .

故答案为: 5.

**【点评】** 本题考查的是整式的混合运算 - 化简求值, 解答此类题目时先按运算顺序把整式化简, 再把对应字母的值代入求整式的值.

11. **【分析】** 由四边形  $ABCD$  是平行四边形, 根据平行四边形的对边相等, 可得  $BC = AD = 8$ , 又由点  $E$ 、 $F$  分别是  $BD$ 、 $CD$  的中点, 利用三角形中位线的性质, 即可求得答案.

**【解答】** 解:  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$$\therefore BC = AD = 8,$$

$\because$  点  $E$ 、 $F$  分别是  $BD$ 、 $CD$  的中点,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 8 = 4.$$

故答案为: 4.

**【点评】** 此题考查了平行四边形的性质与三角形中位线的性质. 此题比较简单, 注意掌握数形结合思想的应用.

12. **【分析】** 根据一次函数图象上点的坐标特征, 将点  $P_1$ 、 $P_2$  的坐标分别代入已知函数的解析式, 分别求得  $y_1$ 、 $y_2$  的值, 然后再来比较一下  $y_1$ 、 $y_2$  的大小.

**【解答】** 解:  $\because$  点  $P_1(3, y_1)$ ,  $P_2(2, y_2)$  在一次函数  $y = 2x - 1$  的图象上,

$$\therefore y_1 = 2 \times 3 - 1 = 5, \quad y_2 = 2 \times 2 - 1 = 3,$$

$$\therefore 5 > 3,$$

$$\therefore y_1 > y_2;$$

故答案是:  $>$ .

**【点评】** 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 经过函数的某点一定在函数的图象上. 解题时也可以根据一次函数的单调性进行解答.

13. **【分析】** 多边形的外角和为  $360^\circ$ , 而多边形的每一个外角都等于  $30^\circ$ , 由此做除法得出多边形的边数.

**【解答】** 解:  $\because 360^\circ \div 30^\circ = 12$ ,

$\therefore$  这个多边形为十二边形,

故答案为: 12.

**【点评】** 本题考查根据多边形的内角与外角. 关键是明确多边形的外角和为  $360^\circ$ .

14. **【分析】** 先用加减消元求出  $x$  的值, 再用代入消元法求出  $y$  的值即可.

【解答】解：  $\begin{cases} x+2y=-5 \text{①} \\ 7x-2y=13 \text{②} \end{cases}$ ，①+②得， $8x=8$ ，解得  $x=1$ ；把  $x=1$  代入①得， $1+2y=-5$ ，解得  $y=-3$ ，

故此方程组的解为：  $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 。

故答案为：  $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 。

【点评】本题考查的是解二元一次方程组，熟知解二元一次方程组的加减消元法和代入消元法是解答此题的关键。

15. 【分析】根据切线的性质判定  $\triangle APO$  为直角三角形，然后在直角三角形中，利用  $30^\circ$  度角所对的直角边  $OA$  等于斜边  $PO$  的一半即可求得  $PO$  的值。

【解答】解：  $\because$  如图， $PA$  是  $\odot O$  的切线，

$\therefore PA \perp OA$ ，

$\therefore \angle PAO = 90^\circ$ ；

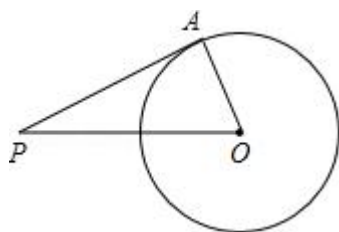
又  $\because \angle P = 30^\circ$ （已知），

$\therefore PO = 2OA$ （ $30^\circ$  角所对的直角边是斜边的一半）；

$\because OA = 2cm$ （已知），

$\therefore PO = 4cm$ ；

故答案是：4。



【点评】本题考查了切线的性质、含  $30^\circ$  度角的直角三角形．运用切线的性质可推知  $\angle PAO = 90^\circ$ ，即  $\triangle PAO$  是直角三角形．

16. 【分析】平均数的计算方法是求出所有数据的和，然后除以数据的总个数．

【解答】解：该组数据的平均数  $= (26 \times 1 + 27 \times 3 + 25 \times 3) \div 7 = 182 \div 7 = 26^\circ C$ ．

故答案为：26．

【点评】本题考查的是加权平均数的求法．本题易出现的错误是求 26，27，25 这三个数的平均数，对平均数的理解不正确．

### 三、解答题

17. 【分析】分别进行分母有理化、零指数幂、二次根式的化简、及负整数指数幂的运算，

然后合并即可得出答案.

【解答】解：原式  $= \sqrt{2} + 1 - 1 - 2\sqrt{2} + 5 - 2 = 3 - \sqrt{2}$ .

【点评】此题考查了二次根式的混合运算、零指数幂及负整数指数幂的运算，结合的知识点较多，注意各部分的运算法则.

18. 【分析】观察可得最简公分母是  $(3-x)(x-1)$ ，方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解.

【解答】解：原方程可化为：
$$\frac{2}{3-x} - \frac{x}{x-1} = 0,$$

方程的两边同乘  $(3-x)(x-1)$ ，得

$$2(x-1) - x(3-x) = 0,$$

$$\text{整理得, } x^2 - x - 2 = 0,$$

$$\text{即 } (x+1)(x-2) = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -1, x_2 = 2.$$

$$\text{检验: 把 } x = -1, x = 2 \text{ 代入 } (2x-1) = -3 \neq 0.$$

$\therefore$  原方程的解为： $x = -1$  或  $x = 2$ .

【点评】本题考查了解分式方程，（1）解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解.（2）解分式方程一定要注意要验根.

19. 【分析】利用等腰梯形的性质证明  $\triangle ABE \cong \triangle DCE$  后，利用全等三角形的性质即可证得两对应线段相等.

【解答】证明： $\because$  四边形  $ABCD$  是等腰梯形，

$$\therefore AB = DC, \angle B = \angle C.$$

$\because E$  是  $BC$  的中点，

$$\therefore BE = CE.$$

在  $\triangle ABE$  和  $\triangle DCE$  中，

$$\begin{cases} AB=DC \\ \angle B=\angle C, \\ BE=CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCE \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore AE = DE.$$

【点评】本题主要考查等腰梯形的性质的应用，解题的关键是根据等腰梯形的性质得到证明全等所需的条件.

20. 【分析】(1) 抛掷正方体骰子出现 3 和出现 1 的概率均为  $\frac{1}{6}$ ;

(2) 出现 5 点的概率不受抛掷次数的影响, 始终是  $\frac{1}{6}$ ;

(3) 用抛掷次数乘以出现 6 点的概率即可.

【解答】解: (1)

①抛掷正方体骰子出现 3 和出现 1 的概率均为  $\frac{1}{6}$ , 故①正确;

②投掷 24 次, 2 点不一定会出现, 故②错误;

③投掷结果出现 4 点的概率一定, 不会受主观原因改变, 故③错误;

④连续投掷 6 次, 最多为  $6 \times 6 = 36$ , 所以出现的点数之和不可能等于 37, 故④正确.

所以只有①④说法正确;

(2) 出现 5 点的概率不受抛掷次数的影响, 始终是  $\frac{1}{6}$ ;

(3) 出现 6 点大约有  $24 \times \frac{1}{6} = 4$  次.

【点评】本题考查了概率的公式, 解题时注意出现 1 点的概率不受实验次数的影响.

21. 【分析】(1) 连接  $OA$ , 根据  $OA = OB = OD$ , 求出  $\angle DAO$ 、 $\angle OAB$  的度数, 求出  $\angle DAB$ , 根据圆周角定理求出即可;

(2) 过  $O$  作  $OE \perp AB$  于  $E$ , 根据垂径定理求出  $AE$  和  $BE$ , 求出  $AB$ , 推出  $C$ 、 $E$  重合, 得出  $\angle ACD = \angle OCB = 90^\circ$ , 求出  $DC$  长得出  $\frac{AC}{OC} = \frac{DC}{BC}$ , 根据相似三角形的判定推出即可.

【解答】(1) 解: 连接  $OA$ ,

$$\because OA = OB = OD,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBC = 30^\circ, \angle OAD = \angle ADC = 18^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DAO + \angle BAO = 48^\circ,$$

由圆周角定理得:  $\angle DOB = 2\angle DAB = 96^\circ$ .

(2) 证明: 过  $O$  作  $OE \perp AB$  于点  $E$ , 垂足为  $E$ ,

$\because OE$  过  $O$ ,

由垂径定理得:  $AE = BE$ ,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OB = 2,$$

即  $AB = 2AE = 4\sqrt{3}$ ,

$$\therefore BC = 2\sqrt{3},$$
$$\therefore DC \perp AB,$$
$$\therefore DC = OD + OC = 2 + 4 = 6, \quad OC = 2, \quad AC = BC = 2\sqrt{3},$$
$$\therefore \frac{AC}{OC} = \frac{CD}{BC} = \sqrt{3},$$

22. 【分析】根据根与系数的关系求得  $x_1x_2 = \frac{a}{a-6}$ ,  $x_1+x_2 = -\frac{2a}{a-6}$ ; 根据一元二次方程的根的判别式求得  $a$  的取值范围;

(2) 根据限制性条件 “ $(x_1+1)(x_2+1)$  为负整数” 求得  $a$  的取值范围, 然后在取值范围

内取  $a$  的整数值.

**【解答】**解:  $\because x_1, x_2$  是一元二次方程  $(a-6)x^2+2ax+a=0$  的两个实数根,

$$\therefore \text{由根与系数的关系可知, } x_1x_2 = \frac{a}{a-6}, x_1+x_2 = -\frac{2a}{a-6};$$

$\because$  一元二次方程  $(a-6)x^2+2ax+a=0$  有两个实数根,

$$\therefore \Delta = 4a^2 - 4(a-6) \cdot a \geq 0, \text{ 且 } a-6 \neq 0,$$

解得,  $a \geq 0$ , 且  $a \neq 6$ ;

$$(1) \because -x_1+x_1x_2 = 4+x_2,$$

$$\therefore x_1x_2 = 4 + (x_1+x_2), \text{ 即 } \frac{a}{a-6} = 4 - \frac{2a}{a-6},$$

解得,  $a = 24 > 0$ ;

$\therefore$  存在实数  $a$ , 使  $-x_1+x_1x_2 = 4+x_2$  成立,  $a$  的值是 24;

$$(2) \because (x_1+1)(x_2+1) = x_1x_2 + (x_1+x_2) + 1 = \frac{a}{a-6} - \frac{2a}{a-6} + 1 = -\frac{6}{a-6},$$

$\therefore$  当  $(x_1+1)(x_2+1)$  为负整数时,  $a-6 > 0$ , 且  $a-6$  是 6 的约数,

$$\therefore a-6 = 6, a-6 = 3, a-6 = 2, a-6 = 1,$$

$$\therefore a = 12, 9, 8, 7;$$

$\therefore$  使  $(x_1+1)(x_2+1)$  为负整数的实数  $a$  的整数值有 12, 9, 8, 7.

**【点评】** 本题综合考查了根与系数的关系、根的判别式. 注意: 一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  ( $a, b, c$  是常数) 的二次项系数  $a \neq 0$ .

23. **【分析】** (1) 由旋转的性质, 可得  $\angle BAM = 15^\circ$ , 即可得  $\angle OKB = \angle AOM = 75^\circ$ , 又由正方形的性质, 可得  $\angle ABD = 45^\circ$ , 然后利用外角的性质, 即可求得  $\angle DOM$  的度数;

(2) 首先连接  $AN$ , 交  $BD$  于  $I$ , 连接  $AN$ , 由特殊角的三角函数值, 求得  $\angle HAN = 30^\circ$ , 又由旋转的性质, 即可求得  $\angle DAN = 45^\circ$ , 即可证得  $A, C, N$  共线, 然后由股定理求得答案;

(3) 在  $\text{Rt}\triangle ARK$  中, 利用三角函数即可求得  $AK$  的值, 与  $AB$  比较大小, 即可确定  $B$  的位置.

**【解答】**解: (1) 根据题意得:  $\angle BAM = 15^\circ$ ,

$\because$  四边形  $AMNH$  是矩形,

$$\therefore \angle M = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AKM = 90^\circ - \angle BAM = 75^\circ,$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle BKO &= \angle AKM = 75^\circ, \\ \because \text{四边形 } ABCD &\text{ 是正方形,} \\ \therefore \angle ABD &= 45^\circ, \\ \therefore \angle DOM &= \angle BKO + \angle ABD = 75^\circ + 45^\circ = 120^\circ;\end{aligned}$$

(2) 连接  $AN$ , 交  $BD$  于  $I$ , 连接  $DN$ ,

$$\because NH = \frac{7}{2}, AH = \frac{7}{2}\sqrt{3}, \angle H = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle HAN = \frac{NH}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle HAN = 30^\circ,$$

$$\therefore AN = 2NH = 7,$$

由旋转的性质:  $\angle DAH = 15^\circ$ ,

$$\therefore \angle DAN = 45^\circ,$$

$$\because \angle DAC = 45^\circ,$$

$\therefore A, C, N$  共线,

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$$\therefore BD \perp AC,$$

$$\because AD = CD = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore DI = AI = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + CD^2} = 3,$$

$$\therefore NI = AN - AI = 7 - 3 = 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DIN \text{ 中, } DN = \sqrt{DI^2 + NI^2} = 5;$$

(3) 点  $B$  在矩形  $ARTZ$  的外部.

理由: 如图, 根据题意得:  $\angle BAR = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$ ,

$$\because \angle R = 90^\circ, AR = \frac{7}{2},$$

$$\therefore AK = \frac{AR}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7\sqrt{3}}{3},$$

$$\because AB = 3\sqrt{2} > \frac{7\sqrt{3}}{3},$$

∴点  $B$  在矩形  $ARTZ$  的外部.

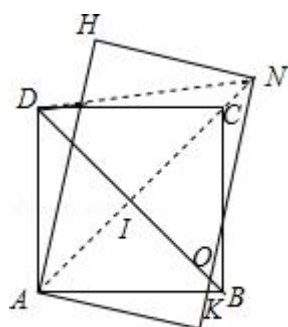
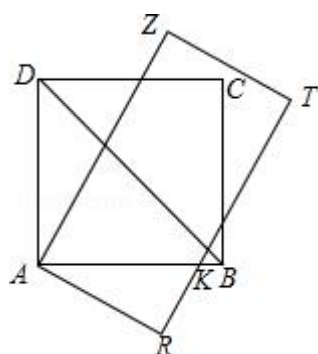


图2  $M$

**【点评】** 此题考查了旋转的性质、正方形的性质、矩形的性质、勾股定理以及特殊角的三角函数问题. 此题难度较大, 注意数形结合思想的应用, 注意准确作出辅助线是解此题的关键.

24. **【分析】** (1) 本问涉及抛物线的旋转变换, 首先求出  $B$  点坐标, 再由点  $D$ 、 $M$  关于点  $B$  成中心对称, 求出  $D$  点的坐标, 从而得到抛物线  $n$  的解析式; 注意由于开口方向相反, 两个抛物线的  $a$  值也相反;

(2) 本问可依次确定  $S$  的关系式、自变量  $x$  的取值范围, 最后求出最大值. 注意: ①欲求  $S$  的关系式, 首先需要用待定系数法求出直线  $DE$  的解析式; ②求得关系式  $S = -\frac{5}{8}(x - 9)^2 + \frac{405}{8}$  后确定最大值时, 不能简单套用“当  $x = 9$  时, 最大值为...”, 这样就错了, 因为  $x = 9$  不在自变量的取值范围内;

(3) 本问结论: 直线  $CM$  与  $\odot G$  相切. 结合题意, 欲证明直线  $CM$  与  $\odot G$  相切, 需要完成两个步骤: ①证明点  $C$  在  $\odot G$  上, ②证明  $CM$  垂直于半径  $GC$ .

**【解答】** 解: (1) ∵ 顶点坐标为  $M(3, \frac{25}{4})$ ,

$$\therefore k = \frac{25}{4}, h = -3,$$

$$\therefore \text{抛物线 } m \text{ 的解析式为: } y = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 + \frac{25}{4} = -\frac{1}{4}(x - 8)(x + 2),$$

$$\therefore A(-2, 0), B(8, 0).$$

由旋转性质可知, 点  $D$  与点  $M(3, \frac{25}{4})$  关于点  $B(8, 0)$  成中心对称,

$$\therefore D(13, -\frac{25}{4}),$$

$$\therefore \text{抛物线 } n \text{ 的解析式为: } y = \frac{1}{4}(x-13)^2 - \frac{25}{4}.$$

$$(2) \because \text{抛物线 } n: y = \frac{1}{4}(x-13)^2 - \frac{25}{4} = \frac{1}{4}(x-8)(x-18),$$

$$\therefore E \text{ 点坐标为 } (18, 0).$$

设直线  $DE$  的解析式为  $y=kx+b$ , 则有:

$$\begin{cases} 18k+b=0 \\ 13k+b=-\frac{25}{4} \end{cases}, \text{ 解得 } k=\frac{5}{4}, b=-\frac{45}{2},$$

$$\therefore \text{直线 } DE \text{ 的解析式为: } y = \frac{5}{4}x - \frac{45}{2}.$$

$$\text{如题图所示, } S = \frac{1}{2}PF \cdot OF = \frac{1}{2}x \cdot (-y) = -\frac{1}{2}x \cdot (\frac{5}{4}x - \frac{45}{2}) = -\frac{5}{8}(x-9)^2 + \frac{405}{8};$$

$\because$  点  $P$  是线段  $ED$  上一个动点 ( $P$  不与  $E$ 、 $D$  重合),

$$\therefore 13 < x < 18;$$

$$\therefore S = -\frac{5}{8}(x-9)^2 + \frac{405}{8} \quad (13 < x < 18),$$

可见该抛物线开口向下, 对称轴为  $x=9$ , 函数图象位于对称轴右侧,  $y$  随着  $x$  的增大而减小, 故  $S$  在  $13 < x < 18$  范围内没有最大值.

$$\text{所以 } S \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } S = -\frac{5}{8}(x-9)^2 + \frac{405}{8}, \text{ 自变量取值范围是 } 13 < x < 18, S$$

没有最大值.

(3) 结论: 直线  $CM$  与  $\odot G$  相切. 理由如下:

$$\because \text{抛物线 } m \text{ 的解析式为: } y = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + \frac{25}{4}, \text{ 令 } x=0, \text{ 解得 } y=4,$$

$$\therefore C(0, 4).$$

$$\text{在 Rt}\triangle COG \text{ 中, 由勾股定理得: } CG = \sqrt{OG^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

又  $\because \odot G$  半径为 5,

$\therefore$  点  $C$  在  $\odot G$  上.

如右图所示，依题意作出 $\odot G$ ，连接 $CG$ 、 $CM$ 、 $MG$ ，过点 $C$ 作 $CH \perp MG$ 于点 $H$ ，则 $CH$

$$= 3, HG = 4, MH = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4},$$

$$\therefore \frac{CH}{HG} = \frac{MH}{CH} = \frac{3}{4}, CH \perp MG,$$

$$\therefore \triangle CHG \sim \triangle MHC,$$

$$\therefore \angle MCH = \angle CGH;$$

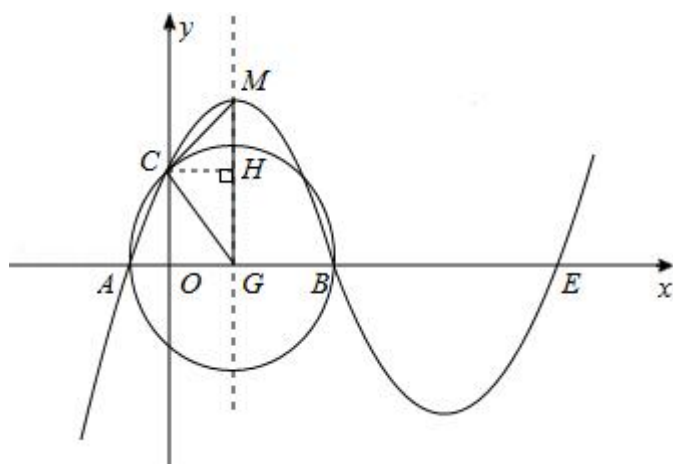
$$\text{又 } \angle HCG + \angle CGH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HCG + \angle MCH = 90^\circ, \text{ 即 } GC \perp MC.$$

（注：此处亦可用勾股定理的逆定理证明 $\triangle MCG$ 为直角三角形）

综上所述，点 $C$ 在 $\odot G$ 上，且满足 $GC \perp MC$ ，

$\therefore$ 直线 $CM$ 与 $\odot G$ 相切.



**【点评】** 本题综合考查了二次函数的图象与性质、图形变换、极值、相似三角形的判定与性质、勾股定理以及圆与直线的位置关系等知识点，有一定的难度．第（2）问中，考查二次函数在指定区间上的极值，这是本题的一个易错点，需要引起注意．