

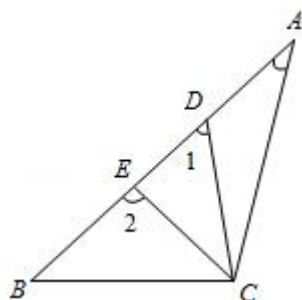
2011 年湖南省怀化市中考数学试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 24 分；每小题的四个选项中只有一项是正确的，请将正确选项的代号填涂在答题卡的相应位置上）

1. (3 分) 49 的平方根为 ()

- A. 7 B. -7 C. ± 7 D. $\pm\sqrt{7}$

2. (3 分) 如图所示， $\angle A$ ， $\angle 1$ ， $\angle 2$ 的大小关系是 ()

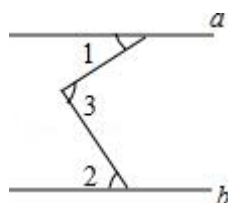


- A. $\angle A > \angle 1 > \angle 2$ B. $\angle 2 > \angle 1 > \angle A$ C. $\angle A > \angle 2 > \angle 1$ D. $\angle 2 > \angle A > \angle 1$

3. (3 分) 下列运算正确的是 ()

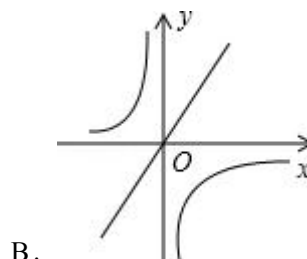
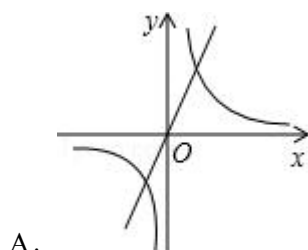
- A. $a \cdot a^3 = a^3$ B. $(ab)^3 = ab^3$ C. $a^3 + a^3 = a^6$ D. $(a^3)^2 = a^6$

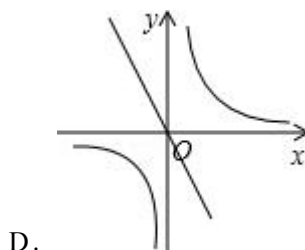
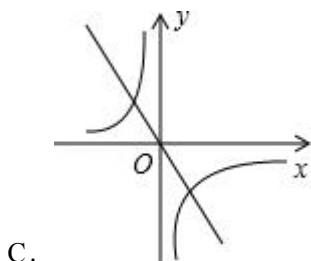
4. (3 分) 如图，已知直线 $a \parallel b$ ， $\angle 1 = 40^\circ$ ， $\angle 2 = 60^\circ$ ，则 $\angle 3$ 等于 ()



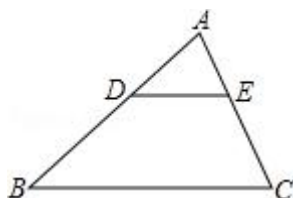
- A. 100° B. 60° C. 40° D. 20°

5. (3 分) 函数 $y = 2x$ 与函数 $y = -\frac{1}{x}$ 在同一坐标系中的大致图象是 ()





6. (3分) 如图所示: $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $AD = 5$, $BD = 10$, $AE = 3$. 则 CE 的值为 ()

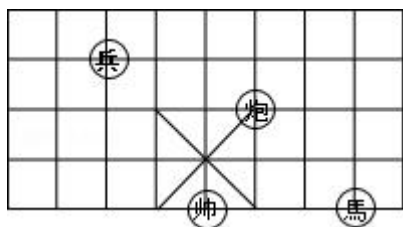


- A. 9 B. 6 C. 3 D. 4

7. (3分) 在平面直角坐标系中, 把直线 $y = x$ 向左平移一个单位长度后, 其直线解析式为 ()

- A. $y = x + 1$ B. $y = x - 1$ C. $y = x$ D. $y = x - 2$

8. (3分) 如图, 若在象棋盘上建立直角坐标系, 使“帅”位于点 $(-1, -2)$. “馬”位于点 $(2, -2)$, 则“兵”位于点 ()

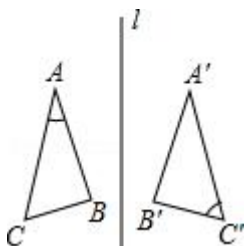


- A. $(-1, 1)$ B. $(-2, -1)$ C. $(-3, 1)$ D. $(1, -2)$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 24 分: 请将答案直接填写在答题卡的相应位置上)

9. (3分) 因式分解: $a^2 - 9 =$ _____.

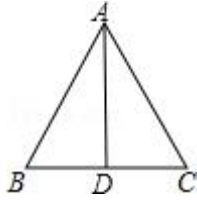
10. (3分) 如图, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C' = 60^\circ$, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称, 则 $\angle B =$ _____.



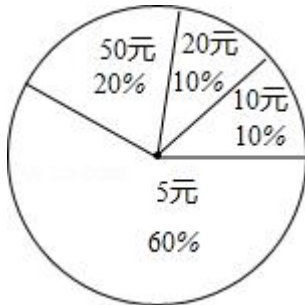
11. (3分) 定义新运算: 对任意实数 a, b , 都有 $a \otimes b = a^2 - b$. 例如 $3 \otimes 2 = 3^2 - 2 = 7$, 那么 $2 \otimes 1 =$ _____.

12. (3分) 一次函数 $y = -2x + 3$ 中, y 的值随 x 值增大而_____. (填“增大”或“减小”)

13. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 边于点 D , $AB = 5$, $BC = 6$, 则 $AD =$ _____.



14. (3分) 在一次爱心捐款中, 某班有 40 名学生拿出自己的零花钱, 有捐 5 元、10 元、20 元、50 元的. 右图反映了不同捐款的人数比例, 那么这个班的学生平均每人捐款元.



15. (3分) 方程 $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} = 0$ 的解是_____.

16. (3分) 出售某种手工艺品, 若每个获利 x 元, 一天可售出 $(8 - x)$ 个, 则当 $x =$ _____元, 一天出售该种手工艺品的总利润 y 最大.

三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 72 分)

17. (6分) 计算: $|-2| + (\sqrt{2} - 1)^0 - (-5) - (\frac{1}{3})^{-1}$.

18. (6分) 解方程组: $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 5x - 3y = 4 \end{cases}$.

19. (10分) 已知不等式组: $\begin{cases} 3x \geq 6 \\ 2x - 8 \leq 0 \end{cases}$.

(1) 求满足此不等式组的所有整数解;

(2) 从此不等式的所有整数解中任取一个数, 它是偶数的概率是多少?

20. (10分) 某中学为庆祝建党 90 周年举行唱“红歌”比赛, 已知 10 位评委给某班的打分是: 8, 9, 6, 8, 9, 10, 6, 8, 9, 7.

(1) 求这组数据的极差;

(2) 求这组数据的众数;

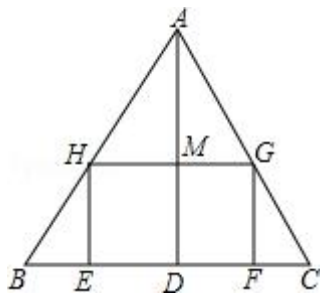
(3) 比赛规定: 去掉一个最高分和一个最低分, 剩下分数的平均数作为该班的最后得

分. 求该班的最后得分.

21. (10分) 如图, $\triangle ABC$ 是一张锐角三角形的硬纸片. AD 是边 BC 上的高, $BC = 40\text{cm}$, $AD = 30\text{cm}$. 从这张硬纸片剪下一个长 HG 是宽 HE 的 2 倍的矩形 $EFGH$. 使它的一边 EF 在 BC 上, 顶点 G, H 分别在 AC, AB 上. AD 与 HG 的交点为 M .

(1) 求证: $\frac{AM}{AD} = \frac{HG}{BC}$;

(2) 求这个矩形 $EFGH$ 的周长.



22. (10分) 已知: 关于 x 的方程 $ax^2 - (1 - 3a)x + 2a - 1 = 0$.

(1) 当 a 取何值时, 二次函数 $y = ax^2 - (1 - 3a)x + 2a - 1$ 的对称轴是 $x = -2$;

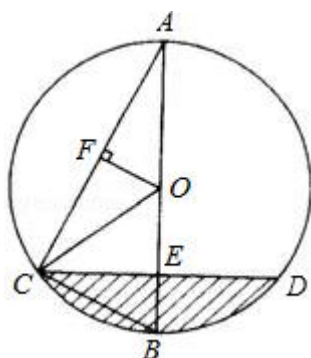
(2) 求证: a 取任何实数时, 方程 $ax^2 - (1 - 3a)x + 2a - 1 = 0$ 总有实数根.

23. (10分) 如图, 已知 AB 为 $\odot O$ 的直径, CD 是弦, $AB \perp CD$ 于 E , $OF \perp AC$ 于 F , $BE = OF$.

(1) 求证: $OF \parallel BC$;

(2) 求证: $\triangle AFO \cong \triangle CEB$;

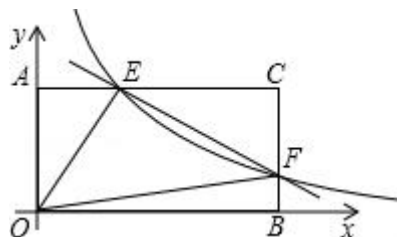
(3) 若 $EB = 5\text{cm}$, $CD = 10\sqrt{3}\text{cm}$, 设 $OE = x$, 求 x 值及阴影部分的面积.



24. (10分) 在矩形 $AOBC$ 中, $OB = 6$, $OA = 4$, 分别以 OB , OA 所在直线为 x 轴和 y 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系. F 是 BC 上的一个动点 (不与 B, C 重合), 过 F 点的反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的图象与 AC 边交于点 E .

(1) 求证: $AE \cdot AO = BF \cdot BO$;

- (2) 若点 E 的坐标为 $(2, 4)$, 求经过 O 、 E 、 F 三点的抛物线的解析式;
- (3) 是否存在这样的点 F , 使得将 $\triangle CEF$ 沿 EF 对折后, C 点恰好落在 OB 上? 若存在, 求出此时的 OF 的长; 若不存在, 请说明理由.



2011 年湖南省怀化市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题 3 分，共 24 分；每小题的四个选项中只有一项是正确的，请将正确选项的代号填涂在答题卡的相应位置上）

1. 【分析】首先根据平方根的定义，根据平方根的定义得出 ± 7 的平方等于 49，然后就可以解决问题.

【解答】解： $\because \pm 7$ 的平方等于 49，

$\therefore 49$ 的平方根为 ± 7 .

故选：C.

【点评】此题主要考查了平方根的定义和性质，根据平方的方法求这个数的平方根. 注意一个正数的平方根有两个.

2. 【分析】先根据 $\angle 1$ 是 $\triangle ACD$ 的外角，故 $\angle 1 > \angle A$ ，再根据 $\angle 2$ 是 $\triangle CDE$ 的外角，故 $\angle 2 > \angle 1$ ，进而可得出结论.

【解答】解： $\because \angle 1$ 是 $\triangle ACD$ 的外角，

$\therefore \angle 1 > \angle A$;

$\because \angle 2$ 是 $\triangle CDE$ 的外角，

$\therefore \angle 2 > \angle 1$,

$\therefore \angle 2 > \angle 1 > \angle A$.

故选：B.

【点评】本题考查的是三角形外角的性质，即三角形的外角等于与之不相邻的两个内角的和.

3. 【分析】根据同底数幂的乘法的性质，幂的乘方的性质，积的乘方的性质，合并同类项的法则，对各选项分析判断后利用排除法求解.

【解答】解：A、应为 $a \cdot a^3 = a^{1+3} = a^4$ ，故本选项错误；

B、应为 $(ab)^3 = a^3b^3$ ，故本选项错误；

C、应为 $a^3 + a^3 = 2a^3$ ，故本选项错误；

D、 $(a^3)^2 = a^6$ ，故本选项正确.

故选：D.

【点评】此题主要考查了合并同类项，同底数幂的乘法，幂的乘方，积的乘方，理清指

数的变化是解题的关键.

4. 【分析】首先过点 C 作 $CD \parallel a$, 由 $a \parallel b$, 即可得 $CD \parallel a \parallel b$, 根据两直线平行, 内错角相等, 即可求得 $\angle 3$ 的度数.

【解答】解: 过点 C 作 $CD \parallel a$,

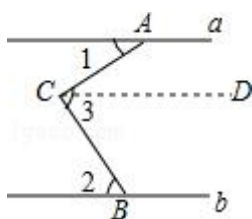
$$\because a \parallel b,$$

$$\therefore CD \parallel a \parallel b,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle 1 = 40^\circ, \quad \angle BCD = \angle 2 = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle ACD + \angle BCD = 100^\circ.$$

故选: A .



【点评】此题考查了平行线的性质. 解题的关键是准确作出辅助线, 注意数形结合思想的应用.

5. 【分析】根据函数 $y = 2x$ 与函数 $y = -\frac{1}{x}$ 分别确定图象即可得出答案.

【解答】解: $\because y = 2x, 2 > 0$,

$\therefore$ 图象经过一、三象限,

$\because$ 函数 $y = -\frac{1}{x}$ 中系数小于 0,

$\therefore$ 图象在二、四象限.

故选: B .

【点评】此题主要考查了从图象上把握有用的条件, 准确确定图象位置, 正确记忆一次函数与反比例函数的区别是解决问题的关键.

6. 【分析】由 $DE \parallel BC$, 用平行线分线段成比例定理即可得到 $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$, 又由 $AD = 5, BD = 10, AE = 3$, 代入即可求得答案.

【解答】解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE},$$

$$\because AD = 5, BD = 10, AE = 3,$$

$$\therefore \frac{5}{10} = \frac{3}{CE},$$

$$\therefore CE = 6.$$

故选：B.

【点评】此题考查了平行线分线段成比例定理．解题的关键是数形结合思想的应用．

7. 【分析】根据“左加右减”的原则进行解答即可．

【解答】解：由“左加右减”的原则可知，在平面直角坐标系中，把直线 $y = x$ 向左平移一个单位长度后，

其直线解析式为 $y = x + 1$ ．

故选：A.

【点评】本题考查的是一次函数的图象与几何变换，熟知函数图象平移的法则是解答此题的关键．

8. 【分析】根据“帅”位于点 $(-1, -2)$ ，“馬”位于点 $(2, -2)$ ，得出原点的位置即可得出答案．

【解答】解： $\because$ 在象棋盘上建立直角坐标系，使“帅”位于点 $(-1, -2)$ ，“馬”位于点 $(2, -2)$ ，

$\therefore$ 可得出原点位置在棋子炮的位置，

$\therefore$ “兵”位于点： $(-3, 1)$ ，

故选：C.

【点评】此题主要考查了直角坐标系的建立以及点的坐标确定，此类题型是个重点也是难点，需要掌握确定原点的方法是解决问题的关键．

二、填空题（每小题3分，共24分：请将答案直接填写在答题卡的相应位置上）

9. 【分析】 $a^2 - 9$ 可以写成 $a^2 - 3^2$ ，符合平方差公式的特点，利用平方差公式分解即可．

【解答】解： $a^2 - 9 = (a + 3)(a - 3)$ ．

【点评】本题考查了公式法分解因式，熟记平方差公式的结构特点是解题的关键．

10. 【分析】先根据轴对称的性质得出 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，由全等三角形的性质可知 $\angle C = \angle C'$ ，再由三角形内角和定理可得出 $\angle B$ 的度数．

【解答】解： $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，

$\therefore \angle C = \angle C' = 60^\circ$ ，

$$\because \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ.$$

故答案为: 90° .

【点评】 本题考查的是轴对称的性质及三角形内角和定理, 熟知以上知识是解答此题的关键.

11. **【分析】** 根据公式 $a \otimes b = a^2 - b$ 求 $2 \otimes 1$ 的值, 也相当于 $a = 2$, $b = 1$ 时, 代入 $a^2 - b$ 求值.

【解答】 解: 根据公式 $a \otimes b = a^2 - b$ 得:

$$2 \otimes 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3.$$

故答案为: 3.

【点评】 此题主要考查了有理数的混合运算, 关键是看懂 $a \otimes b = a^2 - b$ 的运算方法.

12. **【分析】** 先判断出一次函数 $y = -2x + 3$ 中 k 的符号, 再根据一次函数的增减性进行解答即可.

【解答】 解: $\because$ 一次函数 $y = -2x + 3$ 中 $k = -2 < 0$,

$\therefore y$ 的值随 x 值增大而减小.

故答案为: 减小.

【点评】 本题考查的是一次函数的性质, 即一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 中, 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大. 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

13. **【分析】** 首先根据等腰三角形的性质: 等腰三角形的三线合一, 求出 $DB = DC = \frac{1}{2}CB$, $AD \perp BC$, 再利用勾股定理求出 AD 的长.

【解答】 解: $\because AB = AC$, AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线,

$$\therefore DB = DC = \frac{1}{2}CB = 3, AD \perp BC,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,

$$\because AD^2 + BD^2 = AB^2,$$

$$\therefore AD = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

故答案为: 4.

【点评】 此题主要考查了等腰三角形的性质与勾股定理的应用, 做题的关键是根据等腰三角形的性质证出 $\triangle ADB$ 是直角三角形.

14. **【分析】** 根据扇形统计图中, 各种情况所占的比例, 利用加权平均数公式即可求解.

【解答】解： $5 \times 60\% + 10 \times 10\% + 20 \times 10\% + 50 \times 20\% = 16$ 元.

故答案是：16.

【点评】本题主要考查了加权平均数的计算，正确理解权的含义，理解公式是解题的关键.

15. 【分析】观察可得最简公分母是 $(x+1)(x-1)$ ，方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解.

【解答】解：方程的两边同乘 $(x+1)(x-1)$ ，得

$$2(x-1) - (x+1) = 0,$$

解得 $x = 3$.

检验：当 $x = 3$ 时， $(x+1)(x-1) = 8 \neq 0$.

$\therefore$ 原方程的解为： $x = 3$.

故答案为： $x = 3$.

【点评】(1) 解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解.

(2) 解分式方程一定要注意要验根.

16. 【分析】先根据题意得出总利润 y 与 x 的函数关系式，再根据二次函数的最值问题进行解答.

【解答】解： $\because$ 出售某种手工艺品，若每个获利 x 元，一天可售出 $(8-x)$ 个，

$$\therefore y = (8-x)x, \text{ 即 } y = -x^2 + 8x,$$

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-2} = 4 \text{ 时, } y \text{ 取得最大值.}$$

故答案为：4.

【点评】本题考查的是二次函数的最值问题，能根据题意得出 y 与 x 的关系式是解答此题的关键.

三、解答题（本大题共 8 小题，共 72 分）

17. 【分析】首先计算绝对值，0 次幂，负指数次幂，然后进行有理数的加减运算即可.

【解答】解：原式 $= 2 + 1 + 5 - 3 = 5$.

【点评】本题考查实数的综合运算能力，是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟练掌握负整数指数幂、零指数幂、二次根式、绝对值等考点的运算.

18. 【分析】两方程相加即可求得 x 的值，然后代入第一个方程即可求得 y 的值.

$$\text{【解答】解：} \begin{cases} x+3y=8 \text{ ①} \\ 5x-3y=4 \text{ ②} \end{cases},$$

①+②得： $6x = 12$,

$\therefore x = 2$,

把 $x = 2$ ①得： $2 + 3y = 8$,

解得： $y = 2$,

$\therefore$ 方程组的解集是： $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

【点评】 本题主要考查了二元一次方程组的解法，解方程组时一定要理解基本思想是消元.

19. **【分析】** (1) 首先解每个不等式，确定两个不等式的解集的公共部分就是不等式组的解集，然后在解集中确定整数解即可；

(2) 根据概率公式即可求解.

【解答】 解：(1) 解第一个不等式得： $x \geq 2$ ；

解第二个不等式得： $x \leq 4$.

则不等式组的解集是： $2 \leq x \leq 4$

$\therefore$ 不等式组的整数解是： 2, 3, 4；

(2) 2, 3, 4 中共有偶数 2 个. 因而 P (从此不等式的所有整数解中任取一个数，它是偶数) $= \frac{2}{3}$.

【点评】 本题主要考查了一元一次不等式组的整数解，以及概率公式，正确解不等式组是解题的关键.

20. **【分析】** (1) 根据极差就是最大值与最小值的差，即可求解；

(2) 众数就是出现次数最多的数，据此即可求解；

(3) 去掉一个最大值 10 和最小值 6，利用平方差公式即可求解.

【解答】 解：(1) 最大值是： 10，最小值是： 6，

则极差是： $10 - 6 = 4$ ；

(2) 出现次数最多的是： 8 和 9 都是 3 次，6 出现 2 次，7 和 10 出现 1 次，

因而众数是 8 和 9；

(3) 平均分是: $\frac{1}{8} \times (8+9+8+9+6+8+9+7) = 8$.

【点评】 本题主要考查了极差, 众数, 以及平均数的计算, 极差反映了一组数据变化范围的大小, 求极差的方法是用一组数据中的最大值减去最小值, 极差的单位与原数据单位一致.

21. **【分析】** (1) 根据矩形性质得出 $\angle AHG = \angle ABC$, 再证明 $\triangle AHG \sim \triangle ABC$, 即可证出;

(2) 根据 (1) 中比例式即可求出 HE 的长度, 以及矩形的周长.

【解答】 (1) 证明: $\because$ 四边形 $EFGH$ 为矩形,

$$\therefore EF \parallel GH,$$

$$\therefore \angle AHG = \angle ABC,$$

$$\text{又} \because \angle HAG = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle AHG \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AM}{AD} = \frac{HG}{BC};$$

(2) 解: 由 (1) $\frac{AM}{AD} = \frac{HG}{BC}$ 得: 设 $HE = x \text{ cm}$, $MD = HE = x \text{ cm}$,

$$\because AD = 30 \text{ cm},$$

$$\therefore AM = (30 - x) \text{ cm},$$

$$\because HG = 2HE,$$

$$\therefore HG = (2x) \text{ cm},$$

$$\text{可得 } \frac{30-x}{30} = \frac{2x}{40},$$

$$\text{解得, } x = 12,$$

$$\text{故 } HG = 2x = 24$$

$$\text{所以矩形 } EFGH \text{ 的周长为: } 2 \times (12+24) = 72 (\text{ cm}).$$

答: 矩形 $EFGH$ 的周长为 72 cm .

【点评】 此题主要考查了相似三角形的判定与性质, 根据矩形性质得出 $\triangle AHG \sim \triangle ABC$ 是解决问题的关键.

22. **【分析】** (1) 根据二次函数对称轴求法得出 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1-3a}{2a} = -2$, 即可求出;

(2) 利用一元二次方程根的判别式, 证明其大于等于 0 即可.

【解答】 解: (1) 当对称轴是 $x = -2$,

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = \frac{1-3a}{2a} = -2,$$

解得： $a = -1$ ；

(2) ①当 $a = 0$ 时，方程为一元一次方程，方程 $ax^2 - (1-3a)x + 2a - 1 = 0$ 有一个实数根.

$$\begin{aligned} \text{②} \because \text{当 } a \neq 0 \text{ 时，方程为一元二次方程，} \therefore \Delta &= [- (1-3a)]^2 - 4a(2a-1) = a^2 - 2a + 1 \\ &= (a-1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

$\therefore$ 方程有实数根，

$\therefore a$ 取任何实数时，方程 $ax^2 - (1-3a)x + 2a - 1 = 0$ 总有实数根.

【点评】 此题主要考查了二次函数对称轴求法以及根的判别式，熟练应用此性质是解决问题的关键.

23. **【分析】** (1) 根据直径所对的圆周角是直角，以及垂直于同一直线的两直线平行即可证得；

(2) 根据垂径定理以及等弧所对的圆周角相等，即可证得： $\triangle AFO$ 和 $\triangle CEB$ 的两个角相等，从而证得两个三角形全等；

(3) 根据勾股定理求得 x 的值，然后根据阴影部分的面积 = 扇形 COD 的面积 - $\triangle COD$ 的面积即可求解.

【解答】 (1) 证明： $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore AC \perp BC$$

$$\text{又} \because OF \perp AC$$

$$\therefore OF \parallel BC$$

(2) 证明： $\because AB \perp CD$

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{BD}$$

$$\therefore \angle CAB = \angle BCD$$

$$\text{又} \because \angle AFO = \angle CEB = 90^\circ, OF = BE,$$

$$\therefore \triangle AFO \cong \triangle CEB$$

(3) 解：连接 DO . 设 $OE = x$,

$$\because AB \perp CD$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}CD = 5\sqrt{3}cm.$$

在 $\triangle OCB$ 中, $OC = OB = x+5$ (cm),

根据勾股定理可得: $(x+5)^2 = (5\sqrt{3})^2 + x^2$

解得: $x = 5$, 即 $OE = 5cm$,

$$\therefore \tan \angle COE = \frac{CE}{OE} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3},$$

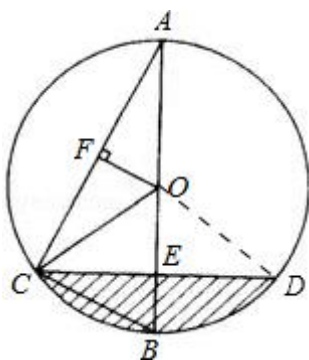
$$\therefore \angle COE = 60^\circ$$

$$\therefore \angle COD = 120^\circ,$$

$$\therefore \text{扇形 } COD \text{ 的面积是: } \frac{120\pi \times 10^2}{360} = \frac{100\pi}{3} cm^2$$

$$\triangle COD \text{ 的面积是: } \frac{1}{2}CD \cdot OE = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} \times 5 = 25\sqrt{3} cm^2$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积是: } \left(\frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3} \right) cm^2.$$



【点评】 本题主要考查了垂径定理, 勾股定理, 以及扇形的面积的计算, 正确求得 $\angle COE$ 的度数是解决本题的关键.

24. **【分析】** (1) 根据反比例函数的性质得出, $xy = k$, 即可得出 $AE \cdot AO = BF \cdot BO$;

(2) 利用 E 点坐标首先求出 $BF = \frac{4}{3}$, 再利用待定系数法求二次函数解析式即可;

(3) 设折叠之后 C 点在 OB 上的对称点为 C' , 连接 CE 、 CF , 过 E 作 EG 垂直于 OB 于点 G , 则根据折叠性质、相似三角形、勾股定理得出即可.

【解答】 (1) 证明: $\because E, F$ 点都在反比例函数图象上,

$\therefore$ 根据反比例函数的性质得出, $xy = k$,

$$\therefore AE \cdot AO = BF \cdot BO;$$

(2) 解: $\because$ 点 E 的坐标为 $(2, 4)$,

$$\therefore AE \cdot AO = BF \cdot BO = 8,$$

$$\because BO = 6, \therefore BF = \frac{4}{3},$$

$$\therefore F\left(6, \frac{4}{3}\right),$$

$$\text{分别代入二次函数解析式得: } \begin{cases} c=0 \\ 4a+2b+c=4 \\ 36a+6b+c=\frac{4}{3} \end{cases},$$

$$\text{把 } c=0 \text{ 代入 } \begin{cases} 4a+2b+c=4 \text{ ①} \\ 36a+6b+c=\frac{4}{3} \text{ ②} \end{cases} \text{ 得: } \begin{cases} 2a+b=2 \\ 18a+3b=\frac{2}{3} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=-\frac{4}{9} \\ b=\frac{26}{9} \end{cases},$$

$$\text{可得原方程组的解为: } \begin{cases} a=-\frac{4}{9} \\ b=\frac{26}{9} \\ c=0 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{26}{9}x;$$

(3) 解: 设存在这样的点 F , 将 $\triangle CEF$ 沿 EF 对折后, C 点恰好落在 OB 边上的 C' 点, 过点 E 作 $EG \perp OB$, 垂足为 G .

由题意得: $EG = AO = 4$,

把 $y=4$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 得: $x=\frac{1}{4}k$, 把 $x=6$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 得: $y=\frac{1}{6}k$,

$$\therefore EC' = EC = 6 - \frac{1}{4}k, \quad C'F = CF = 4 - \frac{1}{6}k,$$

$$\because \angle EC'G + \angle FCB = \angle FCB + \angle CFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EC'G = \angle CFB.$$

$$\text{又 } \because \angle EGC' = \angle CBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EC'G \sim \triangle CFB.$$

$$\therefore EG : C'B = EC' : CF,$$

