

2021 年湖北省宜昌市中考数学试卷

一、选择题（下列各小题中，只有一个选项是符合题目要求的，请在答题卡上指定的位置填涂符合要求的选项前面的字母代号，每小题 3 分，计 33 分）

1. -2021 的倒数是（ ）

A. 2021

B. -2021

C. $\frac{1}{2021}$

D. $-\frac{1}{2021}$

2. 下列四幅图案是四所大学校徽的主体标识，其中是中心对称图形的是（ ）



3. 2021 年 5 月 15 日 07 时 18 分，“天问一号”火星探测器成功登陆火星表面，开启了中国人自主探测火星之旅．地球与火星的最近距离约为 5460 万公里．“5460 万”用科学记数法表示为（ ）



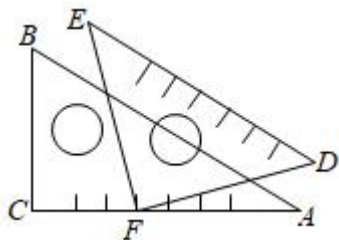
A. 5.46×10^2

B. 5.46×10^3

C. 5.46×10^6

D. 5.46×10^7

4. 如图，将一副三角尺按图中所示位置摆放，点 F 在 AC 上，其中 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle EFD = 90^\circ$ ， $\angle DEF = 45^\circ$ ， $AB \parallel DE$ ，则 $\angle AFD$ 的度数是（ ）



A. 15°

B. 30°

C. 45°

D. 60°

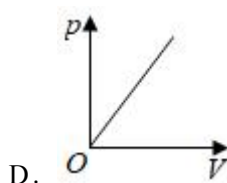
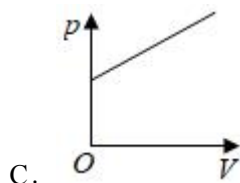
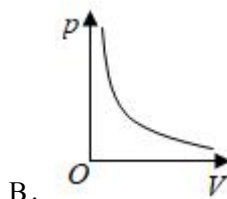
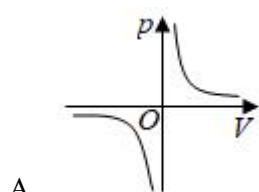
5. 下列运算正确的是（ ）

A. $x^3+x^3=x^6$ B. $2x^3-x^3=x^3$ C. $(x^3)^2=x^5$ D. $x^3 \cdot x^3=x^9$

6. 在六张卡片上分别写有 6 , $-\frac{22}{7}$, 3.1415 , π , 0 , $\sqrt{3}$ 六个数, 从中随机抽取一张, 卡片上的数为无理数的概率是 ()

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

7. 某气球内充满了一定质量 m 的气体, 当温度不变时, 气球内气体的气压 p (单位: kPa) 是气体体积 V (单位: m^3) 的反比例函数: $p=\frac{m}{V}$, 能够反映两个变量 p 和 V 函数关系的图象是 ()



8. 我国古代数学经典著作《九章算术》中有这样一题, 原文是: “今有共买物, 人出八, 盈三; 人出七, 不足四. 问人数、物价各几何?” 意思是: 今有人合伙购物, 每人出八钱, 会多三钱; 每人出七钱, 又差四钱. 问人数、物价各多少? 设人数为 x 人, 物价为 y 钱, 下列方程组正确的是 ()

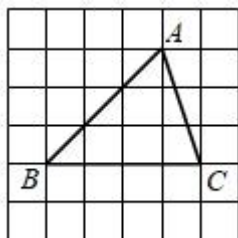
A.
$$\begin{cases} y=8x-3 \\ y=7x+4 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} y=8x+3 \\ y=7x+4 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} y=8x-3 \\ y=7x-4 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} y=8x+3 \\ y=7x-4 \end{cases}$$

9. 如图, $\triangle ABC$ 的顶点是正方形网格的格点, 则 $\cos \angle ABC$ 的值为 ()



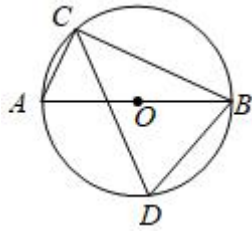
A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

10. 如图, C, D 是 $\odot O$ 上直径 AB 两侧的两点, 设 $\angle ABC=25^\circ$, 则 $\angle BDC=$ ()



- A. 85° B. 75° C. 70° D. 65°

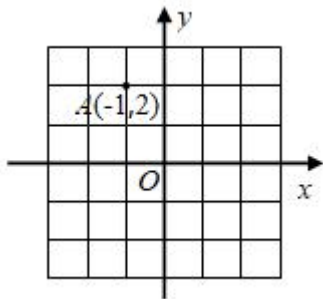
11. 从前，古希腊一位庄园主把一块边长为 a 米 ($a > 6$) 的正方形土地租给租户张老汉，第二年，他对张老汉说：“我把这块地的一边增加 6 米，相邻的另一边减少 6 米，变成矩形土地继续租给你，租金不变，你也没有吃亏，你看如何？”如果这样，你觉得张老汉的租地面积会 ()

- A. 没有变化 B. 变大了 C. 变小了 D. 无法确定

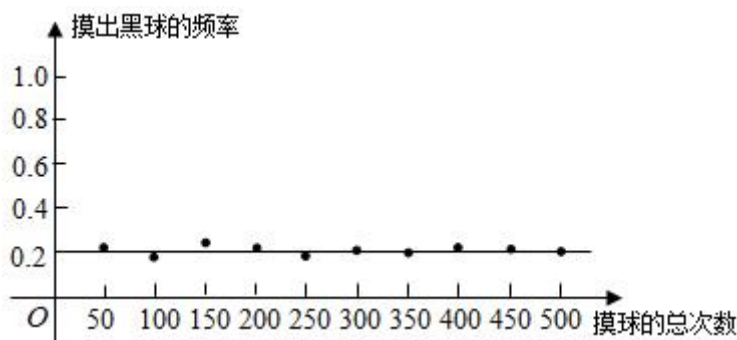
二、填空题 (将答案写在答题卡上指定的位置.每小题 3 分, 计 12 分.)

12. 用正负数表示气温的变化量, 上升为正, 下降为负. 登山队攀登一座山峰, 每登高 1km 气温的变化量为 -6°C , 攀登 2km 后, 气温下降 _____ $^\circ\text{C}$.

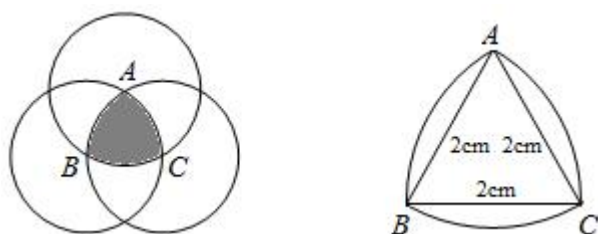
13. 如图, 在平面直角坐标系中, 将点 $A(-1, 2)$ 向右平移 2 个单位长度得到点 B , 则点 B 关于 x 轴的对称点 C 的坐标是 _____.



14. 社团课上, 同学们进行了“摸球游戏”: 在一个不透明的盒子里装有几个除颜色不同外其余均相同的黑、白两种球, 将盒子里面的球搅匀后从中随机摸出一个球记下颜色, 再把它放回盒子中, 不断重复上述过程. 整理数据后, 制作了“摸出黑球的频率”与“摸球的总次数”的关系图象如图所示, 经分析可以推断盒子里个数比较多的是 _____. (填“黑球”或“白球”)



15. “莱洛三角形”是工业生产中加工零件时广泛使用的一种图形. 如图, 以边长为 2 厘米的等边三角形 ABC 的三个顶点为圆心, 以边长为半径画弧, 三段圆弧围成的图形就是“莱洛三角形”, 该“莱洛三角形”的面积为 _____ 平方厘米. (圆周率用 π 表示)



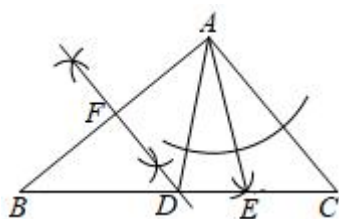
三、解答题 (将解答过程写在答题卡上指定的位置, 本大题共有 9 小题, 计 75 分.)

16. (6 分) 先化简, 再求值: $\frac{2}{x^2-1} \div \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$, 从 1, 2, 3 这三个数中选择一个你认为适合的 x 代入求值.

17. (6 分) 解不等式组 $\begin{cases} x-3(x-2) \geq 4 \\ \frac{2x-1}{3} \leq \frac{x+1}{2} \end{cases}$.

18. (7 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 50^\circ$.

- (1) 通过观察尺规作图的痕迹, 可以发现直线 DF 是线段 AB 的 _____, 射线 AE 是 $\angle DAC$ 的 _____;
- (2) 在 (1) 所作的图中, 求 $\angle DAE$ 的度数.



19. (7 分) 国家规定“中小学生每天在校体育活动时间不低于 1h”. 为此, 某市就“每天在校体育活动时间”的问题随机调查了辖区内部分初中学生, 根据调查结果绘制成的统计

图（部分）如图所示，其中分组情况是：

A 组： $t < 0.5h$

B 组： $0.5h \leq t < 1h$

C 组： $1h \leq t < 1.5h$

D 组： $t \geq 1.5h$

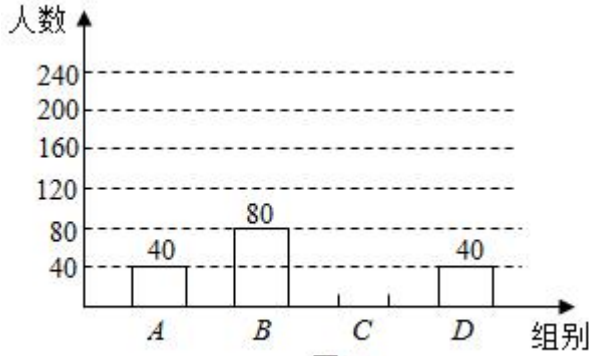


图 1

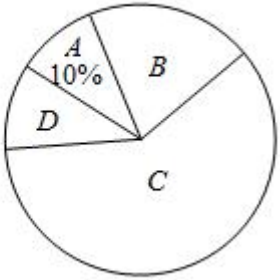


图 2

请根据上述信息解答下列问题：

- (1) 本次调查的人数是 _____ 人；
- (2) 请根据题中的信息补全频数分布直方图；
- (3) D 组对应扇形的圆心角为 _____ $^{\circ}$ ；
- (4) 本次调查数据的中位数落在 _____ 组内；
- (5) 若该市辖区约有 80000 名初中学生，请估计其中达到国家规定体育活动时间的学生人数约有多少。

20. (8 分) 甲超市在端午节这天进行苹果优惠促销活动，苹果的标价为 10 元/kg，如果一次购买 4kg 以上的苹果，超过 4kg 的部分按标价 6 折售卖。

x (单位：kg) 表示购买苹果的重量， y (单位：元) 表示付款金额。

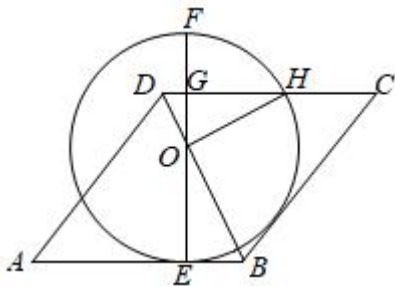
- (1) 文文购买 3kg 苹果需付款 _____ 元；购买 5kg 苹果需付款 _____ 元；
- (2) 求付款金额 y 关于购买苹果的重量 x 的函数解析式；
- (3) 当天，隔壁的乙超市也在进行苹果优惠促销活动，同样的苹果的标价也为 10 元/kg，且全部按标价的 8 折售卖，文文如果要购买 10kg 苹果，请问她在哪个超市购买更划算？

21. (8 分) 如图，在菱形 $ABCD$ 中， O 是对角线 BD 上一点 ($BO > DO$)， $OE \perp AB$ ，垂足为 E ，以 OE 为半径的 $\odot O$ 分别交 DC 于点 H ，交 EO 的延长线于点 F ， EF 与 DC 交于点 G 。

- (1) 求证： BC 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 若 G 是 OF 的中点， $OG = 2$ ， $DG = 1$ 。

①求 $\widehat{HE}$ 的长;

②求 AD 的长.



22. (10 分) 随着农业技术的现代化, 节水型灌溉得到逐步推广. 喷灌和滴灌是比漫灌更节水的灌溉方式, 喷灌和滴灌时每亩用水量分别是漫灌时的 30% 和 20%. 去年, 新丰收公司用各 100 亩的三块试验田分别采用喷灌、滴灌和漫灌的灌溉方式, 共用水 15000 吨.

(1) 请问用漫灌方式每亩用水多少吨? 去年每块试验田各用水多少吨?

(2) 今年该公司加大对农业灌溉的投入, 喷灌和滴灌试验田的面积都增加了 $m\%$, 漫灌试验田的面积减少了 $2m\%$. 同时, 该公司通过维修灌溉输水管道, 使得三种灌溉方式下的每亩用水量都进一步减少了 $m\%$. 经测算, 今年的灌溉用水量比去年减少 $\frac{9}{5}m\%$, 求 m 的值.

(3) 节水不仅为了环保, 也与经济收益有关系. 今年, 该公司全部试验田在灌溉输水管道维修方面每亩投入 30 元, 在新增的喷灌、滴灌试验田添加设备所投入经费为每亩 100 元, 在 (2) 的情况下, 若每吨水费为 2.5 元, 请判断, 相比去年因用水量减少所节省的水费是否大于今年的以上两项投入之和?

23. (11 分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是边 AB 上一点, $BE=BC$, $EF \perp CD$, 垂足为 F . 将四边形 $CBEF$ 绕点 C 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), 得到四边形 $CB'E'F'$, $B'E'$ 所在的直线分别交直线 BC 于点 G , 交直线 AD 于点 P , 交 CD 于点 K . $E'F'$ 所在的直线分别交直线 BC 于点 H , 交直线 AD 于点 O , 连接 $B'F'$ 交 CD 于点 O .

(1) 如图 1, 求证: 四边形 $BEFC$ 是正方形;

(2) 如图 2, 当点 Q 和点 D 重合时.

①求证: $GC = DC$;

②若 $OK=1$, $CO=2$, 求线段 GP 的长;

(3) 如图 3, 若 $BM \parallel F'B'$ 交 GP 于点 M , $\tan \angle G = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{S_{\triangle GMB}}{S_{\triangle CF'H}}$ 的值.

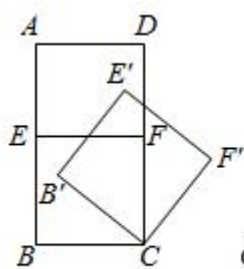


图 1

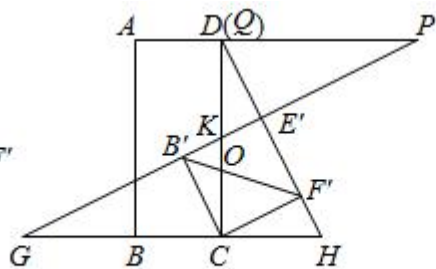


图 2

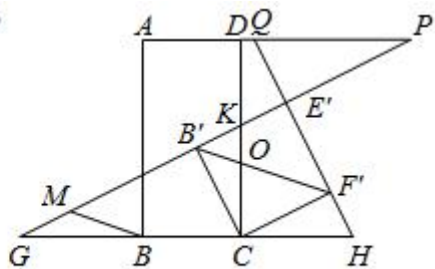


图 3

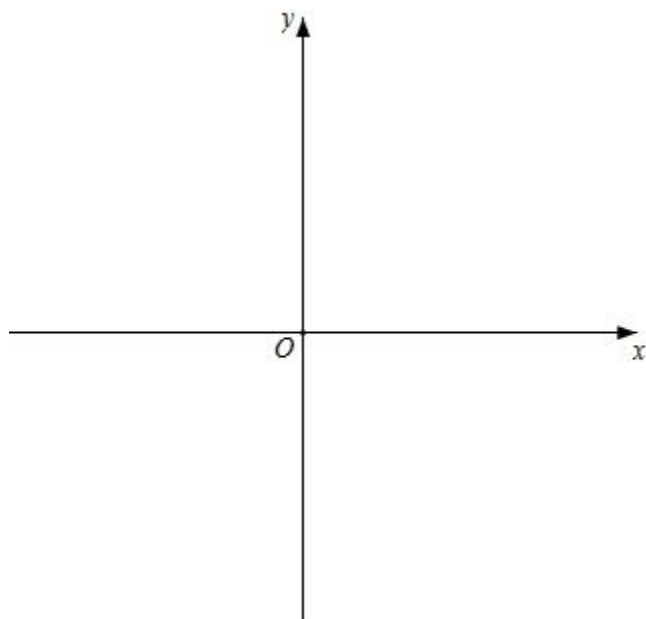
24. (12 分) 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y_1 = -(x+4)(x-n)$ 与 x 轴交于点 A 和点 $B(n, 0)$ ($n \geq -4$), 顶点坐标记为 (h_1, k_1) . 抛物线 $y_2 = -(x+2n)^2 - n^2 + 2n + 9$ 的顶点坐标记为 (h_2, k_2) .

(1) 写出 A 点坐标;

(2) 求 k_1, k_2 的值 (用含 n 的代数式表示)

(3) 当 $-4 \leq n \leq 4$ 时, 探究 k_1 与 k_2 的大小关系;

(4) 经过点 $M(2n+9, -5n^2)$ 和点 $N(2n, 9-5n^2)$ 的直线与抛物线 $y_1 = -(x+4)(x-n)$, $y_2 = -(x+2n)^2 - n^2 + 2n + 9$ 的公共点恰好为 3 个不同点时, 求 n 的值.



2021 年湖北省宜昌市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（下列各小题中，只有一个选项是符合题目要求的，请在答题卡上指定的位置填涂符合要求的选项前面的字母代号，每小题 3 分，计 33 分）

1. -2021 的倒数是（ ）

- A. 2021 B. -2021 C. $\frac{1}{2021}$ D. $-\frac{1}{2021}$

【分析】根据乘积是 1 的两个数互为倒数判断即可.

【解答】解： -2021 的倒数是 $-\frac{1}{2021}$.

故选：D.

2. 下列四幅图案是四所大学校徽的主体标识，其中是中心对称图形的是（ ）



【分析】把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形. 据此判断即可.

【解答】解：A. 不是中心对称图形，故本选项不合题意；

B. 不是中心对称图形，故本选项不合题意；

C. 是中心对称图形，故本选项符合题意；

D. 不是中心对称图形，故本选项不合题意.

故选：C.

3. 2021 年 5 月 15 日 07 时 18 分，“天问一号”火星探测器成功登陆火星表面，开启了中国人自主探测火星之旅. 地球与火星的最近距离约为 5460 万公里. “5460 万”用科学记数法表示为（ ）



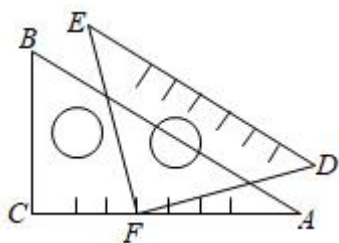
- A. 5.46×10^2 B. 5.46×10^3 C. 5.46×10^6 D. 5.46×10^7

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数．

【解答】解：5460 万 $= 54600000 = 5.46 \times 10^7$ ，

故选：D．

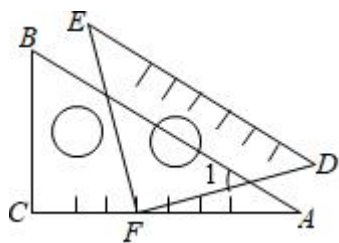
4. 如图，将一副三角尺按图中所示位置摆放，点 F 在 AC 上，其中 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle EFD = 90^\circ$ ， $\angle DEF = 45^\circ$ ， $AB \parallel DE$ ，则 $\angle AFD$ 的度数是（ ）



- A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

【分析】利用三角形的内角和定理可得 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle D = 45^\circ$ ，由平行线的性质定理可得 $\angle 1 = \angle D = 45^\circ$ ，利用三角形外角的性质可得结果．

【解答】解：如图，



$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle ACB - \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\because \angle EFD = 90^\circ, \angle DEF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle D = 180^\circ - \angle EFD - \angle DEF = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\because AB \parallel DE,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle D = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle 1 - \angle A = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ,$$

故选：A.

5. 下列运算正确的是 ()

A. $x^3 + x^3 = x^6$ B. $2x^3 - x^3 = x^3$ C. $(x^3)^2 = x^5$ D. $x^3 \cdot x^3 = x^9$

【分析】分别根据合并同类项法则，幂的乘方运算法则以及同底数幂的乘法法则逐一判断即可；合并同类项的法则：把同类项的系数相加，所得结果作为系数，字母和字母的指数不变；幂的乘方，底数不变，指数相乘；同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

【解答】解：A. $x^3 + x^3 = 2x^3$ ，故本选项不合题意；

B. $2x^3 - x^3 = x^3$ ，故本选项符合题意；

C. $(x^3)^2 = x^6$ ，故本选项不合题意；

D. $x^3 \cdot x^3 = x^6$ ，故本选项不合题意；

故选：B.

6. 在六张卡片上分别写有 6 ， $-\frac{22}{7}$ ， 3.1415 ， π ， 0 ， $\sqrt{3}$ 六个数，从中随机抽取一张，卡片上的数为无理数的概率是 ()

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

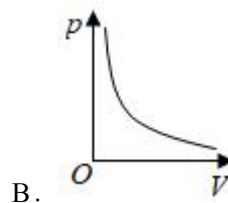
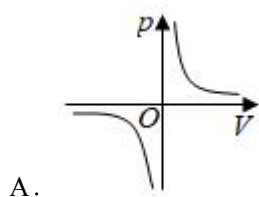
【分析】先找出无理数，再利用概率公式求解即可求得答案.

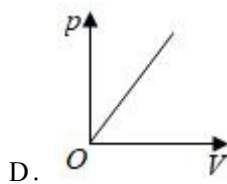
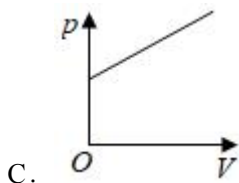
【解答】解： $\because$ 六张卡片上分别写有 6 ， $-\frac{22}{7}$ ， 3.1415 ， π ， 0 ， $\sqrt{3}$ 六个数，无理数的是 π ， $\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 从中任意抽取一张卡片上的数为无理数的概率是： $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

故选：C.

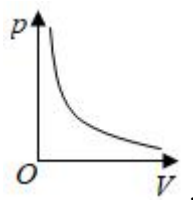
7. 某气球内充满了一定质量 m 的气体，当温度不变时，气球内气体的气压 p (单位：kPa) 是气体体积 V (单位： m^3) 的反比例函数： $p = \frac{m}{V}$ ，能够反映两个变量 p 和 V 函数关系的图象是 ()





【分析】直接利用反比例函数的性质，结合 p ， V 的取值范围得出其函数图象分布在第一象限，即可得出答案.

【解答】解：∵ 气球内气体的气压 p (单位： kPa) 是气体体积 V (单位： m^3) 的反比例函数： $p = \frac{m}{V}$ (V ， p 都大于零)，



∴ 能够反映两个变量 p 和 V 函数关系的图象是：

故选：B.

8. 我国古代数学经典著作《九章算术》中有这样一题，原文是：“今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四. 问人数、物价各几何？”意思是：今有人合伙购物，每人出八钱，会多三钱；每人出七钱，又差四钱. 问人数、物价各多少？设人数为 x 人，物价为 y 钱，下列方程组正确的是 ()

A.
$$\begin{cases} y=8x-3 \\ y=7x+4 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} y=8x+3 \\ y=7x+4 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} y=8x-3 \\ y=7x-4 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} y=8x+3 \\ y=7x-4 \end{cases}$$

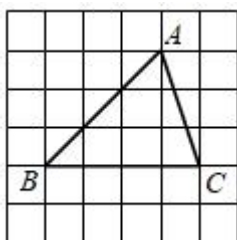
【分析】设有 x 人，买此物的钱数为 y ，根据关键语句“人出八，盈三；人出七，不足四”列出方程组即可.

【解答】解：设有 x 人，买此物的钱数为 y ，

由题意得：
$$\begin{cases} y=8x-3 \\ y=7x+4 \end{cases},$$

故选：A.

9. 如图， $\triangle ABC$ 的顶点是正方形网格的格点，则 $\cos \angle ABC$ 的值为 ()



A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

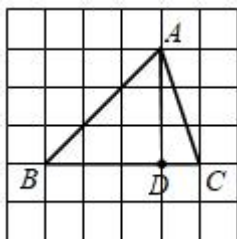
C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【分析】由图可知，可把 $\angle ABC$ 放在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，利用勾股定理可求出斜边 AB 的长，

$$\text{再利用余弦的定义可得 } \cos \angle ABC = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【解答】解：法一、如图，



在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\angle ADB = 90^\circ$ ， $AD = BD = 3$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选：B.

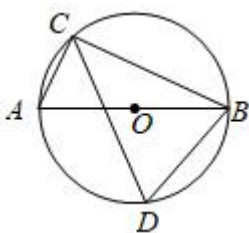
法二、在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\angle ADB = 90^\circ$ ， $AD = BD = 3$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle BAD = 45^\circ,$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选：B.

10. 如图， C, D 是 $\odot O$ 上直径 AB 两侧的两点，设 $\angle ABC = 25^\circ$ ，则 $\angle BDC =$ （ ）



A. 85°

B. 75°

C. 70°

D. 65°

【分析】连接 OC ，根据圆周角定理可得 $\angle AOC$ 的度数，再根据平角的性质可得 $\angle BOC$ 的度数，再根据圆周角定理即可求出 $\angle BDC$ 的度数.

【解答】解：连接 OC ，如图，

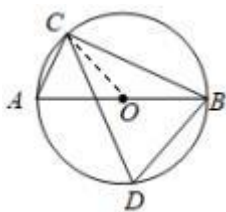
$$\because \angle ABC = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle ABC = 2 \times 25^\circ = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \times 130^\circ = 65^\circ.$$

故选：D.



11. 从前，古希腊一位庄园主把一块边长为 a 米 ($a > 6$) 的正方形土地租给租户张老汉，第二年，他对张老汉说：“我把这块地的一边增加 6 米，相邻的另一边减少 6 米，变成矩形土地继续租给你，租金不变，你也没有吃亏，你看如何？”如果这样，你觉得张老汉的租地面积会 ()

A. 没有变化 B. 变大了 C. 变小了 D. 无法确定

【分析】 矩形的长为 $(a+6)$ 米，矩形的宽为 $(a-6)$ 米，矩形的面积为 $(a+6)(a-6)$ ，根据平方差公式即可得出答案.

【解答】 解：矩形的面积为 $(a+6)(a-6) = a^2 - 36$ ，

$\therefore$ 矩形的面积比正方形的面积 a^2 小了 36 平方米，

故选：C.

二、填空题（将答案写在答题卡上指定的位置.每小题 3 分，计 12 分.）

12. 用正负数表示气温的变化量，上升为正，下降为负. 登山队攀登一座山峰，每登高 1km 气温的变化量为 -6°C ，攀登 2km 后，气温下降 12 $^\circ\text{C}$.

【分析】 根据每登高 1km 气温的变化量为 -6°C ，可以得到登 2km 后，气温下降的度数.

【解答】 解：由题意可得，

$$2 \div 1 \times (-6)$$

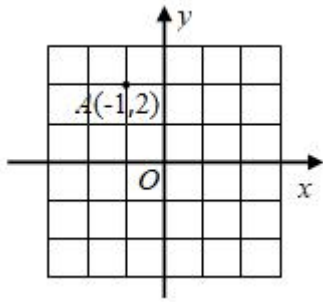
$$= 2 \times (-6)$$

$$= -12 (^\circ\text{C}),$$

即气温下降 12°C ，

故答案为：12.

13. 如图，在平面直角坐标系中，将点 $A(-1, 2)$ 向右平移 2 个单位长度得到点 B ，则点 B 关于 x 轴的对称点 C 的坐标是 $(1, -2)$.



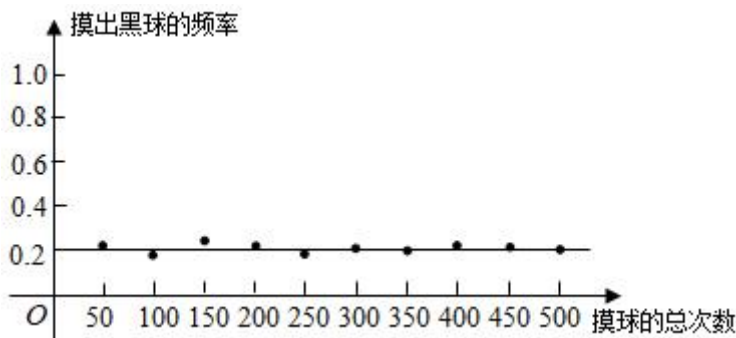
【分析】直接利用平移的性质得出 B 点坐标，再利用关于 x 轴对称点的坐标特点：横坐标不变，纵坐标互为相反数，即可得出答案．

【解答】解：∵ 将点 $A(-1, 2)$ 向右平移 2 个单位长度得到点 B ，
 ∴ $B(1, 2)$ ，

则点 B 关于 x 轴的对称点 C 的坐标是 $(1, -2)$ ．

故答案为： $(1, -2)$ ．

14. 社团课上，同学们进行了“摸球游戏”：在一个不透明的盒子里装有几个除颜色不同外其余均相同的黑、白两种球，将盒子里面的球搅匀后从中随机摸出一个球记下颜色，再把它放回盒子中，不断重复上述过程．整理数据后，制作了“摸出黑球的频率”与“摸球的总次数”的关系图象如图所示，经分析可以推断盒子里个数比较多的是 白 球．（填“黑球”或“白球”）

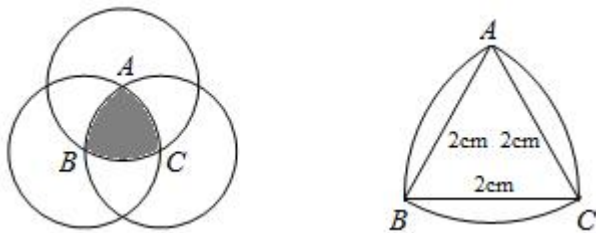


【分析】根据频率估计概率得出摸到黑球的近似概率，再得出摸到白球的概率，即可推断出是白球多还是黑球多．

【解答】解：由图可知，摸出黑球的概率约为 0.2，
 ∴ 摸出白球的概率约为 0.8，
 ∴ 白球的个数比较多，
 故答案为白球．

15. “莱洛三角形”是工业生产中加工零件时广泛使用的一种图形．如图，以边长为 2 厘米

的等边三角形 ABC 的三个顶点为圆心, 以边长为半径画弧, 三段圆弧围成的图形就是“莱洛三角形”, 该“莱洛三角形”的面积为 $(2\pi - 2\sqrt{3})$ 平方厘米. (圆周率用 π 表示)



【分析】 图中三角形的面积是由三块相同的扇形叠加而成, 其面积等于三块扇形的面积相加, 再减去两个等边三角形的面积, 分别求出即可.

【解答】 解: 过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ,

$$\because AB = AC = BC = 2 \text{ 厘米}, \angle BAC = \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\because AD \perp BC,$$

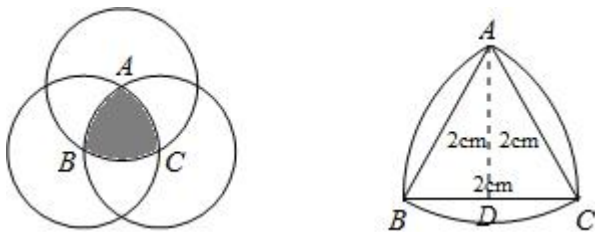
$$\therefore BD = CD = 1 \text{ 厘米}, AD = \sqrt{3}BD = \sqrt{3} \text{ 厘米},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}BC \cdot AD = \sqrt{3} \text{ (厘米}^2\text{)},$$

$$S_{\text{扇形} BAC} = \frac{60\pi \times 2^2}{360} = \frac{2}{3}\pi \text{ (厘米}^2\text{)},$$

$$\therefore \text{莱洛三角形的面积 } S = 3 \times \frac{2}{3}\pi - 2 \times \sqrt{3} = (2\pi - 2\sqrt{3}) \text{ 厘米}^2,$$

故答案为: $(2\pi - 2\sqrt{3})$.



三、解答题 (将解答过程写在答题卡上指定的位置, 本大题共有 9 小题, 计 75 分.)

16. (6 分) 先化简, 再求值: $\frac{2}{x^2-1} \div \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$, 从 1, 2, 3 这三个数中选择一个你认为适合的 x 代入求值.

【分析】 根据分式的除法和减法可以化简题目中的式子, 然后从 1, 2, 3 这三个数中选择一个使得原分式有意义的值代入化简后的式子即可解答本题.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: } & \frac{2}{x^2-1} \div \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} \cdot (x+1) - \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{x-1},$$

$$\because (x+1)(x-1) \neq 0,$$

$$\therefore x \neq 1, -1,$$

$$\therefore x = 2 \text{ 或 } 3,$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{2-1} = 1.$$

17. (6分) 解不等式组
$$\begin{cases} x-3(x-2) \geq 4 \\ \frac{2x-1}{3} \leq \frac{x+1}{2} \end{cases}.$$

【分析】先求出每个不等式的解集，再求出不等式组的解集即可.

【解答】解：
$$\begin{cases} x-3(x-2) \geq 4 \text{ ①} \\ \frac{2x-1}{3} \leq \frac{x+1}{2} \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①得： $x \leq 1$,

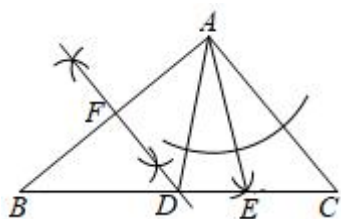
解不等式②得： $x \leq 5$,

$\therefore$ 不等式组解集为 $x \leq 1$.

18. (7分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 40^\circ$ ， $\angle C = 50^\circ$.

(1) 通过观察尺规作图的痕迹，可以发现直线 DF 是线段 AB 的 垂直平分线，射线 AE 是 $\angle DAC$ 的 角平分线；

(2) 在 (1) 所作的图中，求 $\angle DAE$ 的度数.



【分析】(1) 根据作图痕迹判断即可.

(2) 想办法求出 $\angle CAD$ ，可得结论.

【解答】解：(1) 通过观察尺规作图的痕迹，可以发现直线 DF 是线段 AB 的垂直平分线，射线 AE 是 $\angle DAC$ 的角平分线.

故答案为：垂直平分线，角平分线.

(2) $\because DF$ 垂直平分线段 AB ,

$$\begin{aligned}
&\therefore DA = DB, \\
&\therefore \angle BAD = B = 40^\circ, \\
&\because \angle B = 40^\circ, \angle C = 50^\circ, \\
&\therefore \angle BAC = 90^\circ, \\
&\therefore \angle CAD = 50^\circ, \\
&\because AE \text{ 平分 } \angle CAD, \\
&\therefore \angle DAE = \frac{1}{2} \angle CAD = 25^\circ.
\end{aligned}$$

19. (7分) 国家规定“中小学生每天在校体育活动时间不低于1h”. 为此, 某市就“每天在校体育活动时间”的问题随机调查了辖区内部分初中学生, 根据调查结果绘制成的统计图(部分)如图所示, 其中分组情况是:

A组: $t < 0.5h$

B组: $0.5h \leq t < 1h$

C组: $1h \leq t < 1.5h$

D组: $t \geq 1.5h$

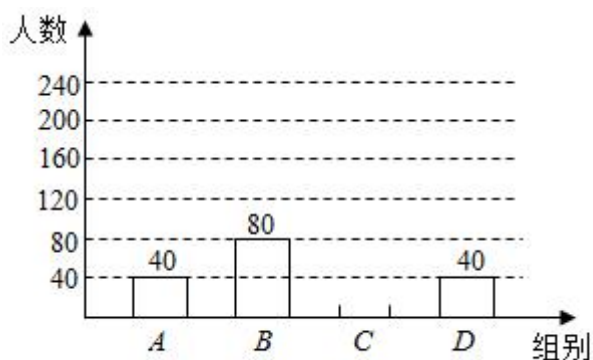


图 1

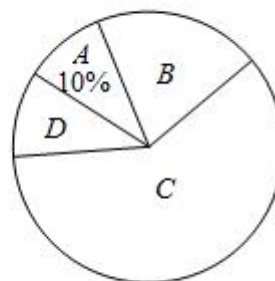


图 2

请根据上述信息解答下列问题:

- (1) 本次调查的人数是 400 人;
- (2) 请根据题中的信息补全频数分布直方图;
- (3) D组对应扇形的圆心角为 36°;
- (4) 本次调查数据的中位数落在 C 组内;
- (5) 若该市辖区约有 80000 名初中学生, 请估计其中达到国家规定体育活动时间的学生人数约有多少.

【分析】(1) 根据 A 组的人数和百分比即可求出总人数;

(2) 根据总人数和条形统计图即可求出 C 组人数;

(3) 先算出 D 组所占的百分比, 再求出对应的圆心角;

(4) 根据第 200 个和第 201 个数据所在的组即可求出中位数所在的组;

(5) 根据优秀人数的百分比即可估算出全市优秀的人数.

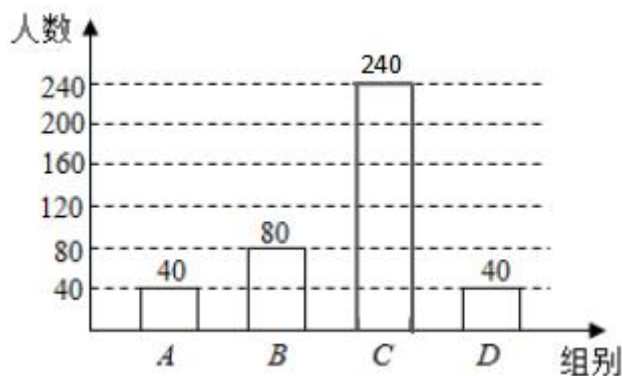
【解答】解: (1) $\because A$ 组有 40 人, 占 10%,

$$\therefore \text{总人数为 } \frac{40}{10\%} = 400 \text{ (人)},$$

故答案为 400;

(2) C 组的人数为 $400 - 40 - 80 - 40 = 240$ (人),

统计图如下:



(3) D 组所占的百分比为 $\frac{40}{400} \times 100\% = 10\%$,

$\therefore D$ 组所对的圆心角为 $360^\circ \times 10\% = 36^\circ$,

故答案为 36;

(4) 中位数为第 200 个数据和第 201 个数据的平均数, 都在 C 组,

$\therefore$ 中位数在 C 组,

故答案为 C ;

(5) 优秀人数所占的百分比为 $\frac{280}{400} \times 100\% = 70\%$,

$\therefore$ 全市优秀人数大约为 $80000 \times 70\% = 56000$ (人).

20. (8 分) 甲超市在端午节这天进行苹果优惠促销活动, 苹果的标价为 10 元/kg, 如果一次购买 4kg 以上的苹果, 超过 4kg 的部分按标价 6 折售卖.

x (单位: kg) 表示购买苹果的重量, y (单位: 元) 表示付款金额.

(1) 文文购买 3kg 苹果需付款 30 元; 购买 5kg 苹果需付款 46 元;

(2) 求付款金额 y 关于购买苹果的重量 x 的函数解析式;

(3) 当天, 隔壁的乙超市也在进行苹果优惠促销活动, 同样的苹果的标价也为 10 元/kg,

且全部按标价的 8 折售卖，文文如果要购买 10kg 苹果，请问她在哪个超市购买更划算？

【分析】（1）根据题意直接写出购买 3kg 和 5kg 苹果所需付款；

（2）分 $0 < x \leq 4$ 和 $x > 4$ 两种情况写出函数解析式即可；

（3）通过两种付款比较那个超市便宜即可．

【解答】解：（1）由题意可知：文文购买 3kg 苹果，不优惠，

$\therefore$ 文文购买 3kg 苹果需付款： $3 \times 10 = 30$ （元），

购买 5kg 苹果，4kg 不优惠，1kg 优惠，

$\therefore$ 购买 5kg 苹果需付款： $4 \times 10 + 1 \times 10 \times 0.6 = 46$ （元），

故答案为：30，46；

（2）由题意得：

当 $0 < x \leq 4$ 时， $y = 4x$ ，

当 $x > 4$ 时， $y = 4 \times 10 + (x - 4) \times 10 \times 0.6 = 6x + 16$ ，

$\therefore$ 付款金额 y 关于购买苹果的重量 x 的函数解析式为： $y = \begin{cases} 4x (0 < x \leq 4) \\ 6x + 16 (x > 4) \end{cases}$ ；

（3）文文在甲超市购买 10kg 苹果需付费： $6 \times 10 + 16 = 76$ （元），

文文在乙超市购买 10kg 苹果需付费： $10 \times 10 \times 0.8 = 80$ （元），

$\therefore$ 文文应该在甲超市购买更划算．

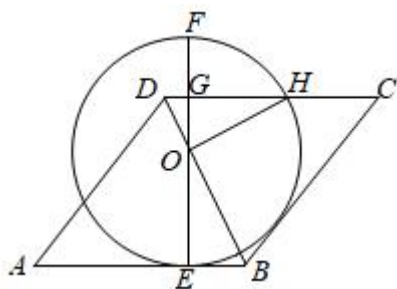
21.（8 分）如图，在菱形 $ABCD$ 中， O 是对角线 BD 上一点（ $BO > DO$ ）， $OE \perp AB$ ，垂足为 E ，以 OE 为半径的 $\odot O$ 分别交 DC 于点 H ，交 EO 的延长线于点 F ， EF 与 DC 交于点 G ．

（1）求证： BC 是 $\odot O$ 的切线；

（2）若 G 是 OF 的中点， $OG = 2$ ， $DG = 1$ ．

①求 $\widehat{HE}$ 的长；

②求 AD 的长．



【分析】（1）过点 O 作 $OM \perp BC$ 于点 M ，证明 $OM = OE$ 即可；

（2）①先求出 $\angle HOE = 120^\circ$ ，再求出 $OH = 4$ ，代入弧长公式即可；

【解答】解：（1）证明：如图 1，过点 O 作 $OM \perp BC$ 于点 M ，

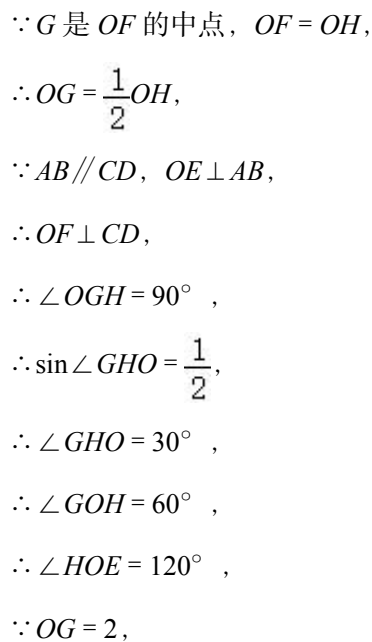
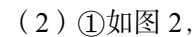
$\therefore BD$ 是菱形 $ABCD$ 的对角线，

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$ ，

$\therefore OM \perp BC$ ， $OE \perp AB$ ，

$\therefore OE = OM$ ，

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的切线。



$$\therefore OH = 4,$$

$$\therefore \text{由弧长公式得到} \widehat{HE} \text{的长: } \frac{120 \times 4 \times \pi}{180} = \frac{8}{3} \pi.$$

②如图 3, 过 A 作 $AN \perp BD$ 于点 N ,

$$\because DG = 1, OG = 2, OE = OH = 4,$$

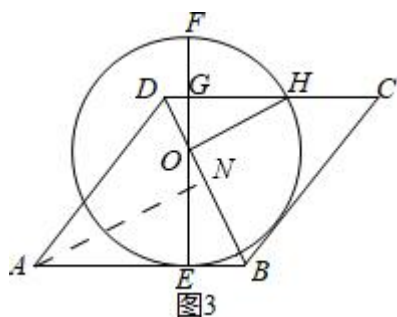
$$\therefore OD = \sqrt{5}, OB = 2\sqrt{5}, DN = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \triangle DOG \sim \triangle DAN,$$

$$\therefore \frac{OD}{AD} = \frac{DG}{DN},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{AD} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{5}}{2}},$$

$$\therefore AD = \frac{15}{2}.$$



22. (10 分) 随着农业技术的现代化, 节水型灌溉得到逐步推广. 喷灌和滴灌是比漫灌更节水的灌溉方式, 喷灌和滴灌时每亩用水量分别是漫灌时的 30% 和 20%. 去年, 新丰收公司用各 100 亩的三块试验田分别采用喷灌、滴灌和漫灌的灌溉方式, 共用水 15000 吨.

(1) 请问用漫灌方式每亩用水多少吨? 去年每块试验田各用水多少吨?

(2) 今年该公司加大对农业灌溉的投入, 喷灌和滴灌试验田的面积都增加了 $m\%$, 漫灌试验田的面积减少了 $2m\%$. 同时, 该公司通过维修灌溉输水管道, 使得三种灌溉方式下的每亩用水量都进一步减少了 $m\%$. 经测算, 今年的灌溉用水量比去年减少 $\frac{9}{5}m\%$, 求 m 的值.

(3) 节水不仅为了环保, 也与经济收益有关系. 今年, 该公司全部试验田在灌溉输水管道维修方面每亩投入 30 元, 在新增的喷灌、滴灌试验田添加设备所投入经费为每亩 100 元, 在 (2) 的情况下, 若每吨水费为 2.5 元, 请判断, 相比去年因用水量减少所节省的水费是否大于今年的以上两项投入之和?

【分析】 (1) 设漫灌方式每亩用水 x 吨, 则 $100x + 100 \times 30\%x + 100 \times 20\%x = 15000$, 解得

$x = 100$ ，可得结论；

(2) 由“今年的灌溉用水量比去年减少 $\frac{9}{5}m\%$ ”可列出等式，进而求出 m 的值；

(3) 分别计算去年因用水量减少所节省的水费和今天的两项投入之和，再进行比较即可.

【解答】解：(1) 设漫灌方式每亩用水 x 吨，则

$$100x + 100 \times 30\%x + 100 \times 20\%x = 15000,$$

解得 $x = 100$,

$\therefore$ 漫灌用水： $100 \times 100 = 10000$ 吨，

喷灌用水： $30\% \times 10000 = 3000$ 吨，

滴灌用水： $20\% \times 10000 = 2000$ 吨，

$\therefore$ 漫灌方式每亩用水100吨，漫灌试验田用水10000吨，喷灌试验田用水3000吨，滴灌试验田用水2000吨.

$$(2) \text{ 由题意可得, } 100 \times (1 - 2m\%) \times 100 \times (1 - m\%) + 100 \times (1 + m\%) \times 30 \times (1 - m\%) + 100 \times (1 + m\%) \times 20 \times (1 - m\%) = 15000 \times (1 - \frac{9}{5}m\%),$$

解得 $m = 0$ (舍), 或 $m = 20$,

$\therefore m = 20$.

$$(3) \text{ 节省水费: } 15000 \times \frac{9}{5}m\% \times 2.5 = 13500 \text{ 元,}$$

维修投入： $300 \times 30 = 9000$ 元，

新增设备： $100 \times 2m\% \times 100 = 4000$ 元，

$$13500 > 9000 + 4000,$$

$\therefore$ 节省水费大于两项投入之和.

23. (11分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， E 是边 AB 上一点， $BE = BC$ ， $EF \perp CD$ ，垂足为 F . 将四边形 $CBEF$ 绕点 C 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)，得到四边形 $CB'E'F'$ ， $B'E'$ 所在的直线分别交直线 BC 于点 G ，交直线 AD 于点 P ，交 CD 于点 K . $E'F'$ 所在的直线分别交直线 BC 于点 H ，交直线 AD 于点 Q ，连接 $B'F'$ 交 CD 于点 O .

(1) 如图1，求证：四边形 $BEFC$ 是正方形；

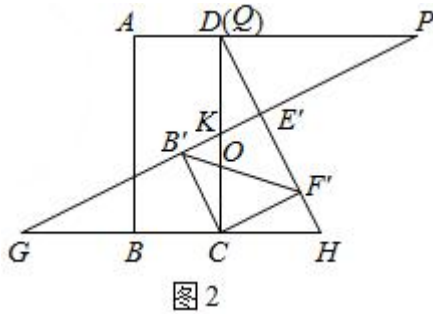
(2) 如图2，当点 Q 和点 D 重合时.

①求证： $GC = DC$ ；

②若 $OK = 1$ ， $CO = 2$ ，求线段 GP 的长；

$\therefore$ 四边形 $BEFC$ 是矩形,
 $\therefore BE = BC$,
 $\therefore$ 四边形 $BEFC$ 是正方形.

(2) ①证明: 如图 2 中,



$\because \angle GCK = \angle DCH = 90^\circ$,
 $\therefore \angle CDF' + \angle H = 90^\circ$, $\angle KGC + \angle H = 90^\circ$,
 $\therefore \angle KGC = \angle CDF'$,
 $\because B'C = CF'$, $\angle GB'C = \angle CF'D$,
 $\therefore \triangle CGB' \cong \triangle CDF'$ (ASA),
 $\therefore CG = CD$.

②解: 设正方形的边长为 a ,

$\because KB' \parallel CF'$,
 $\therefore \triangle B'KO \sim \triangle F'CO$,
 $\therefore \frac{B'K}{CF'} = \frac{OK}{CO} = \frac{1}{2}$,
 $\therefore B'K = \frac{1}{2}B'C = \frac{1}{2}a$,

在 $\text{Rt}\triangle B'KC$ 中, $B'K^2 + B'C^2 = CK^2$,

$$\therefore a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 3^2,$$

$$\therefore a = \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

由 $\frac{B'K}{CF'} = \frac{1}{2}$, 可得 $B'K = KE' = \frac{1}{2}a$,

$\because KE' \parallel CF'$

$\therefore \triangle DKE' \sim \triangle DCF'$,

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{DE'}{DF'} &= \frac{KE'}{CF'} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}, \\
\therefore DE' &= E'F' = a, \\
\therefore PE' &= 2a, \\
\therefore PK &= \frac{5}{2}a, \\
\because DK &= KC, \angle P = \angle G, \angle DKP = \angle GKC, \\
\therefore \triangle PKD &\cong \triangle GKC \text{ (AAS)}, \\
\therefore GK &= PK, \\
\therefore PG &= 2PK = 5a, \\
\therefore PG &= 5a = 6\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

(3) 解: 如图 3 中, 延长 $B'F'$ 交 CH 的延长线于 R .

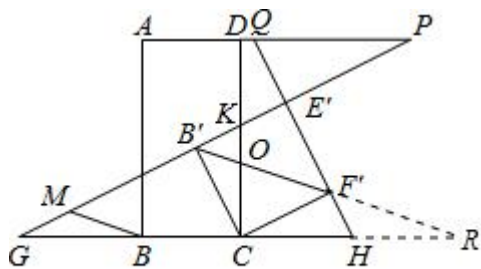


图 3

$$\begin{aligned}
\because CF' &\parallel GP, RB' \parallel BM, \\
\therefore \triangle GB' &\sim \triangle GRB', \angle G = \angle F'CR, \\
\therefore \tan \angle G &= \tan \angle F'CR = \frac{F'H}{CF'} = \frac{1}{2}, \\
\text{设 } F'H &= x, CF' = 2x, \text{ 则 } CH = \sqrt{5}x, \\
\therefore CB' &= CF' = E'F' = BC = 2x, \\
\therefore CB' &\parallel HE', \\
\therefore \triangle RB'C &\sim \triangle RF'H, \\
\therefore \frac{F'H}{B'C} &= \frac{RH}{RC} = \frac{RF'}{RB'} = \frac{1}{2}, \\
\therefore CH &= RH, B'F' = RF', \\
\therefore CR &= 2CH = 2\sqrt{5}x, \\
\therefore S_{\triangle CF'R} &= 2S_{\triangle CF'H},
\end{aligned}$$

$$\because CB' \parallel HE',$$

$$\therefore \triangle GB'C \sim \triangle GE'H,$$

$$\therefore \frac{GC}{GH} = \frac{B'C}{E'H} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{GB+2x}{GB+2x+\sqrt{5}x} = \frac{B'C}{E'H} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore GB = 2(\sqrt{5}-1)x,$$

$$\because \triangle GBM \sim \triangle CRF',$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle GMB}}{S_{\triangle CRF'}} = \left(\frac{BG}{CR}\right)^2 = \left[\frac{2(\sqrt{5}-1)x}{2\sqrt{5}x}\right]^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{5},$$

$$\because S_{\triangle CRF'} = 2S_{\triangle CHF'},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle GMB}}{S_{\triangle CF'H}} = \frac{12-4\sqrt{5}}{5}.$$

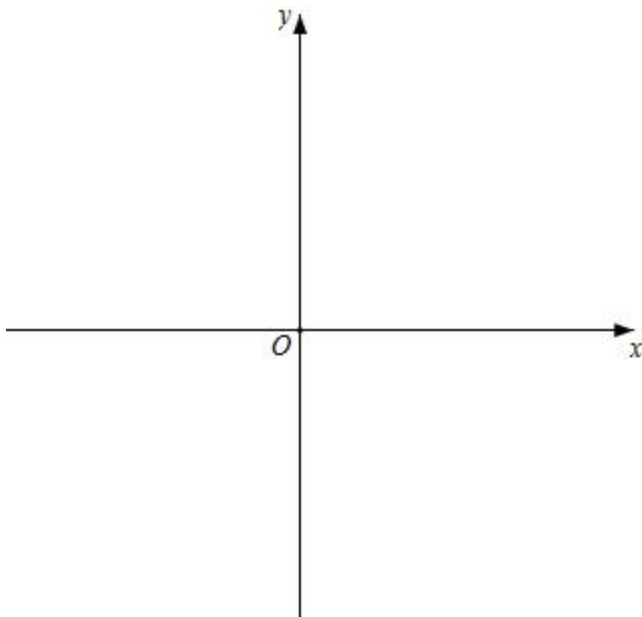
24. (12分) 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y_1 = -(x+4)(x-n)$ 与 x 轴交于点 A 和点 $B(n, 0)$ ($n \geq -4$), 顶点坐标记为 (h_1, k_1) . 抛物线 $y_2 = -(x+2n)^2 - n^2 + 2n + 9$ 的顶点坐标记为 (h_2, k_2) .

(1) 写出 A 点坐标;

(2) 求 k_1, k_2 的值 (用含 n 的代数式表示)

(3) 当 $-4 \leq n \leq 4$ 时, 探究 k_1 与 k_2 的大小关系;

(4) 经过点 $M(2n+9, -5n^2)$ 和点 $N(2n, 9-5n^2)$ 的直线与抛物线 $y_1 = -(x+4)(x-n)$, $y_2 = -(x+2n)^2 - n^2 + 2n + 9$ 的公共点恰好为 3 个不同点时, 求 n 的值.



【分析】(1) 令 $y_1 = 0$, 得到 x 值即为 A 、 B 的横坐标,

(2) 由顶点坐标公式可得顶点的纵坐标.

(3) 讨论 $k_1 - k_2 = \frac{5}{4}n^2 - 5$ 与 0 比较大小得 n 的取值范围, 即在不同的取值范围内得 k_1 、

k_2 大小.

(4) 两点确定一条直线的解析式, 直线 MN 的解析式为: $y = -x - 5n^2 + 2n + 9$. ①当直线 MN 经过抛物线 y_1 , y_2 的交点时, 联立抛物线 y_1 与 y_2 得解析式 $(5n - 4)x = -5n^2 - 2n + 9$

①, 联立直线 $y = -x - 5n^2 + 2n + 9$ 与抛物线 y_2 得解析式 $x^2 + (4n - 1)x = 0$, 解得 $n = \frac{-1 \pm \sqrt{46}}{5}$, 此时直线 MN 与抛物线 y_1 , y_2 的公共点恰好为三个不同点, 即 $(5n - 4)(1$

$- 4n) = -5n^2 - 2n + 9$, 该方程判别式 $\Delta < 0$, ②当直线 MN 与抛物线 y_1 或者与抛物线 y_2

只有一个公共点时, 当直线 MN 与抛物线 y_1 只有一个公共点时, 联立直线 $y = -x - 5n^2 + 2n + 9$ 与抛物线 $y = -x^2 + (n - 4)x + 4n$ 可得, $-x^2 + (n - 3)x + 5n^2 + 2n - 9 = 0$, 解得 $\therefore n = \frac{-1 \pm 2\sqrt{142}}{21}$, 由①而知直线 MN 与抛物线 y_2 公共点的横坐标为 $x_1 = 0$, $x_2 = 1 - 4n$,

$x_1 \neq x_2$, 所以此时直线 MN 与抛物线 y_1 , y_2 的公共点恰好为三个不同点, 联立直线 $y = -x - 5n^2 + 2n + 9$ 与抛物线 y_1 得: $-x^2 + (n - 3)x + 5n^2 + 2n - 9 = 0$, $\Delta = 21n^2 + 2n - 27$, 当 $n = \frac{1}{4}$ 时, $\Delta < 0$, 此时直线 MN 与抛物线 y_1 , y_2 的公共点只有一个, $n \neq \frac{1}{4}$.

【解答】解: (1) $\because y_1 = -(x - 4)(x - n)$,

令 $y_1 = 0$, $-(x - 4)(x - n) = 0$,

$\therefore x_1 = -4$, $x_2 = n$,

$\therefore A(-4, 0)$;

(2) $y_1 = -(x - 4)(x - n) = -x^2 + (n - 4)x + 4n$,

$\therefore k_1 = \frac{1}{4}n^2 + 2n + 4$,

$\because y_2 = -(x + 2n)^2 - n^2 + 2n + 9$,

$\therefore k_2 = -n^2 + 2n + 9$,

(3) $k_1 - k_2 = \frac{5}{4}n^2 - 5$,

①当 $\frac{5}{4}n^2 - 5 > 0$ 时, 可得 $n > 2$ 或 $n < -2$,

即当 $-4 \leq n < -2$ 或 $2 < n \leq 4$ 时, $k_1 > k_2$;

②当 $\frac{5}{4}n^2 - 5 < 0$ 时, 可得 $-2 < n < 2$,

即当 $-2 < n < 2$ 时, $k_1 < k_2$;

③当 $\frac{5}{4}n^2 - 5 = 0$, 可得 $n = 2$ 或 $n = -2$,

即当 $n = 2$ 或 $n = -2$ 时, $k_1 = k_2$;

(4) 设直线 MN 的解析式为: $y = kx + b$,

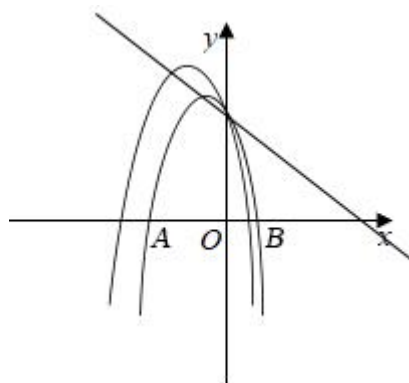
$$\text{则} \begin{cases} (2n+9)k+b=-5n^2 & \text{①} \\ 2nk+b=9-5n^2 & \text{②} \end{cases},$$

由① - ②得, $k = -1$,

$$\therefore b = -5n^2 + 2n + 9,$$

直线 MN 的解析式为: $y = -x - 5n^2 + 2n + 9$.

①如图:



当直线 MN 经过抛物线 y_1, y_2 的交点时,

联立抛物线 $y_1 = -x^2 + (n-4)x + 4n$ 与 $y_2 = -x^2 - 4nx - 5n^2 + 2n + 9$ 的解析式可得:

$$(5n-4)x = -5n^2 - 2n + 9 \text{①},$$

联立直线 $y = -x - 5n^2 + 2n + 9$ 与抛物线 $y_2 = -x^2 - 4nx - 5n^2 + 2n + 9$ 的解析式可得:

$$x^2 + (4n-1)x = 0,$$

$$\text{则 } x_1 = 0, x_2 = 1 - 4n \text{②},$$

当 $x_1 = 0$ 时, 把 $x_1 = 0$ 代入 y_1 得: $y = 4n$,

把 $x_1 = 0, y = 4n$ 代入直线的解析式得:

$$4n = -5n^2 + 2n + 9,$$

$$\therefore 5n^2 + 2n - 9 = 0,$$

$$\therefore n = \frac{-1 \pm \sqrt{46}}{5},$$

此时直线 MN 与抛物线 y_1, y_2 的公共点恰好为三个不同点,

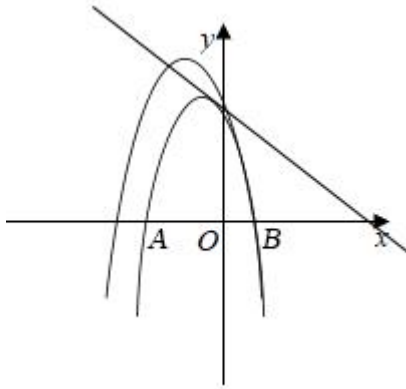
当 $x_2 = 1 - 4n$ 时, 把 $x_2 = 1 - 4n$ 代入①得:

$$(5n - 4)(1 - 4n) = -5n^2 - 2n + 9,$$

该方程判别式 $\Delta < 0$,

所以该方程没有实数根;

②如图:



当直线 MN 与抛物线 y_1 或者与抛物线 y_2 只有一个公共点时,

当直线 MN 与抛物线 $y_1 = -x^2 + (n - 4)x + 4n$ 只有一个公共点时,

联立直线 $y = -x - 5n^2 + 2n + 9$ 与抛物线 $y = -x^2 + (n - 4)x + 4n$ 可得,

$$-x^2 + (n - 3)x + 5n^2 + 2n - 9 = 0,$$

此时 $\Delta = 0$, 即 $(n - 3)^2 + 4(5n^2 + 2n - 9) = 0$,

$$\therefore 21n^2 + 2n - 27 = 0,$$

$$\therefore n = \frac{-1 \pm 2\sqrt{142}}{21},$$

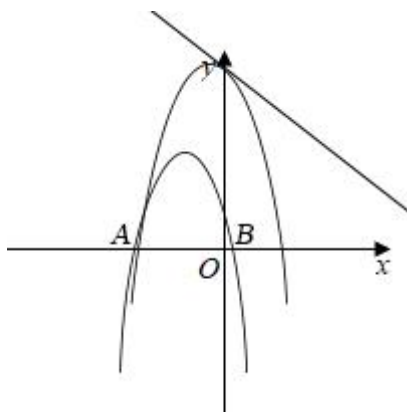
由①而知直线 MN 与抛物线 $y_2 = -x^2 - 4nx - 5n^2 + 2n + 9$ 公共点的横坐标为 $x_1 = 0$, $x_2 = 1 - 4n$,

$$\text{当 } n = \frac{-1 \pm 2\sqrt{142}}{21} \text{ 时, } 1 - 4n \neq 0,$$

$$\therefore x_1 \neq x_2,$$

所以此时直线 MN 与抛物线 y_1 , y_2 的公共点恰好为三个不同点,

③如图:



当直线 MN 与抛物线 $y_2 = -x^2 - 4nx - 5n^2 + 2n + 9$ 只有一个公共点,

$$\because x_1 = 0, x_2 = 1 - 4n,$$

$$\therefore n = \frac{1}{4},$$

联立直线 $y = -x - 5n^2 + 2n + 9$ 与抛物线 $y_1 = -x^2 + (n - 4)x + 4n$,

$$-x^2 + (n - 3)x + 5n^2 + 2n - 9 = 0,$$

$$\Delta = (n - 3)^2 + 4(5n^2 + 2n - 9) = 21n^2 + 2n - 27,$$

当 $n = \frac{1}{4}$ 时, $\Delta < 0$,

此时直线 MN 与抛物线 y_1, y_2 的公共点只有一个,

$$\therefore n \neq \frac{1}{4},$$

$$\text{综上所述: } n_1 = \frac{-1 + \sqrt{46}}{5}, n_2 = \frac{-1 - \sqrt{46}}{5}, n_3 = \frac{-1 + 2\sqrt{142}}{21}, n_4 = -2 - \frac{-1 - 2\sqrt{142}}{21}.$$