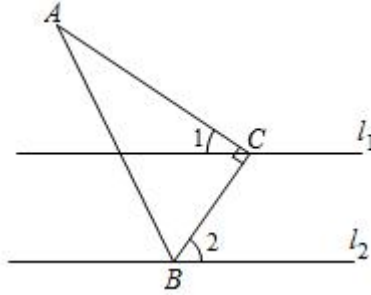


2019 年湖北省随州市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，共 30 分）

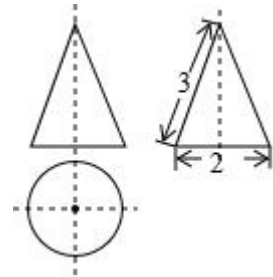
- 3 的绝对值为（ ）
A. 3 B. -3 C. ± 3 D. 9
- 地球的半径约为 $6370000m$ ，用科学记数法表示正确的是（ ）
A. $637 \times 10^4 m$ B. $63.7 \times 10^5 m$ C. $6.37 \times 10^6 m$ D. $6.37 \times 10^7 m$
- 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$ ，直角三角板的直角顶点 C 在直线 l_1 上，一锐角顶点 B 在直线 l_2 上，若 $\angle 1 = 35^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是（ ）

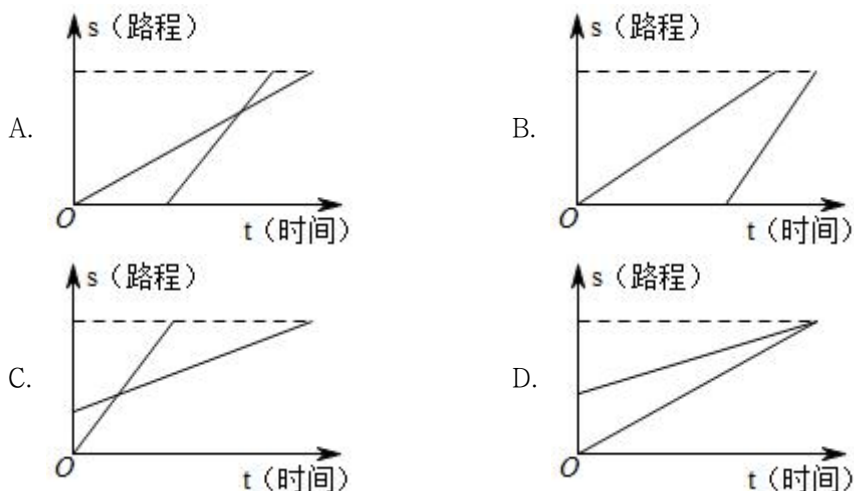


- 下列运算正确的是（ ）
A. $4m - m = 4$ B. $(a^2)^3 = a^5$
C. $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ D. $-(t - 1) = 1 - t$
- 某校男子篮球队 10 名队员进行定点投篮练习，每人投篮 10 次，他们投中的次数统计如表：

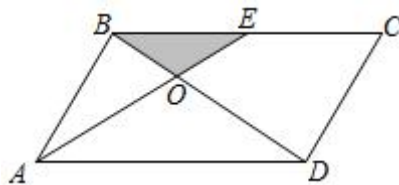
投中次数	3	5	6	7	8
人数	1	3	2	2	2

- 则这些队员投中次数的众数、中位数和平均数分别为（ ）
A. 5, 6, 6 B. 2, 6, 6 C. 5, 5, 6 D. 5, 6, 5
- 如图是一个几何体的三视图，则这个几何体的表面积为（ ）
A. 2π
B. 3π
C. 4π
D. 5π
- 第一次“龟兔赛跑”，兔子因为在途中睡觉而输掉比赛，很不服气，决定与乌龟再比一次，并且骄傲地说，这次我一定不睡觉，让乌龟先跑一段距离我再去追都可以赢. 结果兔子又一次输掉了比赛，则下列函数图象可以体现这次比赛过程的是（ ）





8. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 为 BC 的中点, BD , AE 交于点 O , 若随机向平行四边形 $ABCD$ 内投一粒米, 则米粒落在图中阴影部分的概率为 ()

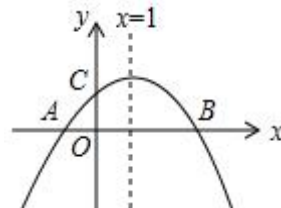


- A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{6}$

9. “分母有理化”是我们常用的一种化简的方法, 如: $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 7+4\sqrt{3}$, 除此之外, 我们也可以用平方之后再开方的方式来化简一些有特点的无理数, 如: 对于 $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$, 设 $x = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$, 易知 $\sqrt{3+\sqrt{5}} > \sqrt{3-\sqrt{5}}$, 故 $x > 0$, 由 $x^2 = (\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2 = 3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}-2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = 2$, 解得 $x = \sqrt{2}$, 即

$\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$. 根据以上方法, 化简 $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} + \sqrt{6-3\sqrt{3}} - \sqrt{6+3\sqrt{3}}$ 后的结果为 ()

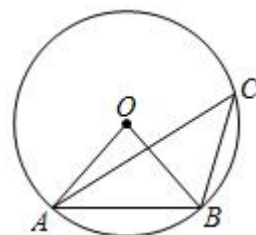
- A. $5+3\sqrt{6}$ B. $5+\sqrt{6}$ C. $5-\sqrt{6}$ D. $5-3\sqrt{6}$
10. 如图所示, 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A , B 两点, 与 y 轴交于点 C , $OA = OC$, 对称轴为直线 $x = 1$, 则下列结论: ① $abc < 0$; ② $a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c = 0$; ③ $ac + b + 1 = 0$; ④ $2 + c$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根. 其中正确的有 ()
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



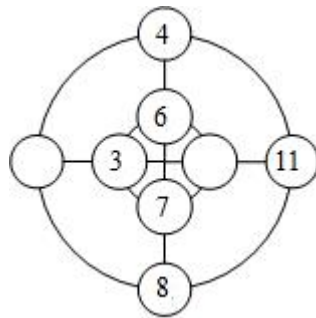
二、填空题 (本大题共 6 小题, 共 18 分)

11. 计算: $(\pi - 2019)^0 - 2\cos 60^\circ =$ _____.

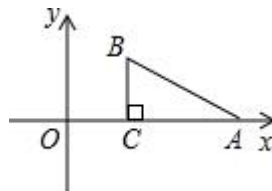
12. 如图, 点 A, B, C 在 $\odot O$ 上, 点 C 在优弧 $\widehat{AB}$ 上, 若 $\angle OBA = 50^\circ$, 则 $\angle C$ 的度数为_____.



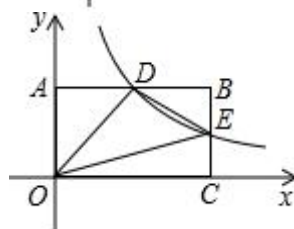
13. 2017 年，随州学子尤东梅参加《最强大脑》节目，成功完成了高难度的项目挑战，展现了惊人的记忆力. 在 2019 年的《最强大脑》节目中，也有很多具有挑战性的比赛项目，其中《幻圆》这个项目充分体现了数学的魅力. 如图是一个最简单的二阶幻圆的模型，要求：①内、外两个圆周上的四个数字之和相等；②外圆两直径上的四个数字之和相等，则图中两空白圆圈内应填写的数字从左到右依次为_____和_____.



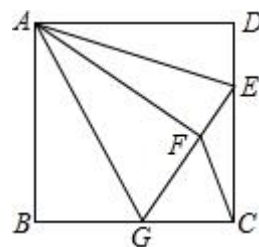
14. 如图，在平面直角坐标系中， $Rt\triangle ABC$ 的直角顶点 C 的坐标为 $(1, 0)$ ，点 A 在 x 轴正半轴上，且 $AC=2$. 将 $\triangle ABC$ 先绕点 C 逆时针旋转 90° ，再向左平移 3 个单位，则变换后点 A 的对应点的坐标为_____.



15. 如图，矩形 $OABC$ 的顶点 A, C 分别在 y 轴、 x 轴的正半轴上， D 为 AB 的中点，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 的图象经过点 D ，且与 BC 交于点 E ，连接 OD, OE, DE ，若 $\triangle ODE$ 的面积为 3，则 k 的值为_____.



16. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 a ， E 为 CD 边上一点（不与端点重合），将 $\triangle ADE$ 沿 AE 对折至 $\triangle AFE$ ，延长 EF 交边 BC 于点 G ，连接 AG, CF .



给出下列判断：

① $\angle EAG=45^\circ$ ；

② 若 $DE=\frac{1}{3}a$ ，则 $AG\parallel CF$ ；

③ 若 E 为 CD 的中点，则 $\triangle GFC$ 的面积为 $\frac{1}{10}a^2$ ；

④ 若 $CF=FG$ ，则 $DE=(\sqrt{2}-1)a$ ；

⑤ $BG\cdot DE+AF\cdot GE=a^2$.

其中正确的是_____。（写出所有正确判断的序号）

三、计算题（本大题共 1 小题，共 5 分）

17. 解关于 x 的分式方程： $\frac{9}{3+x}=\frac{6}{3-x}$.

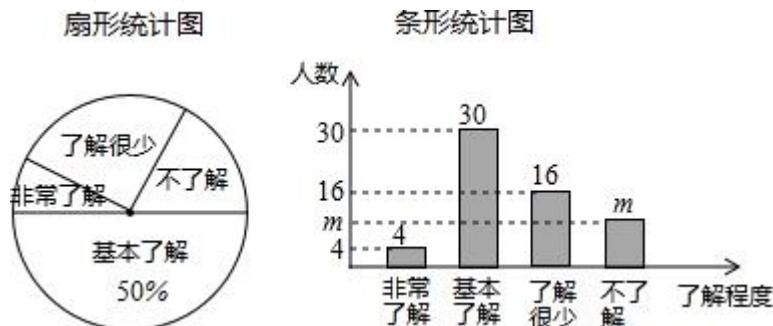
四、解答题（本大题共 7 小题，共 67 分）

18. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

(1) 求 k 的取值范围；

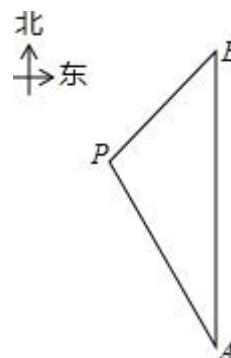
(2) 若 $x_1+x_2=3$ ，求 k 的值及方程的根.

19. “校园安全”越来越受到人们的关注，我市某中学对部分学生就校园安全知识的了解程度，采用随机抽样调查的方式，并根据收集到的信息进行统计，绘制了下面两幅尚不完整的统计图．根据图中信息回答下列问题：



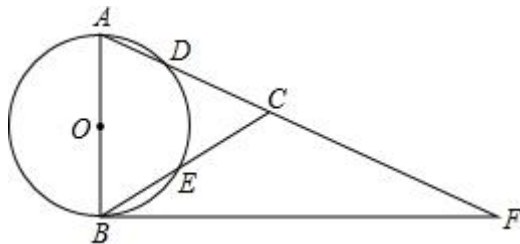
- (1) 接受问卷调查的学生共有_____人，条形统计图中 m 的值为_____；
- (2) 扇形统计图中“了解很少”部分所对应扇形的圆心角的度数为_____；
- (3) 若该中学共有学生 1800 人，根据上述调查结果，可以估计出该学校学生中对校园安全知识达到“非常了解”和“基本了解”程度的总人数为_____人；
- (4) 若从对校园安全知识达到“非常了解”程度的 2 名男生和 2 名女生中随机抽取 2 人参加校园安全知识竞赛，请用列表或画树状图的方法，求恰好抽到 1 名男生和 1 名女生的概率．

20. 在一次海上救援中，两艘专业救助船 A ， B 同时收到某事故渔船的求救讯息，已知此时救助船 B 在 A 的正北方向，事故渔船 P 在救助船 A 的北偏西 30° 方向上，在救助船 B 的西南方向上，且事故渔船 P 与救助船 A 相距 120 海里．



- (1) 求收到求救讯息时事故渔船 P 与救助船 B 之间的距离；
- (2) 若救助船 A ， B 分别以 40 海里/小时、30 海里/小时的速度同时出发，匀速直线前往事故渔船 P 处搜救，试通过计算判断哪艘船先到达．

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 分别交 AC , BC 于点 D , E , 点 F 在 AC 的延长线上, 且 $\angle BAC=2\angle CBF$.
- (1) 求证: BF 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 若 $\odot O$ 的直径为3, $\sin \angle CBF = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 BC 和 BF 的长.



22. 某食品厂生产一种半成品食材, 成本为2元/千克, 每天的产量 p (百千克)与销售价格 x (元/千克)满足函数关系式 $p = -\frac{1}{2}x + 8$, 从市场反馈的信息发现, 该半成品食材每天的市场需求量 q (百千克)与销售价格 x (元/千克)满足一次函数关系, 部分数据如表:

销售价格 x (元/千克)	2	4		10
市场需求 量 q (百千 克)	12	10		4

已知按物价部门规定销售价格 x 不低于2元/千克且不高于10元/千克.

- (1) 直接写出 q 与 x 的函数关系式, 并注明自变量 x 的取值范围;
- (2) 当每天的产量小于或等于市场需求量时, 这种半成品食材能全部售出, 而当每天的产量大于市场需求量时, 只能售出符合市场需求量的半成品食材, 剩余的食材由于保质期短而只能废弃.
- ①当每天的半成品食材能全部售出时, 求 x 的取值范围;
- ②求厂家每天获得的利润 y (百元)与销售价格 x 的函数关系式;
- (3) 在(2)的条件下, 当 x 为_____元/千克时, 利润 y 有最大值; 若要使每天的利润不低于24(百元), 并尽可能地减少半成品食材的浪费, 则 x 应定为_____元/千克.

23. 若一个两位数十位、个位上的数字分别为 m, n , 我们可将这个两位数记为 $\overline{mn}$, 易知 $\overline{mn}=10m+n$; 同理, 一个三位数、四位数等均可以用此记法, 如 $\overline{abc}=100a+10b+c$.

【基础训练】

(1) 解方程填空:

①若 $\overline{2x} + \overline{x3} = 45$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$;

②若 $\overline{7y} - \overline{y8} = 26$, 则 $y = \underline{\hspace{2cm}}$;

③若 $\overline{t93} + \overline{5t8} = \overline{13t1}$, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$;

【能力提升】

(2) 交换任意一个两位数 $\overline{mn}$ 的个位数字与十位数字, 可得到一个新数 $\overline{nm}$, 则 $\overline{mn} + \overline{nm}$ 一定能被 $\underline{\hspace{2cm}}$ 整除, $\overline{mn} - \overline{nm}$ 一定能被 $\underline{\hspace{2cm}}$ 整除, $\overline{mn} \cdot \overline{nm} - \overline{mn}$ 一定能被 $\underline{\hspace{2cm}}$ 整除; (请从大于 5 的整数中选择合适的数填空)

【探索发现】

(3) 北京时间 2019 年 4 月 10 日 21 时, 人类拍摄的首张黑洞照片问世, 黑洞是一种引力极大的天体, 连光都逃脱不了它的束缚. 数学中也存在有趣的黑洞现象: 任选一个三位数, 要求个、十、百位的数字各不相同, 把这个三位数的三个数字按大小重新排列, 得出一个最大的数和一个最小的数, 用得出的最大的数减去最小的数得到一个数 (例如若选的数为 325, 则用 $532-235=297$), 再将这个新数按上述方式重新排列, 再相减, 像这样运算若干次后一定会得到同一个重复出现的数, 这个数称为“卡普雷卡尔黑洞数”.

①该“卡普雷卡尔黑洞数”为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

②设任选的三位数为 $\overline{abc}$ (不妨设 $a > b > c$), 试说明其均可产生该黑洞数.

24. 如图 1, 在平面直角坐标系中, 点 O 为坐标原点, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 y 轴交于点 $A(0, 6)$, 与 x 轴交于点 $B(-2, 0)$, $C(6, 0)$.

(1) 直接写出抛物线的解析式及其对称轴;

(2) 如图 2, 连接 AB, AC , 设点 $P(m, n)$ 是抛物线上位于第一象限内的一动点, 且在对称轴右侧, 过点 P 作 $PD \perp AC$ 于点 E , 交 x 轴于点 D , 过点 P 作 $PG \parallel AB$ 交 AC 于点 F , 交 x 轴于点 G . 设线段 DG 的长为 d , 求 d 与 m 的函数关系式, 并注明 m 的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $\triangle PDG$ 的面积为 $\frac{49}{12}$,

①求点 P 的坐标;

②设 M 为直线 AP 上一动点, 连接 OM 交直线 AC 于点 S , 则点 M 在运动过程中, 在抛物线上是否存在点 R , 使得 $\triangle ARS$ 为等腰直角三角形? 若存在, 请直接写出点

M 及其对应的点 R 的坐标；若不存在，请说明理由.

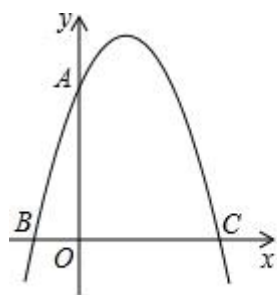


图1

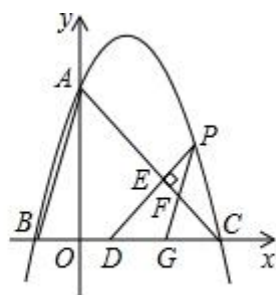
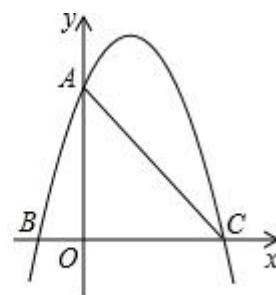


图2



备用图

答案和解析

1. 【答案】A

【解析】

解：-3 的绝对值为 3，

即 $|-3|=3$ 。

故选：A。

根据负数的绝对值等于它的相反数解答。

本题考查了绝对值，一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0。

2. 【答案】C

【解析】

解：6370000m，用科学记数法表示正确的是 6.37×10^6 m，

故选：C。

科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，n 为整数。确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同。当原数绝对值大于 10 时，n 是正数；当原数的绝对值小于 1 时，n 是负数。

此题考查了科学记数法的表示方法。科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值。

3. 【答案】B

【解析】

解：如图， $\because \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$ ， $\angle 1 = 35^\circ$ ，

$\therefore \angle 3 = 55^\circ$ 。

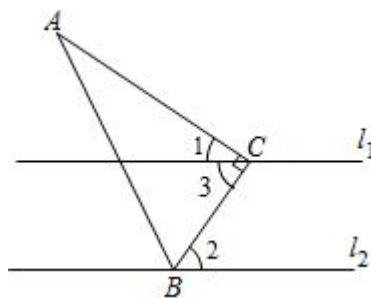
又 $\because$ 直线 $l_1 \parallel l_2$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 55^\circ$ 。

故选：B。

根据余角的定义得到 $\angle 3$ ，根据两直线平行，内错角相等可得 $\angle 3 = \angle 2$ 。

本题考查了平行线的性质，余角的定义，熟记性质并准确识图是解题的关键。



4. 【答案】D

【解析】

解：A、 $4m - m = 3m$ ，故此选项错误；

B、 $(a^2)^3 = a^6$ ，故此选项错误；

C、 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ，故此选项错误；

D、 $-(t-1) = 1-t$ ，正确。

故选：D。

直接利用合并同类项法则以及幂的乘方运算法则、完全平方公式分别化简得出答案。

此题主要考查了合并同类项以及幂的乘方运算、完全平方公式，正确掌握相关运算法则是解题关键。

5. 【答案】A

【解析】

解：在这一组数据中 5 是出现次数最多的，故众数是 5；

处于中间位置的两个数的平均数是 $(6+6) \div 2 = 6$ ，那么由中位数的定义可知，这组数据的中位数是 6。

平均数是： $(3+15+12+14+16) \div 10 = 6$ ，

所以答案为：5、6、6，

故选：A。

众数是一组数据中出现次数最多的数据，注意众数可以不止一个；找中位数要把数据按

从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数（或两个数的平均数）为中位数；平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数。

主要考查了平均数，众数，中位数的概念。要掌握这些基本概念才能熟练解题。

6. 【答案】C

【解析】

解：根据三视图可得这个几何体是圆锥，

$$\text{底面积} = \pi \times 1^2 = \pi,$$

$$\text{侧面积为} = \pi \cdot 3 = 3\pi,$$

$$\text{则这个几何体的表面积} = \pi + 3\pi = 4\pi;$$

故选：C.

根据主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看所得到的图形，判断出几何体的形状，再根据三视图的数据，求出几何体的表面积即可。

此题考查了由三视图判断几何体，用到的知识点是三视图，几何体的表面积的求法，准确判断几何体的形状是解题的关键。

7. 【答案】B

【解析】

解：由于乌龟比兔子早出发，而早到终点；

故B选项正确；

故选：B.

根据乌龟比兔子早出发，而早到终点逐一判断即可得。

本题主要考查函数图象，解题的关键是弄清函数图象中横、纵轴所表示的意义及实际问题中自变量与因变量之间的关系。

8. 【答案】B

【解析】

解：∵E为BC的中点，

$$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{BO}{OD} = \frac{OE}{AO} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BO}{BD} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore S_{\triangle BOE} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOB}, \quad S_{\triangle AOB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD},$$

$$\therefore S_{\triangle BOE} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABD} = \frac{1}{12} S_{\square ABCD},$$

$$\therefore \text{米粒落在图中阴影部分的概率为 } \frac{1}{12},$$

故选：B.

随机事件A的概率 $P(A) = \text{事件A可能出现的结果数} \div \text{所有可能出现的结果数}$.

本题考查了概率，熟练掌握概率公式与平行四边形的性质以及相似三角形的性质是解题的关键。

9. 【答案】D

【解析】

$$\text{解：设 } x = \sqrt{6-3\sqrt{3}} - \sqrt{6+3\sqrt{3}}, \text{ 且 } \sqrt{6+3\sqrt{3}} > \sqrt{6-3\sqrt{3}},$$

$$\therefore x < 0,$$

$$\therefore x^2 = 6 - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{(6-3\sqrt{3})(6+3\sqrt{3})} + 6 + 3\sqrt{3},$$

$$\therefore x^2 = 12 - 2 \times 3 = 6,$$

$$\therefore x = -\sqrt{6},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=5-2\sqrt{6},$$

$$\therefore \text{原式}=5-2\sqrt{6}-\sqrt{6}$$

$$=5-3\sqrt{6},$$

故选: D.

根据二次根式的运算法则即可求出答案.

本题考查二次根式的运算法则, 解题的关键是熟练运用二次根式的运算法则, 本题属于基础题型.

10. 【答案】 B

【解析】

解: $\because$ 抛物线开口向下,

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a > 0,$$

$\therefore$ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方,

$$\therefore c > 0,$$

$\therefore abc < 0$, 所以①正确;

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore a + \frac{1}{2}b = a - a = 0,$$

$$\therefore c > 0,$$

$$\therefore a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c > 0, \text{ 所以②错误;}$$

$$\therefore C(0, c), OA = OC,$$

$$\therefore A(-c, 0),$$

把 A(-c, 0) 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 得 $ac^2 - bc + c = 0$,

$$\therefore ac - b + 1 = 0, \text{ 所以③错误;}$$

$$\therefore A(-c, 0), \text{ 对称轴为直线 } x = 1,$$

$$\therefore B(2+c, 0),$$

$\therefore 2+c$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根, 所以④正确;

故选: B.

①由抛物线开口方向得 $a < 0$, 由抛物线的对称轴位置可得 $b > 0$, 由抛物线与 y 轴的交点位置可得 $c > 0$, 则可对①进行判断;

②根据对称轴是直线 $x = 1$, 可得 $b = -2a$, 代入 $a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c$, 可对②进行判断;

③利用 $OA = OC$ 可得到 A(-c, 0), 再把 A(-c, 0) 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 即可对③作出判断;

④根据抛物线的对称性得到 B 点的坐标, 即可对④作出判断.

本题考查了二次函数图象与系数的关系: 对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小: 一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置: 常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点: 抛物线与 y 轴交于 (0, c); 抛物线与 x 轴交点个数由 Δ 决定, 熟练掌握二次函数的性质是关键.

11. 【答案】 0

【解析】

$$\text{解: 原式} = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0,$$

故答案为: 0

原式利用零指数幂法则，以及特殊角的三角函数值计算即可求出值．

此题考查了实数的运算，熟练掌握运算是解本题的关键．

12. 【答案】 40°

【解析】

解： $\because OA=OB$,

$\therefore \angle OAB=\angle OBA=50^\circ$,

$\therefore \angle AOB=180^\circ-50^\circ-50^\circ=80^\circ$,

$\therefore \angle C=\frac{1}{2}\angle AOB=40^\circ$.

故答案为 40° .

先利用等腰三角形的性质和三角形内角和计算出 $\angle AOB$ 的度数，然后根据圆周角定理得到 $\angle C$ 的度数．

本题考查了圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半．

13. 【答案】 2 9

【解析】

解：设图中两空白圆圈内应填写的数字从左到右依次为 a , b

$\therefore$ 外圆两直径上的四个数字之和相等

$\therefore 4+6+7+8=a+3+b+11$ ①

$\therefore$ 内、外两个圆周上的四个数字之和相等

$\therefore 3+6+b+7=a+4+11+8$ ②

联立①②解得： $a=2$, $b=9$

$\therefore$ 图中两空白圆圈内应填写的数字从左到右依次为 2, 9

故答案为： 2; 9.

根据题意要求①②可得关于所要求的两数的两个等式，解出两数即可．

此题比较简单，主要考查了有理数的加法，主要依据题中的要求①②列式即可以求解．

14. 【答案】 $(-2, 2)$

【解析】

解： $\because$ 点 C 的坐标为 $(1, 0)$ ， $AC=2$ ，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(3, 0)$ ，

如图所示，将 $Rt\triangle ABC$ 先绕点 C 逆时针旋转 90° ，

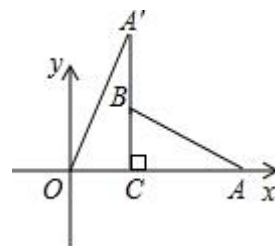
则点 A' 的坐标为 $(1, 2)$ ，

再向左平移 3 个单位长度，则变换后点 A' 的对应点坐标为 $(-2, 2)$ ，

故答案为： $(-2, 2)$ ．

根据旋转变换的性质得到旋转变换后点 A 的对应点坐标，根据平移的性质解答即可．

本题考查的是坐标与图形变化旋转和平移，掌握旋转变换、平移变换的性质是解题的关键．



15. 【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

解： $\because$ 四边形 $OCBA$ 是矩形，

$\therefore AB=OC$, $OA=BC$,

设 B 点的坐标为 (a, b) ，则 E 的坐标为 $E(a, \frac{k}{a})$ ，

$\therefore D$ 为 AB 的中点，

$\therefore D(\frac{1}{2}a, b)$

∵ D、E 在反比例函数的图象上，

$$\therefore \frac{1}{2}ab=k,$$

$$\therefore S_{\triangle ODE}=S_{\text{矩形}OCBA}-S_{\triangle AOD}-S_{\triangle OCE}-S_{\triangle BDE}=ab-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\left(b-\frac{k}{a}\right)=3,$$

$$\therefore ab-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}ab+\frac{1}{4}k=3,$$

$$\text{解得: } k=\frac{4}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{4}{3}.$$

根据所给的三角形面积等于长方形面积减去三个直角三角形的面积，然后即可求出 B 的横纵坐标的积即是反比例函数的比例系数.

本题考查反比例函数系数 k 的几何意义，解题的关键是利用过某个点，这个点的坐标应适合这个函数解析式；所给的面积应整理为和反比例函数上的点的坐标有关的形式，本题属于中等题型.

16. 【答案】①②④⑤

【解析】

解：①∵ 四边形 ABCD 是正方形，

$$\therefore AB=BC=AD=a,$$

∵ 将 $\triangle ADE$ 沿 AE 对折至 $\triangle AFE$ ，

$$\therefore \angle AFE=\angle ADE=\angle ABG=90^\circ, AF=AD=AB, EF=DE,$$

$$\angle DAE=\angle FAE,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABG \text{ 和 Rt}\triangle AFG \text{ 中 } \begin{cases} AB=AF \\ AG=AG \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABG \cong \text{Rt}\triangle AFG \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle BAG=\angle FAG,$$

$$\therefore \angle GAE=\angle GAF+\angle EAF=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ, \text{ 故①正确;}$$

$$\text{②} \therefore BG=GF, \angle BGA=\angle FGA,$$

$$\text{设 } BG=GF=x, \therefore DE=\frac{1}{3}a,$$

$$\therefore EF=\frac{1}{3}a,$$

$$\therefore CG=a-x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle EGC \text{ 中, } EG=x+\frac{1}{3}a, CE=\frac{2}{3}a, \text{ 由勾股定理可得 } \left(x+\frac{1}{3}a\right)^2=x^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2,$$

$$\text{解得 } x=\frac{1}{2}a, \text{ 此时 } BG=CG=\frac{1}{2}a,$$

$$\therefore GC=GF=\frac{1}{2}a,$$

$$\therefore \angle GFC=\angle GCF,$$

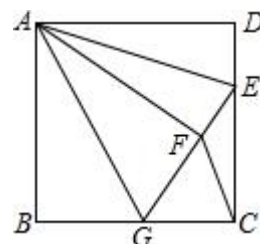
$$\text{且 } \angle BGF=\angle GFC+\angle GCF=2\angle GCF,$$

$$\therefore 2\angle AGB=2\angle GCF,$$

$$\therefore \angle AGB=\angle GCF,$$

$$\therefore AG\parallel CF,$$

$$\therefore \text{②正确;}$$



③若 E 为 CD 的中点, 则 $DE=CE=EF=\frac{1}{2}a$,

设 $BG=GF=y$, 则 $CG=a-y$,

$$CG^2+CE^2=EG^2,$$

$$\text{即 } (a-y)^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = (\frac{1}{2}a+y)^2,$$

$$\text{解得, } y=\frac{1}{3}a,$$

$$\therefore BG=GF=\frac{1}{3}a, \quad CG=a-\frac{1}{3}a=\frac{2}{3}a,$$

$$\therefore \frac{GF}{EG} = \frac{\frac{1}{3}a}{\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle CFG} = \frac{2}{5} S_{\triangle CEG} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a \times \frac{2}{3}a = \frac{1}{15}a^2,$$

故③错误;

④当 $CF=FG$, 则 $\angle FGC=\angle FCG$,

$$\therefore \angle FGC + \angle FEC = \angle FCG + \angle FCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEC = \angle FCE,$$

$$\therefore EF=CF=GF,$$

$$\therefore BG=GF=EF=DE,$$

$$\therefore EG=2DE, \quad CG=CE=a-DE,$$

$$\therefore \sqrt{2}CE = EG, \quad \text{即 } \sqrt{2}(a-DE) = 2DE,$$

$$\therefore DE = (\sqrt{2}-1)a,$$

故④正确;

⑤设 $BG=GF=b$, $DE=EF=c$, 则 $CG=a-b$, $CE=a-c$,

由勾股定理得, $(b+y)^2 = (a-b)^2 + (a-c)^2$, 整理得 $bc=a^2-ab-ac$,

$$\therefore S_{\triangle CEG} = \frac{1}{2}(a-b)(a-c) = \frac{1}{2}(a^2 - ab - ac + bc) = \frac{1}{2}(bc + bc) = bc,$$

$$\text{即 } S_{\triangle CEG}=BG \cdot DE,$$

$$\therefore S_{\triangle ABG}=S_{\triangle AFG}, \quad S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ADE},$$

$$\therefore S_{\text{五边形}ABGED} = 2S_{\triangle AGE} = 2 \times \frac{1}{2} AF \cdot EG = AF \cdot EG,$$

$$\therefore S_{\text{五边形}ABGED} + S_{\triangle CEG} = S_{\text{正方形}ABCD},$$

$$\therefore BG \cdot DE + AF \cdot EG = a^2,$$

故⑤正确.

故答案为: ①②④⑤.

①由折叠得 $AD=AF=AB$, 再由 HL 定理证明 $Rt\triangle ABG \cong Rt\triangle AFG$ 便可判定正误;

②设 $BG=GF=x$, 由勾股定理可得 $(x+\frac{1}{3}a)^2 = x^2 + (\frac{2}{3}a)^2$, 求得 $BG=\frac{1}{2}a$, 进而得 $GC=GF$,

得 $\angle GFC=\angle GCF$, 再证明 $\angle AGB=\angle GCF$, 便可判断正误;

③设 $BG=GF=y$, 则 $CG=a-y$, 由勾股定理得 y 的方程求得 BG , GF , EF , 再由同高的两个三角形的面积比等于底边之比, 求得 $\triangle CGF$ 的面积, 便可判断正误;

④证明 $\angle FEC=\angle FCE$, 得 $EF=CF=GF$, 进而得 $EG=2DE$, $CG=CE=a-DE$, 由等腰直角三角形的斜边与直角边的关系式便可得结论, 进而判断正误;

⑤设 $BG=GF=b$, $DE=EF=c$, 则 $CG=a-b$, $CE=a-c$, 由勾股定理得 $bc=a^2-ab-ac$, 再得 $\triangle CEG$ 的面积为 $BG \cdot DE$, 再由五边形 $ABGED$ 的面积加上 $\triangle CEG$ 的面积等于正方形的面积得结

论，进而判断正误.

本题主要考查正方形的性质及全等三角形的判定和性质，勾股定理，利用折叠得到线段相等及角相等、正方形的性质的运用是解题的关键. 涉及内容多而复杂，难度较大.

17. 【答案】解：去分母得： $27-9x=18+6x$,

移项合并得： $15x=9$,

解得： $x=\frac{3}{5}$.

经检验 $x=\frac{3}{5}$ 是分式方程的解.

【解析】

分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验.

18. 【答案】解：(1) $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k+1)x + k^2 + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta > 0$,

$\therefore (2k+1)^2 - 4(k^2 + 1) > 0$,

整理得， $4k - 3 > 0$,

解得： $k > \frac{3}{4}$.

故实数 k 的取值范围为 $k > \frac{3}{4}$.

(2) $\because$ 方程的两个根分别为 x_1, x_2 ,

$\therefore x_1 + x_2 = 2k + 1 = 3$,

解得： $k = 1$,

$\therefore$ 原方程为 $x^2 - 3x + 2 = 0$,

$\therefore x_1 = 1, x_2 = 2$.

【解析】

(1) 由于关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k+1)x + k^2 + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，可知 $\Delta > 0$ ，据此进行计算即可；

(2) 利用根与系数的关系得出 $x_1 + x_2 = 2k + 1$ ，进而得出关于 k 的方程求出即可.

本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 根的判别式. 当 $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根. 以及根与系数的关系.

19. 【答案】60 10 96° 1020

【解析】

解：(1) 接受问卷调查的学生共有 $30 \div 50\% = 60$ (人)， $m = 60 - 4 - 30 - 16 = 10$ ；

故答案为：60, 10；

(2) 扇形统计图中“了解很少”部分所对应扇形的圆心角的度数 $= 360^\circ \times \frac{16}{60} = 96^\circ$ ；

故答案为： 96° ；

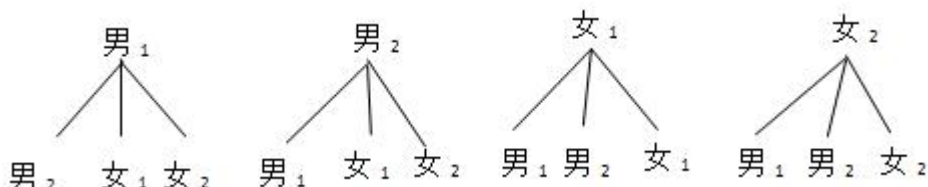
(3) 该学校学生中对校园安全知识达到“非常了解”和“基本了解”程度的总人数为：

$1800 \times \frac{4+30}{60} = 1020$ (人)；

故答案为：1020；

(4) 由题意列树状图：

由树状图可知，所有等可能的结果有



12种，恰好抽到1名男生和1名女生的结果有8种，

∴恰好抽到1名男生和1名女生的概率为 $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

- (1) 用“基本了解”的人数除以它所占的百分比得到调查的总人数；
- (2) 用 360° 乘以扇形统计图中“了解很少”部分所占的比例即可；
- (3) 用总人数 1800 乘以达到“非常了解”和“基本了解”程度的人数所占的比例即可；
- (4) 画树状图展示所有 12 种等可能的结果数，找出恰好抽到 1 个男生和 1 个女生的结果数，然后利用概率公式求解.

此题考查了列表法或树状图法求概率以及条形统计图与扇形统计图. 用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

20. 【答案】解：(1) 作 $PC \perp AB$ 于 C ，如图所示：

则 $\angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$ ，

由题意得： $PA = 120$ 海里， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle BPC = 45^\circ$ ，

∴ $PC = \frac{1}{2}PA = 60$ 海里， $\triangle BCP$ 是等腰直角三角形，

∴ $BC = PC = 60$ 海里， $PB = \sqrt{2}PC = 60\sqrt{2}$ 海里；

答：收到求救讯息时事故渔船 P 与救助船 B 之间的距离为 $60\sqrt{2}$ 海里；

(2) ∵ $PA = 120$ 海里， $PB = 60\sqrt{2}$ 海里，救助船 A ， B 分别以 40 海里/小时、30 海里/小时的速度同时出发，

∴救助船 A 所用的时间为 $\frac{120}{40} = 3$ (小时)，救助船 B 所用的时间为 $\frac{60\sqrt{2}}{30} = 2\sqrt{2}$ (小时)，

∴ $3 > 2\sqrt{2}$ ，

∴救助船 B 先到达.

【解析】

(1) 作 $PC \perp AB$ 于 C ，则 $\angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$ ，由题意得： $PA = 120$ 海里， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle BPC = 45^\circ$ ，由直角三角形的性质得出 $PC = \frac{1}{2}PA = 60$ 海里， $\triangle BCP$ 是等腰直角三角形，得出 $PB = \sqrt{2}PC = 60\sqrt{2}$ 海里即可；

(2) 求出救助船 A 、 B 所用的时间，即可得出结论.

本题考查了解直角三角形的应用、方向角、直角三角形的性质；正确作出辅助线是解题的关键.

21. 【答案】(1) 证明：连接 AE ，

∵ AB 是 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle AEB = 90^\circ$ ，

∴ $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$.

∵ $AB = AC$ ，

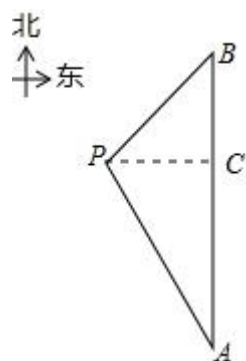
∴ $2\angle 1 = \angle CAB$.

∴ $\angle BAC = 2\angle CBF$ ，

∴ $\angle 1 = \angle CBF$

∴ $\angle CBF + \angle 2 = 90^\circ$

即 $\angle ABF = 90^\circ$



$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore$ 直线 BF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解: 过点 C 作 $CH \perp BF$ 于 H .

$$\therefore \sin \angle CBF = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \angle 1 = \angle CBF,$$

$$\therefore \sin \angle 1 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AEB$ 中, $\angle AEB = 90^\circ$, $AB = 3$,

$$\therefore BE = AB \cdot \sin \angle 1 = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3},$$

$\therefore AB = AC$, $\angle AEB = 90^\circ$,

$$\therefore BC = 2BE = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \sin \angle CBF = \frac{CH}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore CH = 2,$$

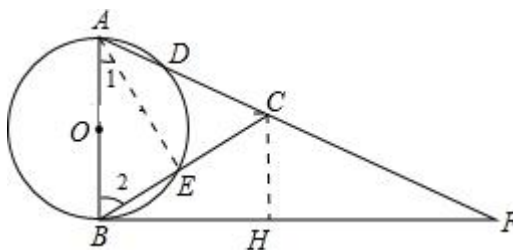
$\therefore CH \parallel AB$,

$$\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{CH}{AB}, \quad \text{即} \quad \frac{CF}{CF+3} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore CF = 6,$$

$$\therefore AF = AC + CF = 9,$$

$$\therefore BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = 6\sqrt{2}.$$



【解析】

(1) 连接 AE , 利用直径所对的圆周角是直角, 从而判定直角三角形, 利用直角三角形两锐角相等得到直角, 从而证明 $\angle ABF = 90^\circ$.

(2) 解直角三角形即可得到结论.

本题考查了圆的综合题: 切线的判定与性质、勾股定理、直角所对的圆周角是直角、解直角三角形等知识点.

22. 【答案】 $\frac{13}{2}$ 5

【解析】

解:

(1) 由表格的数据, 设 q 与 x 的函数关系式为: $q = kx + b$

$$\text{根据表格的数据得} \begin{cases} 12 = 2k + b \\ 10 = 4k + b \end{cases}, \quad \text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 14 \end{cases}$$

故 q 与 x 的函数关系式为: $q = -x + 14$, 其中 $2 \leq x \leq 10$

(2) ①当每天的半成品食材能全部售出时, 有 $p \leq q$

$$\text{即} \quad \frac{1}{2}x + 8 \leq -x + 14, \quad \text{解得} \quad x \leq 4$$

又 $2 \leq x \leq 10$, 所以此时 $2 \leq x \leq 4$

②由①可知, 当 $2 \leq x \leq 4$ 时,

$$y = (x-2)p = (x-2) \left(\frac{1}{2}x + 8 \right) = \frac{1}{2}x^2 + 7x - 16$$

当 $4 < x \leq 10$ 时, $y = (x-2)q - 2(p-q)$

$$= (x-2)(-x+14) - 2\left[\frac{1}{2}x + 8 - (-x+14)\right]$$

$$=-x^2+13x-16$$

$$\text{即有 } y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 7x - 16, (2 \leq x \leq 4) \\ -x^2 + 13x - 16, (4 < x \leq 10) \end{cases}$$

(3) 当 $2 \leq x \leq 4$ 时,

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 7x - 16 \text{ 的对称轴为 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2 \times \frac{1}{2}} = -7$$

$\therefore$ 当 $2 \leq x \leq 4$ 时, 除 x 的增大而增大

$$\therefore x=4 \text{ 时有最大值, } y = \frac{1}{2} \times 4^2 + 7 \times 4 - 16 = 20$$

当 $4 < x \leq 10$ 时

$$y = -x^2 + 13x - 16 = -\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \frac{105}{4},$$

$$\because -1 < 0, \quad \frac{13}{2} > 4$$

$$\therefore x = \frac{13}{2} \text{ 时取最大值}$$

即此时 y 有最大利润

要使每天的利润不低于 24 百元, 则当 $2 \leq x \leq 4$ 时, 显然不符合

$$\text{故 } y = -\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \frac{105}{4} \geq 24, \text{ 解得 } x \leq 5$$

故当 $x=5$ 时, 能保证不低于 24 百元

$$\text{故答案为: } \frac{13}{2}, 5$$

(1) 根据表格数据, 可设 q 与 x 的函数关系式为: $q=kx+b$, 利用待定系数法即可求

(2) ①根据题意, 当每天的半成品食材能全部售出时, 有 $p \leq q$, ②根据销售利润=销售量 $\times$ (售价-进价), 列出厂家每天获得的利润 y (百元) 与销售价格 x 的函数关系式

(3) 根据 (2) 中的条件分情况讨论即可

本题考查了二次函数的性质在实际生活中的应用. 最大销售利润的问题常利用函数的增减性来解答, 我们首先要吃透题意, 确定变量, 建立函数模型, 然后结合实际选择最优方案.

23. 【答案】2 4 7 11 9 10 495

【解析】

解: (1) ① $\because \overline{mn} = 10m + n$

$$\therefore \text{若 } \overline{2x} + \overline{x3} = 45, \text{ 则 } 10 \times 2 + x + 10x + 3 = 45$$

$$\therefore x = 2$$

故答案为: 2.

$$\text{②若 } \overline{7y} - \overline{y8} = 26, \text{ 则 } 10 \times 7 + y - (10y + 8) = 26$$

解得 $y = 4$

故答案为: 4.

③由 $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. 及四位数的类似公式得

$$\text{若 } \overline{t93} + \overline{5t8} = \overline{13t1}, \text{ 则 } 100t + 10 \times 9 + 3 + 100 \times 5 + 10t + 8 = 1000 \times 1 + 100 \times 3 + 10t + 1$$

$$\therefore 100t = 700$$

$$\therefore t=7$$

故答案为：7.

$$(2) \because \overline{mn} + \overline{nm} = 10m+n+10n+m=11m+11n=11(m+n)$$

$\therefore$ 则 $\overline{mn} + \overline{nm}$ 一定能被 11 整除

$$\because \overline{mn} - \overline{nm} = 10m+n - (10n+m) = 9m-9n=9(m-n)$$

$\therefore \overline{mn} - \overline{nm}$ 一定能被 9 整除.

$$\because \overline{mn} \cdot \overline{nm} - mn = (10m+n)(10n+m) - mn = 100mn + 10m^2 + 10n^2 + mn - mn = 10(10mn + m^2 + n^2)$$

$\therefore \overline{mn} \cdot \overline{nm} - mn$ 一定能被 10 整除.

故答案为：11；9；10.

(3) ①若选的数为 325，则用 $532-235=297$ ，以下按照上述规则继续计算

$$972-279=693$$

$$963-369=594$$

$$954-459=495$$

$$954-459=495 \cdots$$

故答案为：495.

②当任选的三位数为 $\overline{abc}$ 时，第一次运算后得： $100a+10b+c - (100c+10b+a) = 99(a-c)$ ，

结果为 99 的倍数，由于 $a > b > c$ ，故 $a \geq b+1 \geq c+2$

$$\therefore a-c \geq 2, \text{ 又 } 9 \geq a-c \geq 0,$$

$$\therefore a-c \leq 9$$

$$\therefore a-c=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$\therefore$ 第一次运算后可能得到：198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891,

再让这些数字经过运算，分别可以得到：

$981-189=792, 972-279=693, 963-369=594, 954-459=495, 954-459=495 \cdots$ 故都可以得到该黑洞数 495.

(1) ①②③均按定义列出方程求解即可；

(2) 按定义式子展开化简即可；

(3) ①选取题干中数据，按照定义式子展开，化简到出现循环即可；

②按定义式子化简，注意条件 $a > b > c$ 的应用，化简到出现循环数 495 即可.

本题是较为复杂的新定义试题，题目设置的问题较多，但解答方法大同小异，总体中等难度略大.

24. 【答案】解：(1) $\because$ 抛物线与 x 轴交于点 $B(-2, 0)$ ， $C(6, 0)$

$$\therefore \text{设交点式 } y=a(x+2)(x-6)$$

$$\because \text{抛物线过点 } A(0, 6)$$

$$\therefore -12a=6$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-6)=-\frac{1}{2}x^2+2x+6=-\frac{1}{2}(x-2)^2+8$$

$\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x=2$.

(2) 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴于点 H ，如图 1

$$\therefore \angle PHD=90^\circ$$

$\because$ 点 $P(m, n)$ 是抛物线上位于第一象限内的一动点且在对称轴右侧

$$\therefore 2 < m < 6, PH=n=-\frac{1}{2}m^2+2m+6, n > 0$$

$$\therefore OA=OC=6, \angle AOC=90^\circ$$

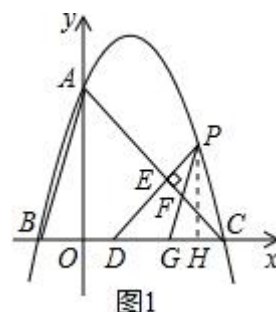


图1

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle ACO = 45^\circ \\
&\because PD \perp AC \text{ 于点 } E \\
&\therefore \angle CED = 90^\circ \\
&\therefore \angle CDE = 90^\circ - \angle ACO = 45^\circ \\
&\therefore DH = PH = n \\
&\because PG \parallel AB \\
&\therefore \angle PGH = \angle ABO \\
&\therefore \triangle PGH \sim \triangle ABO \\
&\therefore \frac{PH}{AO} = \frac{GH}{BO} \\
&\therefore GH = \frac{BO \cdot PH}{AO} = \frac{2PH}{6} = \frac{1}{3}n \\
&\therefore d = DH - GH = n - \frac{1}{3}n = \frac{2}{3}n = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6 \right) = -\frac{1}{3}m^2 + \frac{4}{3}m + 4 \quad (2 < m < 6)
\end{aligned}$$

$$(3) \text{ ① } \because S_{\triangle PDG} = \frac{1}{2} DG \cdot PH = \frac{49}{12}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} n \cdot n = \frac{49}{12}$$

$$\text{解得: } n_1 = \frac{7}{2}, \quad n_2 = -\frac{7}{2} \text{ (舍去)}$$

$$\therefore -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6 = \frac{7}{2}$$

$$\text{解得: } m_1 = -1 \text{ (舍去)}, \quad m_2 = 5$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 坐标为 } \left(5, \frac{7}{2} \right)$$

②在抛物线上存在点 R , 使得 $\triangle ARS$ 为等腰直角三角形.

设直线 AP 解析式为 $y = kx + 6$

$$\text{把点 } P \text{ 代入得: } 5k + 6 = \frac{7}{2}$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{直线 } AP: y = -\frac{1}{2}x + 6$$

i) 若 $\angle RAS = 90^\circ$, 如图 2

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 解析式为 } y = -x + 6$$

$$\therefore \text{直线 } AR \text{ 解析式为 } y = x + 6$$

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 6 \end{cases} \text{ (即点 } A) \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 8 \end{cases}$$

$$\therefore R(2, 8)$$

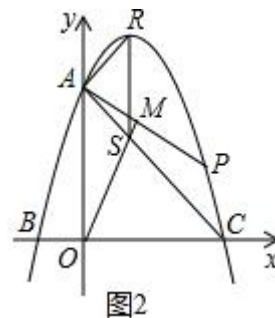
$$\therefore \angle ASR = \angle OAC = 45^\circ$$

$$\therefore RS \parallel y \text{ 轴}$$

$$\therefore x_S = x_R = 2$$

$$\therefore S(2, 4)$$

$$\therefore \text{直线 } OM: y = 2x$$



$$\therefore \begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + 6 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases}$$

$$\therefore M \left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5} \right)$$

ii) 若 $\angle ASR = 90^\circ$, 如图 3

$$\therefore \angle SAR = \angle ACO = 45^\circ$$

$$\therefore AR \parallel x \text{ 轴}$$

$$\therefore R(4, 6)$$

$\therefore S$ 在 AR 的垂直平分线上

$$\therefore S(2, 4)$$

$$\therefore M \left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5} \right)$$

iii) 若 $\angle ARS = 90^\circ$, 如图 4,

$$\therefore \angle SAR = \angle ACO = 45^\circ, RS \parallel y \text{ 轴}$$

$$\therefore AR \parallel x \text{ 轴}$$

$$\therefore R(4, 6)$$

$$\therefore S(4, 2)$$

$$\therefore \text{直线 } OM: y = \frac{1}{2}x$$

$$\therefore \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = \frac{1}{2}x + 6 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\therefore M(6, 3)$$

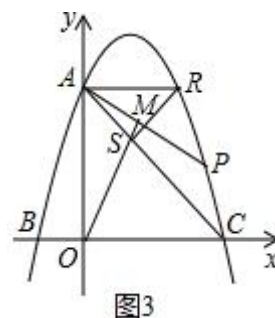


图3

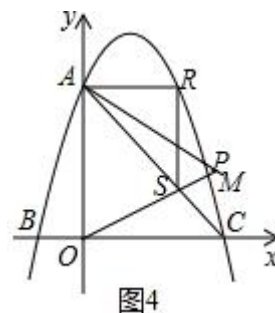


图4

综上所述, $M_1 \left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5} \right)$, $R_1(2, 8)$; $M_2 \left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5} \right)$, $R_2(4, 6)$; $M_3(6, 3)$, $R_3(4, 6)$.

【解析】

(1) 已知抛物线与 x 轴交点 B 、 C , 故可设交点式, 再把点 A 代入即求得抛物线解析式. 用配方法或公式求得对称轴.

(2) 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴于点 H , 由 $PD \perp AD$ 于点 E 易证 $\angle PDH = 45^\circ$, 故 $DH = PH = n$. 由 $PG \parallel AB$ 易证 $\triangle PGH \sim \triangle ABO$, 利用对应边成比例可得 $GH = \frac{BO \cdot PH}{AO} = \frac{2PH}{6} = \frac{1}{3}n$, 把含 m 的式子代入 $d = DH - GH$ 即得到 d 与 m 的函数关系式, 再由点 P 的位置确定 $2 < m < 6$.

(3) ①用 n 表示 DG 、 PH , 代入 $S_{\triangle PDG} = \frac{1}{2} DG \cdot PH = \frac{49}{12}$, 求得 n 的值 (舍去负值), 再利用 $n = -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6$ 解关于 m 的方程即求得点 P 坐标.

②因为 $\triangle ARS$ 为等腰直角三角形且 AS 与 y 轴夹角为 45° , 故 AR 与 y 轴夹角为 45° 或 90° . 由于不确定 $\triangle ARS$ 哪个为直角顶点, 故需分 3 种情况讨论, 画出图形, 利用 45° 或 90° 来确定点 R 、 S 的位置, 进而求点 R 、 S 坐标, 再由 S 的坐标求直线 OM 解析式, 把直线 OM 与直线 AP 解析式联立方程组, 解得点 M 坐标.

本题考查了二次函数的图象与性质, 等腰直角三角形的性质, 相似三角形的判定和性质, 一元二次方程的解法, 一次函数的图象与性质, 二元一次方程组的解法. 第 (3) 题②要充分利用等腰直角三角形的性质和直线 AC 与 y 轴夹角为 45° 来解题, 画出图形进行分类讨论, 先确定点 R 、 S 的位置并计算坐标, 再求直线 OM 解析式与 AP 联立求 M .

会员升级服务第一拨 · 清北季



神马，有清华北大学霸方法论课；还有清华学霸向所有的父母亲述自己求学之路；

衡水名校试卷悄悄的上线了；

扫qq领取官网不首发课程，很多人我没告诉他啊！

会员qq专享等你来撩.....