

荆门市 2019 年初中学业水平考试数学

本试卷共 6 页，24 题。全卷满分 120 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 **2B** 铅笔把答题卡上的对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、**选择题**：本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $-\sqrt{2}$ 的倒数的平方是

A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. $-\frac{1}{2}$

2. 已知一天有 86400 秒，一年按 365 天计算共有 31536000 秒。用科学计数法表示 31536000 正确的是

A. 3.1536×10^6 B. 3.1536×10^7 C. 31.536×10^6 D. 0.31536×10^8

3. 已知实数 x, y 满足方程组 $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$ 则 $x^2 - 2y^2$ 的值为

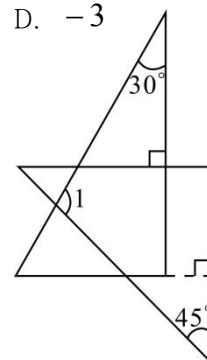
A. -1 B. 1 C. 3 D. -3

4. 将一副直角三角板按如图所示的位置摆放，使得它们的直角边互相垂直，则 $\angle 1$ 的度数是

A. 95° B. 100°
C. 105° D. 110°

5. 抛物线 $y = -x^2 + 4x - 4$ 与坐标轴的交点个数为

A. 0 B. 1
C. 2 D. 3



第4题图

6. 不等式组 $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} - \frac{3x+1}{2} \leq -\frac{5}{12}, \\ 3(x-1)+1 > 5x-2(1-x). \end{cases}$ 的解集为

- A. $-\frac{1}{2} < x < 0$ B. $-\frac{1}{2} < x \leq 0$ C. $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ D. $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$

7. 投掷一枚质地均匀的骰子两次, 向上一面的点数依次记为 a, b . 那么方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有解的概率是

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{8}{15}$ D. $\frac{19}{36}$

8. 欣欣服装店某天用相同的价格 $a (a > 0)$ 卖出了两件服装, 其中一件盈利 20%, 另一件亏损 20%, 那么该服装店卖出这两件服装的盈利情况是

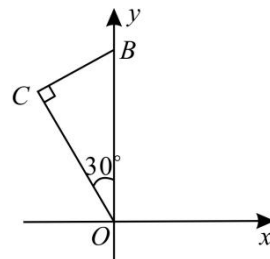
- A. 盈利 B. 亏损 C. 不盈不亏 D. 与售价 a 有关

9. 如果函数 $y = kx + b$ (k, b 是常数) 的图象不经过第二象限, 那么 k, b 应满足的条件是

- A. $k \geq 0$ 且 $b \leq 0$ B. $k > 0$ 且 $b \leq 0$ C. $k \geq 0$ 且 $b < 0$ D. $k > 0$ 且 $b < 0$

10. 如图, $\text{Rt}\triangle OCB$ 的斜边在 y 轴上, $OC = \sqrt{3}$, 含 30° 角的顶点与原点重合, 直角顶点 C 在第二象限, 将 $\text{Rt}\triangle OCB$ 绕原点顺时针旋转 120° 后得到 $\triangle OC'B'$, 则 B 点的对应点 B' 的坐标是

- A. $(\sqrt{3}, -1)$ B. $(1, -\sqrt{3})$
C. $(2, 0)$ D. $(\sqrt{3}, 0)$



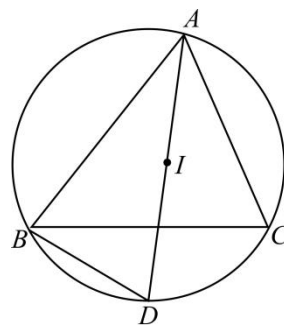
第10题图

11. 下列运算不正确的是

- A. $xy + x - y - 1 = (x-1)(y+1)$
B. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = \frac{1}{2}(x+y+z)^2$
C. $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$
D. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

12. 如图, $\triangle ABC$ 内心为 I , 连接 AI 并延长交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D , 则线段 DI 与 DB 的关系是

- A. $DI = DB$ B. $DI > DB$
C. $DI < DB$ D. 不确定



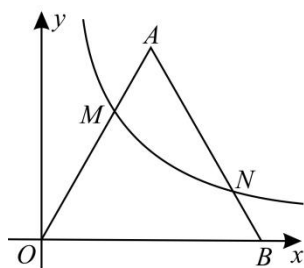
第12题图

二、填空题：本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

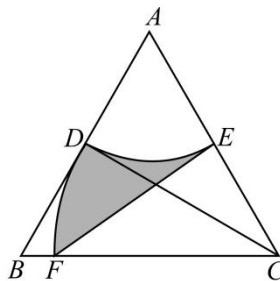
13. 计算 $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + |\sin 30^\circ - \pi^0| + \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} =$.

14. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 + (3k+1)x + 2k^2 + 1 = 0$ 的两个不相等实数根，且满足 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 8k^2$ ，则 k 的值为.

15. 如图，在平面直角坐标系中，函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图象与等边三角形 OAB 的边 OA ， AB 分别交于点 M, N ，且 $OM = 2MA$ ，若 $AB = 3$ ，那么点 N 的横坐标为.



第15题图



第16题图

16. 如图，等边三角形 ABC 的边长为 2，以 A 为圆心，1 为半径作圆分别交 AB, AC 边于 D, E ，再以点 C 为圆心， CD 长为半径作圆交 BC 边于 F ，连接 E, F ，那么图中阴影部分的面积为.

17. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数) 的顶点为 P ，且抛物线经过点 $A(-1, 0)$ ， $B(m, 0)$ ， $C(-2, n)$ ($1 < m < 3, n < 0$). 下列结论：

- ① $abc > 0$ ， ② $3a + c < 0$ ，
③ $a(m-1) + 2b > 0$ ， ④ $a = -1$ 时，存在点 P 使 $\triangle PAB$ 为直角三角形.

其中正确结论的序号为.

三、解答题：共 69 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. (8 分)

先化简，再求值：

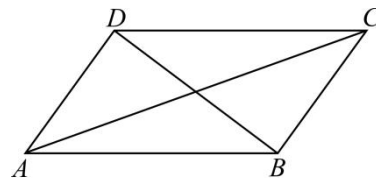
$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \cdot \frac{2a-2b}{3a+3b} - \frac{4a^2}{a^2-b^2} \div \frac{3a}{b}, \text{ 其中 } a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}.$$

19. (9 分)

如图, 已知平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 5, BC = 3, AC = 2\sqrt{13}$.

(1)求平行四边形 $ABCD$ 的面积;

(2)求证: $BD \perp BC$.



第19题图

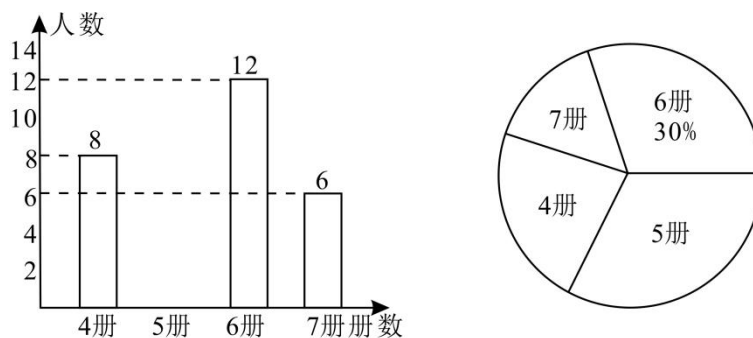
20. (10 分)

高尔基说: “书, 是人类进步的阶梯.” 阅读可以丰富知识、拓展视野、充实生活等诸多益处. 为了解学生的课外阅读情况, 某校随机抽查了部分学生阅读课外书册数的情况, 并绘制出如下统计图. 其中条形统计图因为破损丢失了阅读 5 册书数的数据.

(1)求条形图中丢失的数据, 并写出阅读书册数的众数和中位数;

(2)根据随机抽查的这个结果, 请估计该校 1200 名学生中课外阅读 5 册书的学生人数;

(3)若学校又补查了部分同学的课外阅读情况, 得知这部分同学中课外阅读最少的是 6 册, 将补查的情况与之前的数据合并后发现中位数并没有改变, 试求最多补查了多少人?



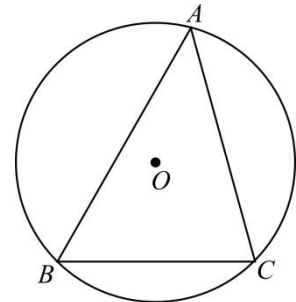
第20题图

21. (10 分)

已知锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O , 半径为 R .

(1) 求证: $\frac{AC}{\sin B} = 2R$;

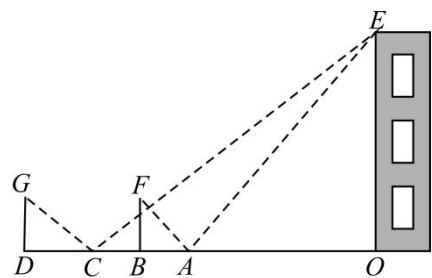
(2) 若 $\triangle ABC$ 中 $\angle A = 45^\circ, \angle B = 60^\circ, AC = \sqrt{3}$, 求 BC 的长及 $\sin C$ 的值.



第21题图

22. (10 分)

如图, 为了测量一栋楼的高度 OE , 小明同学先在操场上 A 处放一面镜子, 向后退到 B 处, 恰好在镜子中看到楼的顶部 E ; 再将镜子放到 C 处, 然后后退到 D 处, 恰好再次在镜子中看到楼的顶部 E (O, A, B, C, D 在同一条直线上). 测得 $AC = 2\text{m}$, $BD = 2.1\text{m}$, 如果小明眼睛距地面高度 BF, DG 为 1.6m , 试确定楼的高度 OE .



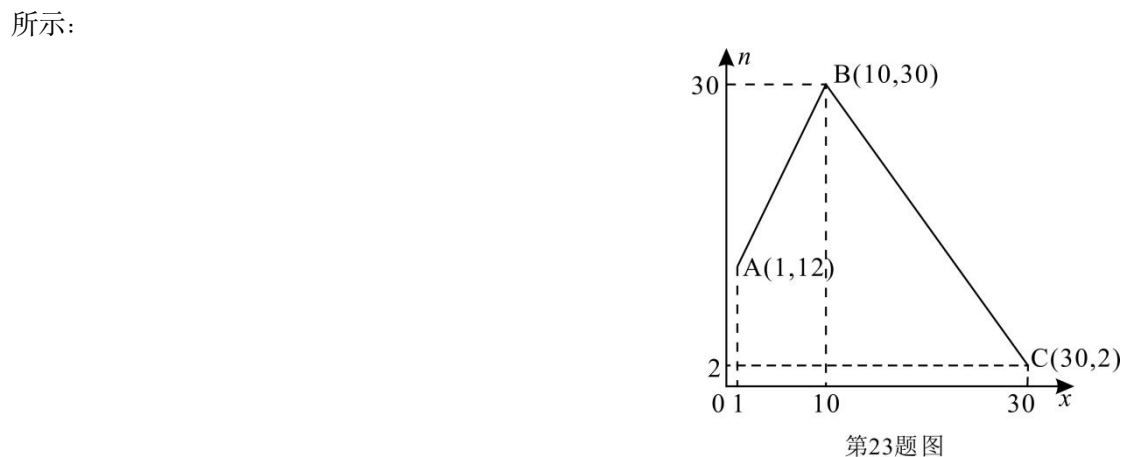
第22题图

23. (10 分)

为落实“精准扶贫”精神，市农科院专家指导李大爷利用坡前空地种植优质草莓.根据市场调查，在草莓上市销售的 30 天中，其销售价格 m （元/公斤）与第 x 天之间满足

$$m = \begin{cases} 3x + 15 & (1 \leq x \leq 15), \\ -x + 75 & (15 < x \leq 30). \end{cases} \quad (x \text{ 为正整数}),$$

销售量 n （公斤）与第 x 天之间的函数关系如图



如果李大爷的草莓在上市销售期间每天的维护费用为 80 元.

- (1)求销售量 n 与第 x 天之间的函数关系式;
- (2)求在草莓上市销售的 30 天中，每天的销售利润 y 与第 x 天之间的函数关系式;（日销售利润=日销售额-日维护费）
- (3)求日销售利润 y 的最大值及相应的 x .

24. (12 分)

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 顶点 $(2, -1)$ ，经过点 $(0, 3)$ ，且与直线 $y = x - 1$ 交于 A, B 两点.

- (1)求抛物线的解析式;
- (2)若在抛物线上恰好存在三点 Q, M, N ，满足 $S_{\triangle QAB} = S_{\triangle MAB} = S_{\triangle NAB} = S$ ，求 S 的值;
- (3)在 A, B 之间的抛物线弧上是否存在点 P 满足 $\angle APB = 90^\circ$? 若存在，求点 P 的横坐标，若不存在，请说明理由.

(坐标平面内两点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 之间的距离 $MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$)

荆门市 2019 年初中学业水平考试
数学试题参考答案

一、选择题

1.B 2.B 3.A 4.C 5.C 6.C
7.D 8.B 9.A 10.A 11.B 12.A

二、填空题

13. $1-\sqrt{3}$ 14. 1 15. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 16. $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}$ 17. ②③

三、解答题

18. 解:

$$\text{原式} = \frac{2(a+b)}{3(a-b)} - \frac{4ab}{3(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{2(a+b)^2 - 4ab}{3(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{2(a^2+b^2)}{3(a^2-b^2)},$$

$$\because a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}, \therefore \text{原式} = \frac{2(3+2)}{3(3-2)} = \frac{10}{3}.$$

19. 解:

(1) 作 $CE \perp AB$, 交 AB 的延长线于 E ,

设 $BE = x, CE = h$,

$$\text{在 Rt}\triangle CEB \text{ 中: } x^2 + h^2 = 9 \cdots \cdots \text{①}$$

$$\text{在 Rt}\triangle CEA \text{ 中: } (5+x)^2 + h^2 = 52 \cdots \cdots \text{②}$$

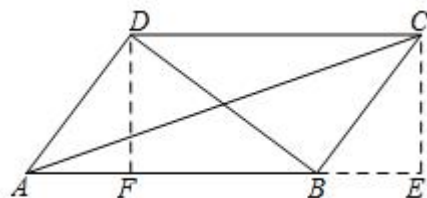
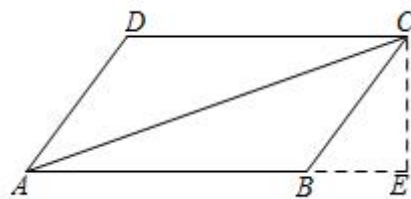
$$\text{联立①②解得: } x = \frac{9}{5}, h = \frac{12}{5},$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的面积为 $AB \cdot h = 12$;

(2) 如图: 作 $DF \perp AB$, 垂足为 F ,

$$\because \triangle ADF \cong \triangle BCE, \therefore AF = BE = \frac{9}{5}, BF = \frac{16}{5}, DF = \frac{12}{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle DFB$ 中:



$$BD^2 = DF^2 + BF^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 = 16,$$

$$\therefore BD = 4, \text{又} \because BC = 3, DC = 5, DC^2 = BD^2 + BC^2 \therefore BD \perp BC.$$

20.解:

(1)设阅读 5 册书的人数为 x , 由统计图可知:

$$\frac{12}{x+6+8+12} = 30\%, \therefore x = 14;$$

$\therefore$ 阅读书册数的众数是 5, 中位数是 5;

$$(2)\text{阅读 5 册书的学生人数频率为 } \frac{14}{6+8+12+14} = \frac{7}{20}$$

$$\text{该校阅读 5 册书的学生人数约为 } \frac{7}{20} \times 1200 = 420 \text{ (人);}$$

(3)设补查人数为 y , 依题意: $12 + 6 + y < 8 + 14$, $\therefore y < 4$,
 $\therefore$ 最多补查了 3 人.

21.解:

(1)连接 AO 并延长交圆于 D 点, 连接 CD ,
 $\because AD$ 为直径, $\therefore \angle ACD = 90^\circ$, 且 $\angle ABC = \angle ADC$,

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中: } \sin \angle ABC = \sin \angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{AC}{2R},$$

$$\therefore \frac{AC}{\sin B} = 2R;$$

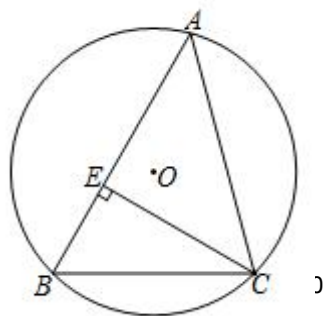
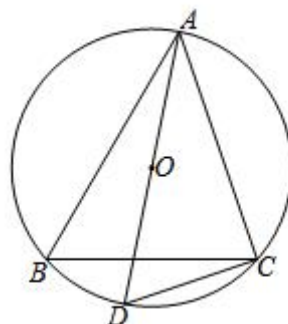
$$(2)\text{由(1)知 } \frac{AC}{\sin B} = 2R, \text{ 同理可得 } \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = 2R$$

$$\therefore 2R = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2,$$

$$\therefore BC = 2R \cdot \sin A = 2 \sin 45^\circ = \sqrt{2},$$

如图, 作 $CE \perp AB$, 垂足为 E ,

$$\therefore BE = BC \cdot \cos B = \sqrt{2} \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$



$$AE = AC \cdot \cos A = \sqrt{3} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore AB = AE + BE = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because AB = 2R \cdot \sin C, \therefore \sin C = \frac{AB}{2R} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

22.解:

设 E 关于点 O 的对称点为 M , 由光的反射定律知, 延长 GC, FA 相交于 M ,

连接 GF 并延长交 OE 于 H ,

$\because GF \parallel AC, \therefore \triangle MAC \sim \triangle MFG$,

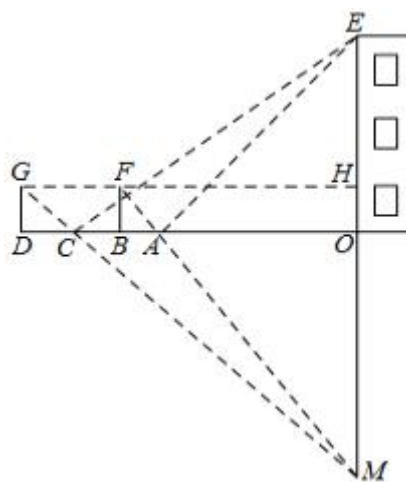
$$\therefore \frac{AC}{FG} = \frac{MA}{MF} = \frac{MO}{MH},$$

$$\text{即 } \frac{AC}{BD} = \frac{OE}{MH} = \frac{OE}{MO+OH} = \frac{OE}{OE+BF},$$

$$\therefore \frac{OE}{OE+1.6} = \frac{2}{2.1},$$

$$\therefore OE = 32.$$

答: 楼的高度 OE 为 32 米.



23.解:

$$(1) \text{ 当 } 1 \leq x \leq 10 \text{ 时, 设 } n = kx + b, \text{ 由图可知: } \begin{cases} 12 = k + b \\ 30 = 10k + b \end{cases}, \text{ 解得 } k = 2, b = 10,$$

$$\therefore n = 2x + 10,$$

$$\text{同理当 } 10 < x \leq 30 \text{ 时, } n = -1.4x + 44,$$

$$\therefore n = \begin{cases} 2x + 10 (1 \leq x \leq 10) \\ -1.4x + 44 (10 < x \leq 30) \end{cases};$$

$$(2) \because y = mn - 80, \therefore y = \begin{cases} (2x + 10)(3x + 15) - 80 (1 \leq x \leq 10) \\ (-1.4x + 44)(3x + 15) - 80 (10 < x < 15) \\ (-1.4x + 44)(-x + 75) - 80 (15 \leq x \leq 30) \end{cases}$$

$$\text{即} \therefore y = \begin{cases} 6x^2 + 60x + 70 (1 \leq x \leq 10) \\ -4.2x^2 + 111x + 580 (10 < x < 15) \\ 1.4x^2 - 149x + 3220 (15 \leq x \leq 30) \end{cases}$$

(3) 当 $1 \leq x \leq 10$ 时, $\because y = 6x^2 + 60x + 70$ 的对称轴是 $x = -5$,

$\therefore y$ 的最大值是 $y_{10} = 1270$,

当 $10 < x < 15$ 时, $\because y = -4.2x^2 + 111x + 580$ 的对称轴是 $x = \frac{111}{8.4} \approx 13.2 < 13.5$,

$\therefore y$ 的最大值是 $y_{13} = 1313.2$,

当 $15 \leq x \leq 30$ 时, $\because y = 1.4x^2 - 149x + 3220$ 的对称轴是 $x = \frac{149}{2.8} > 30$,

$\therefore y$ 的最大值是 $y_{15} = 1300$,

综上, 草莓销售第13天时, 日销售利润 y 最大, 最大值是1313.2元.

24.解:

(1)依题意 $y = ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 - 1 (a > 0)$, 将点 $(0,3)$ 代入得:

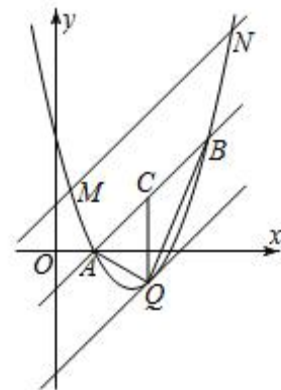
$$4a - 1 = 3, \therefore a = 1,$$

$\therefore$ 函数的解析式为 $y = x^2 - 4x + 3$;

(2) 作直线 AB 的平行线 l , 当 l 与抛物线有两个交点时, 由对称性可知: l 位于直线 AB 两侧且与 l 等距离时, 会有四个点符合题意, 因为当 l 位于直线 AB 上方时, l 与抛物线总有两个交点 M, N 满足 $S_{\triangle MAB} = S_{\triangle NAB}$, 所以只有当 l 位于直线 AB 下方且与抛物线只有一个交点 Q 时符合题意, 此时 $\triangle QAB$ 面积最大;

设 $Q(t, t^2 - 4t + 3)$, 作 $QC \parallel y$ 轴交 AB 于 $C(t, t-1)$,

$$\text{那么 } S_{\triangle QAB} = \frac{1}{2} QC(x_B - x_A) = \frac{3}{2} [(t-1) - (t^2 - 4t + 3)] = \frac{3}{2} (-t^2 + 5t - 4)$$



当 $t = \frac{5}{2}$ 时 $\triangle QAB$ 面积最大, 最大面积为 $\frac{27}{8}$, $\therefore S = \frac{27}{8}$;

(3) 若存在点 P 满足条件, 设 $P(t, (t-2)^2 - 1) (1 < t < 4)$,

$$\because PA \perp PB, \therefore PA^2 + PB^2 = AB^2,$$

$$\text{即 } (t-1)^2 + [(t-2)^2 - 1]^2 + (t-4)^2 + [(t-2)^2 - 4]^2 = 18,$$

设 $t-2 = m (-1 < m < 2)$, 代入上式得:

$$(m+1)^2 + (m^2 - 1)^2 + (m-2)^2 + (m^2 - 4)^2 = 18,$$

$$\therefore m^4 - 4m^2 - m + 2 = 0, \text{ 即 } m^2(m^2 - 4) - (m-2) = 0,$$

$$\therefore (m-2)(m^3 + m^2 + m^2 - 1) = 0, \text{ 即 } (m-2)(m+1)(m^2 + m - 1) = 0,$$

$$\because -1 < m < 2, \therefore m-2 < 0, m+1 > 0, \therefore m^2 + m - 1 = 0,$$

$$\therefore m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < -1 \text{ (舍去)},$$

$$\text{代入 } t-2 = m \text{ 得: } t = \frac{3 + \sqrt{5}}{2},$$

综上所述, 存在点 P 满足条件, 点 P 的横坐标为 $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

积分超值换

活动时间：2019年4月23日-6月30日

活动对象：中小学一线教师以及教育工作者



扫一扫 换礼啦

积 分 兑 换 更 超 值



会员升级服务第一拨 · 清北季



神马，有清华北大学霸方法论课；还有清华学霸向所有的父母亲述自己求学之路；

衡水名校试卷悄悄的上线了；

扫qq领取官网不首发课程，很多人我没告诉他啊！

会员qq专享等你来撩.....