

湖北省黄石市 2018 年中考数学真题试题

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求的）

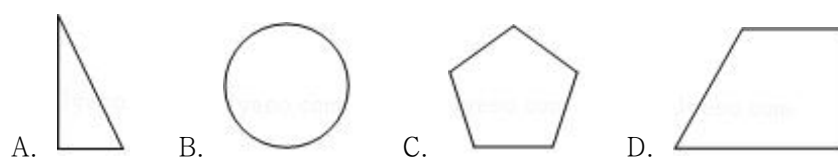
1. (3 分) 下列各数是无理数的是 ()

- A. 1 B. -0.6 C. -6 D. π

2. (3 分) 太阳半径约 696000 千米，则 696000 千米用科学记数法可表示为 ()

- A. 0.696×10^6 B. 6.96×10^8 C. 0.696×10^7 D. 6.96×10^5

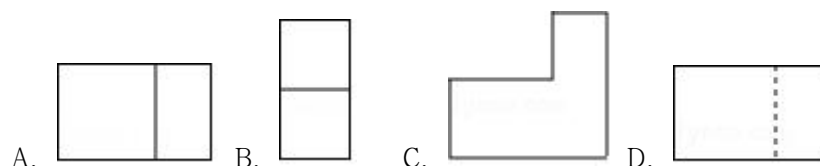
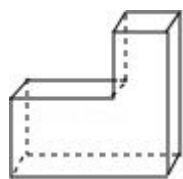
3. (3 分) 下列图形中是轴对称图形但不是中心对称图形的是 ()



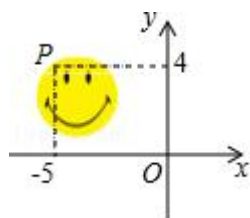
4. (3 分) 下列计算中，结果是 a^7 的是 ()

- A. $a^3 - a^4$ B. $a^3 \cdot a^4$ C. $a^3 + a^4$ D. $a^3 \div a^4$

5. (3 分) 如图，该几何体的俯视图是 ()

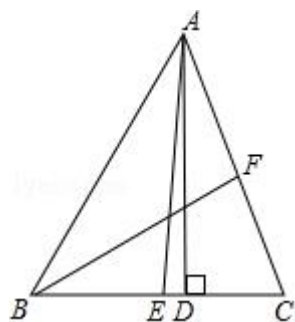


6. (3 分) 如图，将“笑脸”图标向右平移 4 个单位，再向下平移 2 个单位，点 P 的对应点 P' 的坐标是 ()



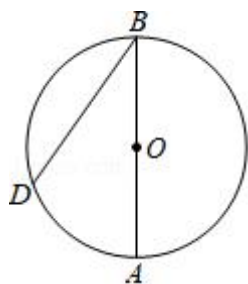
- A. $(-1, 6)$ B. $(-9, 6)$ C. $(-1, 2)$ D. $(-9, 2)$

7. (3 分) 如图， $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的高，AE、BF 分别是 $\angle BAC$ 、 $\angle ABC$ 的平分线， $\angle BAC = 50^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，则 $\angle EAD + \angle ACD =$ ()



A. 75° B. 80° C. 85° D. 90°

8. (3分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 D 为 $\odot O$ 上一点, 且 $\angle ABD = 30^\circ$, $BO = 4$, 则 $\widehat{BD}$ 的长为 ()

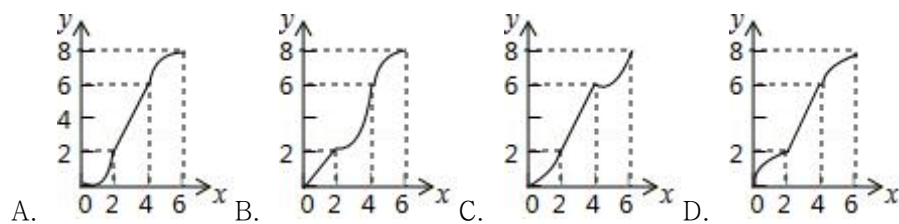
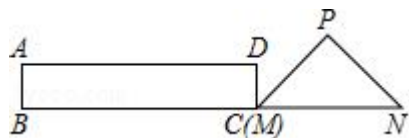


A. $\frac{2}{3}\pi$ B. $\frac{4}{3}\pi$ C. 2π D. $\frac{8}{3}\pi$

9. (3分) 已知一次函数 $y_1 = x - 3$ 和反比例函数 $y_2 = \frac{4}{x}$ 的图象在平面直角坐标系中交于 A、B 两点, 当 $y_1 > y_2$ 时, x 的取值范围是 ()

A. $x < -1$ 或 $x > 4$ B. $-1 < x < 0$ 或 $x > 4$
C. $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < 4$ D. $x < -1$ 或 $0 < x < 4$

10. (3分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle PMN$ 中, $\angle P = 90^\circ$, $PM = PN$, $MN = 6\text{cm}$, 矩形 ABCD 中 $AB = 2\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$, 点 C 和点 M 重合, 点 B、C (M)、N 在同一直线上, 令 $\text{Rt}\triangle PMN$ 不动, 矩形 ABCD 沿 MN 所在直线以每秒 1cm 的速度向右移动, 至点 C 与点 N 重合为止, 设移动 x 秒后, 矩形 ABCD 与 $\triangle PMN$ 重叠部分的面积为 y , 则 y 与 x 的大致图象是 ()



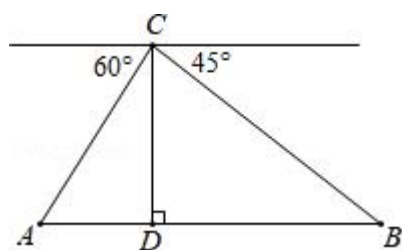
二、填空题（本大题给共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

11. (3 分) 分解因式: $x^3y - xy^3 =$ _____.

12. (3 分) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $CA=8$, $CB=6$, 则 $\triangle ABC$ 内切圆的周长为_____

13. (3 分) 分式方程 $\frac{4x+1}{x^2-1} - \frac{5}{2(x-1)} = 1$ 的解为_____

14. (3 分) 如图, 无人机在空中 C 处测得地面 A 、 B 两点的俯角分别为 60° 、 45° , 如果无人机距地面高度 CD 为 $100\sqrt{3}$ 米, 点 A 、 D 、 E 在同一水平直线上, 则 A 、 B 两点间的距离是_____米. (结果保留根号)



15. (3 分) 在一个不透明的布袋中装有标着数字 2, 3, 4, 5 的 4 个小球, 这 4 个小球的材质、大小和形状完全相同, 现从中随机摸出两个小球, 这两个小球上的数字之积大于 9 的概率为_____

16. (3 分) 小光和小王玩“石头、剪子、布”游戏, 规定: 一局比赛后, 胜者得 3 分, 负者得 -1 分, 平局两人都得 0 分, 小光和小王都制订了自己的游戏策略, 并且两人都不知道对方的策略.

小光的策略是: 石头、剪子、布、石头、剪子、布、……

小王的策略是: 剪子、随机、剪子、随机…… (说明: 随机指 2 石头、剪子、布中任意一个)

例如, 某次游戏的前 9 局比赛中, 两人当时的策略和得分情况如下表

局数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
小光实际策略	石头	剪子	布	石头	剪子	布	石头	剪子	布
小王实际策略	剪子	布	剪子	石头	剪子	剪子	剪子	石头	剪子
小光得分	3	3	-1	0	0	-1	3	-1	-1
小王得分	-1	-1	3	0	0	3	-1	3	3

已知在另一次游戏中, 50 局比赛后, 小光总得分为 -6 分, 则小王总得分为_____分.

三、解答题 (本大题共 9 小题, 共 72 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或验算步骤)

17. (7分) 计算: $(\sqrt{2})^{-2} + (\pi^2 - \pi)^0 + \cos 60^\circ + |\sqrt{2} - 2|$

18. (7分) 先化简, 再求值: $\frac{x^2-1}{x^3} \div \frac{x+1}{x}$. 其中 $x = \sin 60^\circ$.

19. (7分) 解不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) \leq 2 \\ \frac{x+2}{2} \geq \frac{x+3}{3} \end{cases}$, 并求出不等式组的整数解之和.

20. (8分) 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2

(1) 求实数 m 的取值范围;

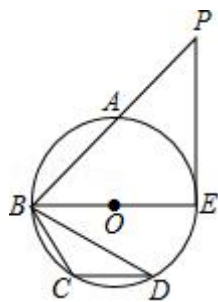
(2) 若 $x_1 - x_2 = 2$, 求实数 m 的值.

21. (8分) 如图, 已知 A, B, C, D, E 是 $\odot O$ 上五点, $\odot O$ 的直径 $BE = 2\sqrt{3}$, $\angle BCD = 120^\circ$,

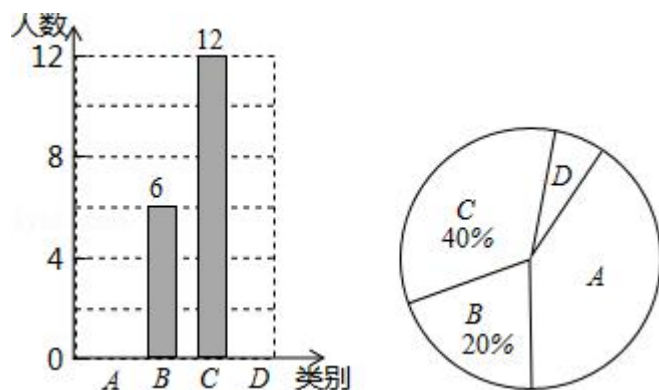
A 为 $\widehat{BE}$ 的中点, 延长 BA 到点 P , 使 $BA = AP$, 连接 PE .

(1) 求线段 BD 的长;

(2) 求证: 直线 PE 是 $\odot O$ 的切线.



22. (8分) 随着社会的发展, 通过微信朋友圈发布自己每天行走的步数已经成为一种时尚. “健身达人”小陈为了了解他的好友的运动情况. 随机抽取了部分好友进行调查, 把他们6月1日那天行走的情况分为四个类别: A (0~5000步) (说明: “0~5000”表示大于等于0, 小于等于5000, 下同), B (5001~10000步), C (10001~15000步), D (15000步以上), 统计结果如图所示:



请依据统计结果回答下列问题:

(1) 本次调查中, 一共调查了_____位好友.

(2) 已知 A 类好友人数是 D 类好友人数的 5 倍.

①请补全条形图;

②扇形图中, “A” 对应扇形的圆心角为_____度.

③若小陈微信朋友圈共有好友 150 人, 请根据调查数据估计大约有多少位好友 6 月 1 日这天行走的步数超过 10000 步?

23. (8 分) 某年 5 月, 我国南方某省 A、B 两市遭受严重洪涝灾害, 1.5 万人被迫转移, 邻近县市 C、D 获知 A、B 两市分别急需救灾物资 200 吨和 300 吨的消息后, 决定调运物资支援灾区. 已知 C 市有救灾物资 240 吨, D 市有救灾物资 260 吨, 现将这些救灾物资全部调往 A、B 两市. 已知从 C 市运往 A、B 两市的费用分别为每吨 20 元和 25 元, 从 D 市运往 A、B 两市的费用别为每吨 15 元和 30 元, 设从 D 市运往 B 市的救灾物资为 x 吨.

(1) 请填写下表

	A (吨)	B (吨)	合计 (吨)
C	_____	_____	240
D	_____	x	260
总计 (吨)	200	300	500

(2) 设 C、D 两市的总运费为 w 元, 求 w 与 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;

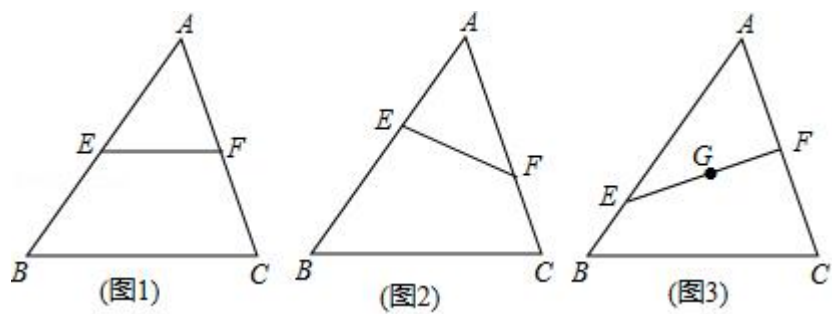
(3) 经过抢修, 从 D 市到 B 市的路况得到了改善, 缩短了运输时间, 运费每吨减少 m 元 ($m > 0$), 其余路线运费不变. 若 C、D 两市的总运费的最小值不小于 10320 元, 求 m 的取值范围.

24. (9 分) 在 $\triangle ABC$ 中, E、F 分别为线段 AB、AC 上的点 (不与 A、B、C 重合).

(1) 如图 1, 若 $EF \parallel BC$, 求证: $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE \cdot AF}{AB \cdot AC}$

(2) 如图 2, 若 EF 不与 BC 平行, (1) 中的结论是否仍然成立? 请说明理由;

(3) 如图 3, 若 EF 上一点 G 恰为 $\triangle ABC$ 的重心, $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{4}$, 求 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值.



25. (10 分) 已知抛物线 $y=a(x-1)^2$ 过点 $(3, 1)$, D 为抛物线的顶点.

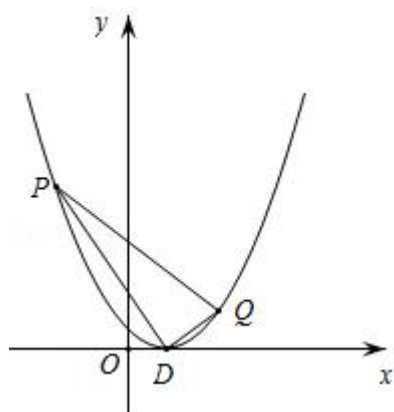
(1) 求抛物线的解析式;

(2) 若点 B、C 均在抛物线上, 其中点 B $(0, \frac{1}{4})$, 且 $\angle BDC=90^\circ$, 求点 C 的坐标;

(3) 如图, 直线 $y=kx+4-k$ 与抛物线交于 P、Q 两点.

①求证: $\angle PDQ=90^\circ$;

②求 $\triangle PDQ$ 面积的最小值.



参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求的）

1. (3 分) 下列各数是无理数的是 ()

A. 1 B. -0.6 C. -6 D. π

【分析】依据无理数的三种常见类型进行判断即可.

【解答】解：A、1 是整数，为有理数；

B、 -0.6 是有限小数，即分数，属于有理数；

C、 -6 是整数，属于有理数；

D、 π 是无理数；

故选：D.

【点评】本题主要考查的是无理数的定义，熟练掌握无理数的三种常见类型是解题的关键.

2. (3 分) 太阳半径约 696000 千米，则 696000 千米用科学记数法可表示为 ()

A. 0.696×10^6 B. 6.96×10^8 C. 0.696×10^7 D. 6.96×10^5

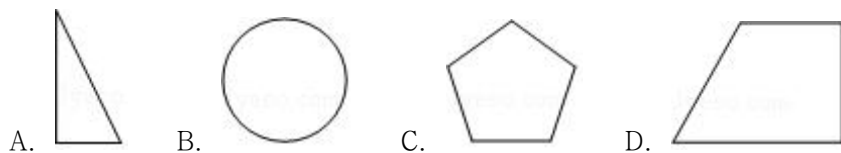
【分析】根据科学记数法的表示方法可以将题目中的数据用科学记数法表示，本题得以解决.

【解答】解：696000 千米=696000000 米= 6.96×10^8 米，

故选：B.

【点评】本题考查科学记数法 - 表示较大的数，解答本题的关键是明确科学记数法的表示方法.

3. (3 分) 下列图形中是轴对称图形但不是中心对称图形的是 ()



【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

【解答】解：A、不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故此选项错误；

B、是轴对称图形，也是中心对称图形，故此选项错误；

C、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项正确；

D、不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故此选项错误.

故选：C.

【点评】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合.

4. (3 分) 下列计算中，结果是 a^7 的是 ()

A. $a^3 - a^4$ B. $a^3 \cdot a^4$ C. $a^3 + a^4$ D. $a^3 \div a^4$

【分析】根据同底数幂的乘、除法法则、合并同类项法则计算，判断即可.

【解答】解：A、 a^3 与 a^4 不能合并；

B、 $a^3 \cdot a^4 = a^7$ ，

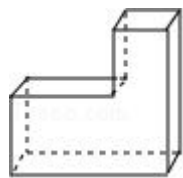
C、 a^3 与 a^4 不能合并；

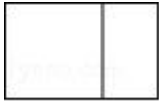
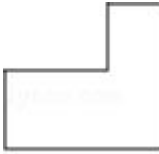
D、 $a^3 \div a^4 = \frac{1}{a}$ ；

故选：B.

【点评】本题考查的是同底数幂的乘、除法、合并同类项，掌握它们的运算法则是解题的关键.

5. (3 分) 如图，该几何体的俯视图是 ()



A.  B.  C.  D. 

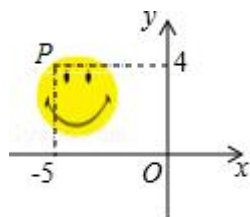
【分析】找到从几何体的上面所看到的图形即可.

【解答】解：从几何体的上面看可得 ,

故选：A.

【点评】此题主要考查了简单几何体的三视图，关键是掌握所看的位置.

6. (3分) 如图, 将“笑脸”图标向右平移4个单位, 再向下平移2个单位, 点P的对应点P'的坐标是 ()



- A. $(-1, 6)$ B. $(-9, 6)$ C. $(-1, 2)$ D. $(-9, 2)$

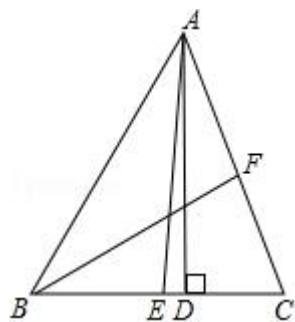
【分析】 根据平移规律: 横坐标, 右移加, 左移减; 纵坐标, 上移加, 下移减即可解决问题;

【解答】 解: 由题意 $P(-5, 4)$, 向右平移4个单位, 再向下平移2个单位, 点P的对应点P'的坐标是 $(-1, 2)$,

故选: C.

【点评】 本题考查坐标与平移, 解题的关键是记住平移规律: 坐标, 右移加, 左移减; 纵坐标, 上移加, 属于中考常考题型.

7. (3分) 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的高, AE、BF 分别是 $\angle BAC$ 、 $\angle ABC$ 的平分线, $\angle BAC=50^\circ$, $\angle ABC=60^\circ$, 则 $\angle EAD+\angle ACD=$ ()



- A. 75° B. 80° C. 85° D. 90°

【分析】 依据 AD 是 BC 边上的高, $\angle ABC=60^\circ$, 即可得到 $\angle BAD=30^\circ$, 依据 $\angle BAC=50^\circ$, AE 平分 $\angle BAC$, 即可得到 $\angle DAE=5^\circ$, 再根据 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=180^\circ - \angle ABC - \angle BAC=70^\circ$, 可得 $\angle EAD+\angle ACD=75^\circ$.

【解答】 解: $\because$ AD 是 BC 边上的高, $\angle ABC=60^\circ$,

$$\therefore \angle BAD=30^\circ,$$

$$\because \angle BAC=50^\circ, \text{ AE 平分 } \angle BAC,$$

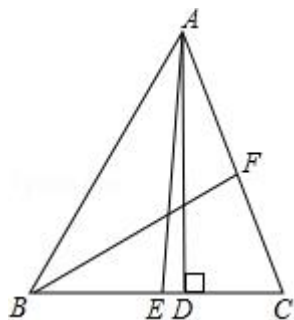
$$\therefore \angle BAE=25^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = 30^\circ - 25^\circ = 5^\circ,$$

$$\because \triangle ABC \text{ 中, } \angle C = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 70^\circ,$$

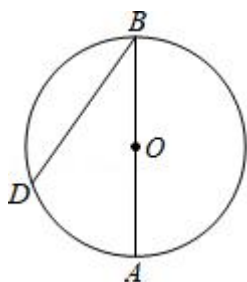
$$\therefore \angle EAD + \angle ACD = 5^\circ + 70^\circ = 75^\circ,$$

故选: A.



【点评】 本题考查了三角形内角和定理: 三角形内角和为 180° . 解决问题的关键是三角形外角性质以及角平分线的定义的运用.

8. (3分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 D 为 $\odot O$ 上一点, 且 $\angle ABD = 30^\circ$, $BO = 4$, 则 $\widehat{BD}$ 的长为 ()



- A. $\frac{2}{3}\pi$ B. $\frac{4}{3}\pi$ C. 2π D. $\frac{8}{3}\pi$

【分析】 先计算圆心角为 120° , 根据弧长公式 $= \frac{n\pi R}{180}$, 可得结果.

【解答】 解: 连接 OD,

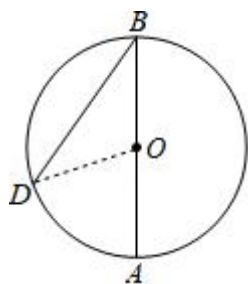
$$\because \angle ABD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 2\angle ABD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = 120^\circ,$$

$$\therefore \widehat{BD} \text{ 的长} = \frac{120\pi \times 4}{180} = \frac{8\pi}{3},$$

故选: D.



【点评】 本题考查了弧长的计算和圆周角定理，熟练掌握弧长公式是关键，属于基础题.

9. (3分) 已知一次函数 $y_1=x-3$ 和反比例函数 $y_2=\frac{4}{x}$ 的图象在平面直角坐标系中交于 A、B 两点，当 $y_1>y_2$ 时，x 的取值范围是 ()
- A. $x<-1$ 或 $x>4$ B. $-1<x<0$ 或 $x>4$
- C. $-1<x<0$ 或 $0<x<4$ D. $x<-1$ 或 $0<x<4$

【分析】 先求出两个函数的交点坐标，再根据函数的图象和性质得出即可.

【解答】 解：解方程组 $\begin{cases} y=x-3 \\ y=\frac{4}{x} \end{cases}$ 得： $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=1 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-4 \end{cases}$ ，

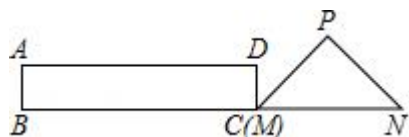
即 A (4, 1)，B (-1, -4)，

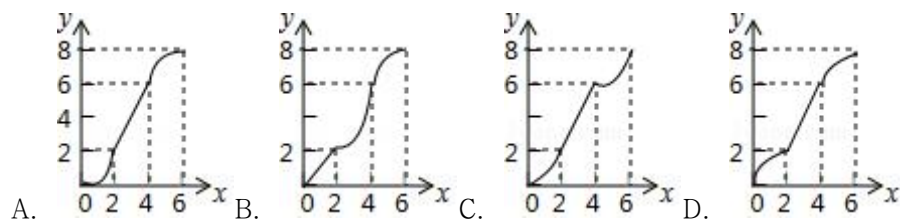
所以当 $y_1>y_2$ 时，x 的取值范围是 $-1<x<0$ 或 $x>4$ ，

故选：B.

【点评】 本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，能熟记函数的性质和图象是解此题的关键.

10. (3分) 如图，在 $Rt\triangle PMN$ 中， $\angle P=90^\circ$ ， $PM=PN$ ， $MN=6cm$ ，矩形 ABCD 中 $AB=2cm$ ， $BC=10cm$ ，点 C 和点 M 重合，点 B、C (M)、N 在同一直线上，令 $Rt\triangle PMN$ 不动，矩形 ABCD 沿 MN 所在直线以每秒 1cm 的速度向右移动，至点 C 与点 N 重合为止，设移动 x 秒后，矩形 ABCD 与 $\triangle PMN$ 重叠部分的面积为 y，则 y 与 x 的大致图象是 ()





【分析】在 $Rt\triangle PMN$ 中解题，要充分运用好垂直关系和 45° 角，因为此题也是点的移动问题，可知矩形 $ABCD$ 以每秒 $1cm$ 的速度由开始向右移动到停止，和 $Rt\triangle PMN$ 重叠部分的形状可分为下列三种情况，(1) $0 \leq x \leq 2$ ；(2) $2 < x \leq 4$ ；(3) $4 < x \leq 6$ ；根据重叠图形确定面积的求法，作出判断即可。

【解答】解： $\because \angle P = 90^\circ$ ， $PM = PN$ ，

$\therefore \angle PMN = \angle PNM = 45^\circ$ ，

由题意得： $CM = x$ ，

分三种情况：

①当 $0 \leq x \leq 2$ 时，如图 1，边 CD 与 PM 交于点 E ，

$\because \angle PMN = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle MEC$ 是等腰直角三角形，

此时矩形 $ABCD$ 与 $\triangle PMN$ 重叠部分是 $\triangle EMC$ ，

$$\therefore y = S_{\triangle EMC} = \frac{1}{2} CM \cdot CE = \frac{1}{2} x^2;$$

故选项 B 和 D 不正确；

②如图 2，当 D 在边 PN 上时，过 P 作 $PF \perp MN$ 于 F ，交 AD 于 G ，

$\because \angle N = 45^\circ$ ， $CD = 2$ ，

$\therefore CN = CD = 2$ ，

$\therefore CM = 6 - 2 = 4$ ，

即此时 $x = 4$ ，

当 $2 < x \leq 4$ 时，如图 3，矩形 $ABCD$ 与 $\triangle PMN$ 重叠部分是四边形 $EMCD$ ，

过 E 作 $EF \perp MN$ 于 F ，

$\therefore EF = MF = 2$ ，

$\therefore ED = CF = x - 2$ ，

$$\therefore y = S_{\text{梯形 } EMCD} = \frac{1}{2} CD \cdot (DE + CM) = \frac{1}{2} \times 2 \times (x - 2 + x) = 2x - 2;$$

③当 $4 < x \leq 6$ 时，如图 4，矩形 $ABCD$ 与 $\triangle PMN$ 重叠部分是五边形 $EMCGF$ ，过 E 作 $EH \perp$

MN 于 H,

$$\therefore EH = MH = 2, DE = CH = x - 2,$$

$$\because MN = 6, CM = x,$$

$$\therefore CG = CN = 6 - x,$$

$$\therefore DF = DG = 2 - (6 - x) = x - 4,$$

$$\therefore y = S_{\text{梯形 EMCD}} - S_{\triangle FDG} = \frac{1}{2}CD(DE + CM) - \frac{1}{2}DG^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (x - 2 + x) - \frac{1}{2}(x - 4)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 10x - 18,$$

故选项 A 正确;

故选: A.

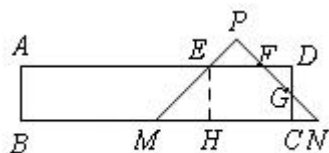


图4

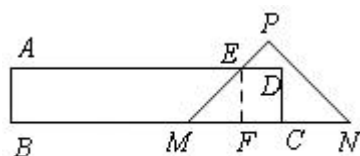


图3

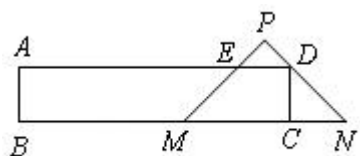


图2

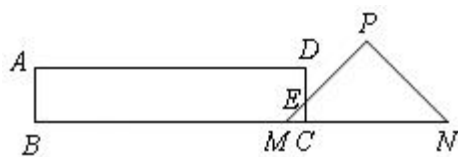


图1

【点评】此题是动点问题的函数图象,有难度,主要考查等腰直角三角形的性质和矩形的性质的应用、动点运动问题的路程表示,注意运用数形结合和分类讨论思想的应用.

二、填空题(本大题给共 6 小题,每小题 3 分,共 18 分)

11. (3 分) 分解因式: $x^3y - xy^3 = \underline{xy(x+y)(x-y)}$.

【分析】首先提取公因式 xy , 再对余下的多项式运用平方差公式继续分解.

【解答】解: $x^3y - xy^3$,

$$=xy(x^2 - y^2),$$

$$=xy(x+y)(x-y).$$

【点评】本题考查了用提公因式法和公式法进行因式分解，一个多项式有公因式，要首先提取公因式，然后再用其他方法进行因式分解，同时因式分解要彻底，直到不能分解为止.

12. (3分) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $CA=8$, $CB=6$, 则 $\triangle ABC$ 内切圆的周长为 4π

【分析】先利用勾股定理计算出 AB 的长, 再利用直角三角形内切圆的半径的计算方法求出 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径, 然后利用圆的面积公式求解.

【解答】解: $\because \angle C=90^\circ$, $CA=8$, $CB=6$,

$$\therefore AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的内切圆的半径} = \frac{6+8-10}{2} = 2,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 内切圆的周长} = \pi \cdot 2^2 = 4\pi.$$

故答案为 4π .

【点评】本题考查了三角形的内切圆与内心: 三角形的内心到三角形三边的距离相等; 三角形的内心与三角形顶点的连线平分这个内角. 记住直角三角形内切圆半径的计算方法.

13. (3分) 分式方程 $\frac{4x+1}{x^2-1} - \frac{5}{2(x-1)} = 1$ 的解为 $x=0.5$

【分析】方程两边都乘以最简公分母, 化为整式方程, 然后解方程, 再进行检验.

【解答】解: 方程两边都乘以 $2(x^2-1)$ 得,

$$8x+2-5x-5=2x^2-2,$$

$$\text{解得 } x_1=1, x_2=0.5,$$

$$\text{检验: 当 } x=0.5 \text{ 时, } x-1=0.5-1=-0.5 \neq 0,$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } x-1=0,$$

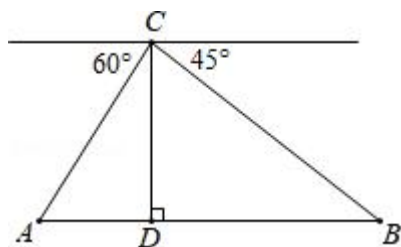
所以 $x=0.5$ 是方程的解,

故原分式方程的解是 $x=0.5$.

故答案为: $x=0.5$

【点评】本题考查了解分式方程, (1) 解分式方程的基本思想是“转化思想”, 把分式方程转化为整式方程求解. (2) 解分式方程一定要注意要验根.

14. (3分) 如图, 无人机在空中C处测得地面A、B两点的俯角分别为 60° 、 45° , 如果无人机距地面高度CD为 $100\sqrt{3}$ 米, 点A、D、E在同一水平直线上, 则A、B两点间的距离是 $100(1+\sqrt{3})$ 米. (结果保留根号)



【分析】如图, 利用平行线的性质得 $\angle A=60^\circ$, $\angle B=45^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中利用正切定义可计算出 $AD=100$, 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中利用等腰直角三角形的性质得 $BD=CD=100\sqrt{3}$, 然后计算 $AD+BD$ 即可.

【解答】解: 如图,

$\because$ 无人机在空中C处测得地面A、B两点的俯角分别为 60° 、 45° ,

$\therefore \angle A=60^\circ$, $\angle B=45^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\therefore \tan A = \frac{CD}{AD}$,

$$\therefore AD = \frac{100\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = 100,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $BD=CD=100\sqrt{3}$.

$$\therefore AB=AD+BD=100+100\sqrt{3}=100(1+\sqrt{3}).$$

答: A、B两点间的距离为 $100(1+\sqrt{3})$ 米.

故答案为 $100(1+\sqrt{3})$.

【点评】本题考查了解直角三角形的应用—仰角俯角问题: 解决此类问题要了解角之间的关系, 找到与已知和未知相关联的直角三角形, 当图形中没有直角三角形时, 要通过作高或垂线构造直角三角形.

15. (3分) 在一个不透明的布袋中装有标着数字2, 3, 4, 5的4个小球, 这4个小球的材质、大小和形状完全相同, 现从中随机摸出两个小球, 这两个小球上的数字之积大于9的概率为 $\frac{2}{3}$

【分析】列表或树状图得出所有等可能的情况数, 找出数字之积大于9的情况数, 利用概率公式即可得.

【解答】解：根据题意列表得：

	2	3	4	5
2	- - -	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)
3	(2, 3)	- - -	(4, 3)	(5, 3)
4	(2, 4)	(3, 4)	- - -	(5, 4)
5	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	- - -

由表可知所有可能结果共有 12 种，且每种结果发生的可能性相同，其中摸出的两个小球上的数字之积大于 9 的有 8 种，

所以两个小球上的数字之积大于 9 的概率为 $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ，

故答案为： $\frac{2}{3}$ 。

【点评】此题考查的是用列表法或树状图法求概率，解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验。用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比。

16. (3 分) 小光和小王玩“石头、剪子、布”游戏，规定：一局比赛后，胜者得 3 分，负者得 -1 分，平局两人都得 0 分，小光和小王都制订了自己的游戏策略，并且两人都不知道对方的策略。

小光的策略是：石头、剪子、布、石头、剪子、布、……

小王的策略是：剪子、随机、剪子、随机……（说明：随机指 2 石头、剪子、布中任意一个）

例如，某次游戏的前 9 局比赛中，两人当时的策略和得分情况如下表

局数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
小光实际策略	石头	剪子	布	石头	剪子	布	石头	剪子	布
小王实际策略	剪子	布	剪子	石头	剪子	剪子	剪子	石头	剪子
小光得分	3	3	-1	0	0	-1	3	-1	-1
小王得分	-1	-1	3	0	0	3	-1	3	3

已知在另一次游戏中，50 局比赛后，小光总得分为 -6 分，则小王总得分为 90 分。

【分析】观察二人的策略可知：每 6 局一循环，每个循环中第一局小光拿 3 分，第三局小光拿 -1 分，第五局小光拿 0 分，进而可得出五十局中可预知的小光胜 9 局、平 8 局、负 8 局，设其它二十五局中，小光胜了 x 局，负了 y 局，则平了 (25 - x - y) 局，根据 50 局比赛后小光总得分为 -6 分，即可得出关于 x、y 的二元一次方程，由 x、y、(25 - x - y) 均非负，

可得出 $x=0$ 、 $y=25$ ，再由胜一局得 3 分、负一局得 -1 分、平不得分，可求出小王的总得分.

【解答】解：由二人的策略可知：每 6 局一循环，每个循环中第一局小光拿 3 分，第三局小光拿 -1 分，第五局小光拿 0 分.

$$\because 50 \div 6 = 8 \text{ (组)} \cdots \cdots 2 \text{ (局)},$$

$$\therefore (3 - 1 + 0) \times 8 + 3 = 19 \text{ (分)}.$$

设其它二十五局中，小光胜了 x 局，负了 y 局，则平了 $(25 - x - y)$ 局，

根据题意得： $19 + 3x - y = -6$,

$$\therefore y = 3x + 25.$$

$\because x$ 、 y 、 $(25 - x - y)$ 均非负，

$$\therefore x = 0, y = 25,$$

$$\therefore \text{小王的总得分} = (-1 + 3 + 0) \times 8 - 1 + 25 \times 3 = 90 \text{ (分)}.$$

故答案为：90.

【点评】本题考查了二元一次方程的应用以及规律型中数字的变化类，找准等量关系，正确列出二元一次方程是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 9 小题，共 72 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或验算步骤)

17. (7 分) 计算： $(\sqrt{2})^{-2} + (\pi^2 - \pi)^0 + \cos 60^\circ + |\sqrt{2} - 2|$

【分析】直接利用负指数幂的性质以及特殊角的三角函数值、绝对值的性质、零指数幂的性质进而化简得出答案.

【解答】解：原式 $= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + 1 + \frac{1}{2} + 2 - \sqrt{2}$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 2 - \sqrt{2}$$
$$= 4 - \sqrt{2}.$$

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

18. (7 分) 先化简，再求值： $\frac{x^2 - 1}{x^3} \div \frac{x + 1}{x}$. 其中 $x = \sin 60^\circ$.

【分析】先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式，再根据三角函数值代入计算可得.

【解答】解：原式 $= \frac{(x + 1)(x - 1)}{x^3} \cdot \frac{x}{x + 1}$

$$= \frac{x-1}{x^2},$$

当 $x = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,

$$\text{原式} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3} - 4}{3}.$$

【点评】 本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是熟练掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

19. (7 分) 解不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) \leq 2 \\ \frac{x+2}{2} \geq \frac{x+3}{3} \end{cases}$ ，并求出不等式组的整数解之和.

【分析】 分别求出不等式组中两不等式的解集，找出解集的公共部分确定出解集，找出整数解即可.

【解答】 解：解不等式 $\frac{1}{2}(x+1) \leq 2$ ，得： $x \leq 3$ ，

解不等式 $\frac{x+2}{2} \geq \frac{x+3}{3}$ ，得： $x \geq 0$ ，

则不等式组的解集为 $0 \leq x \leq 3$ ，

所以不等式组的整数解之和为 $0+1+2+3=6$.

【点评】 此题考查了解一元一次不等式组，以及一元一次不等式组的整数解，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (8 分) 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1 、 x_2

(1) 求实数 m 的取值范围；

(2) 若 $x_1 - x_2 = 2$ ，求实数 m 的值.

【分析】 (1) 根据根的判别式得出不等式，求出不等式的解集即可；

(2) 根据根与系数的关系得出 $x_1 + x_2 = 2$ ，和已知组成方程组，求出方程组的解，再根据根与系数的关系求出 m 即可.

【解答】 解：(1) 由题意得： $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times m = 4 - 4m > 0$ ，

解得： $m < 1$ ，

即实数 m 的取值范围是 $m < 1$ ；

(2) 由根与系数的关系得: $x_1+x_2=2$,

$$\text{即} \begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1-x_2=2 \end{cases},$$

解得: $x_1=2$, $x_2=0$,

由根与系数的关系得: $m=2 \times 0=0$.

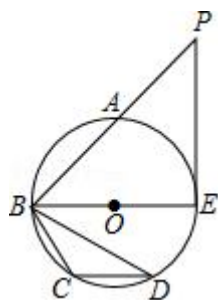
【点评】 本题考查了根与系数的关系和根的判别式、一元二次方程的解, 能熟记根与系数的关系的内容和根的判别式的内容是解此题的关键.

21. (8 分) 如图, 已知 A、B、C、D、E 是 $\odot O$ 上五点, $\odot O$ 的直径 $BE=2\sqrt{3}$, $\angle BCD=120^\circ$,

A 为 $\widehat{BE}$ 的中点, 延长 BA 到点 P, 使 $BA=AP$, 连接 PE.

(1) 求线段 BD 的长;

(2) 求证: 直线 PE 是 $\odot O$ 的切线.



【分析】 (1) 连接 DB, 如图, 利用圆内接四边形的性质得 $\angle DEB=60^\circ$, 再根据圆周角定理得到 $\angle BDE=90^\circ$, 然后根据含 30° 度的直角三角形三边的关系计算 BD 的长;

(2) 连接 EA, 如图, 根据圆周角定理得到 $\angle BAE=90^\circ$, 而 A 为 $\widehat{BE}$ 的中点, 则 $\angle ABE=45^\circ$, 再根据等腰三角形的判定方法, 利用 $BA=AP$ 得到 $\triangle BEP$ 为等腰直角三角形, 所以 $\angle PEB=90^\circ$, 然后根据切线的判定定理得到结论.

【解答】 (1) 解: 连接 DB, 如图,

$$\because \angle BCD + \angle DEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$\because BE$ 为直径,

$$\therefore \angle BDE = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, $DE = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$,

$$BD = \sqrt{3}DE = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3;$$

(2) 证明: 连接 EA , 如图,

$\because BE$ 为直径,

$$\therefore \angle BAE = 90^\circ,$$

$\because A$ 为 $\widehat{BE}$ 的中点,

$$\therefore \angle ABE = 45^\circ,$$

$$\because BA = AP,$$

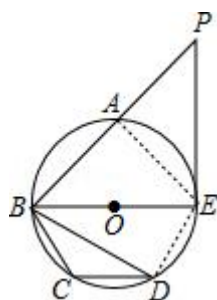
而 $EA \perp BA$,

$\therefore \triangle BEP$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle PEB = 90^\circ,$$

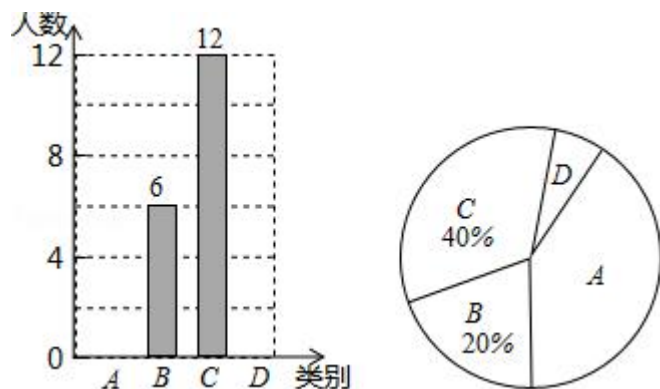
$$\therefore PE \perp BE,$$

$\therefore$ 直线 PE 是 $\odot O$ 的切线.



【点评】 本题考查了切线的性质: 圆的切线垂直于经过切点的半径. 若出现圆的切线, 必连过切点的半径, 构造定理图, 得出垂直关系. 也考查了圆周角定理.

22. (8 分) 随着社会的发展, 通过微信朋友圈发布自己每天行走的步数已经成为一种时尚. “健身达人”小陈为了了解他的好友的运动情况. 随机抽取了部分好友进行调查, 把他们 6 月 1 日那天行走的情况分为四个类别: A ($0 \sim 5000$ 步) (说明: “ $0 \sim 5000$ ”表示大于等于 0, 小于等于 5000, 下同), B ($5001 \sim 10000$ 步), C ($10001 \sim 15000$ 步), D (15000 步以上), 统计结果如图所示:



请依据统计结果回答下列问题:

(1) 本次调查中, 一共调查了 30 位好友.

(2) 已知 A 类好友人数是 D 类好友人数的 5 倍.

①请补全条形图;

②扇形图中, “A” 对应扇形的圆心角为 120 度.

③若小陈微信朋友圈共有好友 150 人, 请根据调查数据估计大约有多少位好友 6 月 1 日这天行走的步数超过 10000 步?

【分析】 (1) 由 B 类别人数及其所占百分比可得总人数;

(2) ①设 D 类人数为 a , 则 A 类人数为 $5a$, 根据总人数列方程求得 a 的值, 从而补全图形;

②用 360° 乘以 A 类别人数所占比例可得;

③总人数乘以样本中 C、D 类别人数和所占比例.

【解答】 解: (1) 本次调查的好友人数为 $6 \div 20\% = 30$ 人,

故答案为: 30;

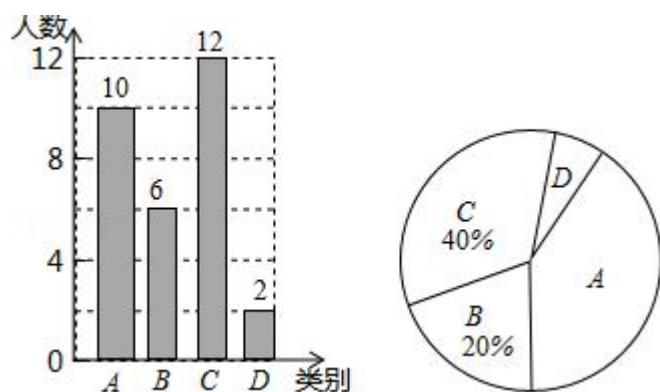
(2) ①设 D 类人数为 a , 则 A 类人数为 $5a$,

根据题意, 得: $a + 6 + 12 + 5a = 30$,

解得: $a = 2$,

即 A 类人数为 10、D 类人数为 2,

补全图形如下:



②扇形图中，“A”对应扇形的圆心角为 $360^\circ \times \frac{10}{30} = 120^\circ$ ，

故答案为：120；

③估计大约6月1日这天行走的步数超过10000步的好友人数为 $150 \times \frac{12+2}{30} = 70$ 人。

【点评】 此题主要考查了条形统计图、扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从统计图中得到必要的信息是解决问题的关键。条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据。

23. (8分) 某年5月，我国南方某省A、B两市遭受严重洪涝灾害，1.5万人被迫转移，邻近县市C、D获知A、B两市分别急需救灾物资200吨和300吨的消息后，决定调运物资支援灾区。已知C市有救灾物资240吨，D市有救灾物资260吨，现将这些救灾物资全部调往A、B两市。已知从C市运往A、B两市的费用分别为每吨20元和25元，从D市运往A、B两市的费用别为每吨15元和30元，设从D市运往B市的救灾物资为x吨。

(1) 请填写下表

	A (吨)	B (吨)	合计 (吨)
C	<u>$x - 60$</u>	<u>$300 - x$</u>	240
D	<u>$260 - x$</u>	x	260
总计 (吨)	200	300	500

(2) 设C、D两市的总运费为w元，求w与x之间的函数关系式，并写出自变量x的取值范围；

(3) 经过抢修，从D市到B市的路况得到了改善，缩短了运输时间，运费每吨减少m元 ($m > 0$)，其余路线运费不变。若C、D两市的总运费的最小值不小于10320元，求m的取值范围。

【分析】 (1) 根据题意可以将表格中的空缺数据补充完整；

(2) 根据题意可以求得 w 与 x 的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

(3) 根据题意, 利用分类讨论的数学思想可以解答本题.

【解答】 解: (1) $\because$ D 市运往 B 市 x 吨,

$\therefore$ D 市运往 A 市 $(260 - x)$ 吨, C 市运往 B 市 $(300 - x)$ 吨, C 市运往 A 市 $200 - (260 - x)$
 $= (x - 60)$ 吨,

故答案为: $x - 60$ 、 $300 - x$ 、 $260 - x$;

(2) 由题意可得,

$$w = 20(x - 60) + 25(300 - x) + 15(260 - x) + 30x = 10x + 10200,$$

$$\therefore w = 10x + 10200 \quad (60 \leq x \leq 260);$$

(3) 由题意可得,

$$w = 10x + 10200 - mx = (10 - m)x + 10200,$$

当 $0 < m < 10$ 时,

$$x = 60 \text{ 时, } w \text{ 取得最小值, 此时 } w = (10 - m) \times 60 + 10200 \geq 10320,$$

解得, $0 < m \leq 8$,

当 $m > 10$ 时,

$$x = 260 \text{ 时, } w \text{ 取得最小值, 此时, } w = (10 - m) \times 260 + 10200 \geq 10320,$$

$$\text{解得, } m \leq \frac{124}{13},$$

$$\therefore \frac{124}{13} < 10,$$

$\therefore m > 10$ 这种情况不符合题意,

由上可得, m 的取值范围是 $0 < m \leq 8$.

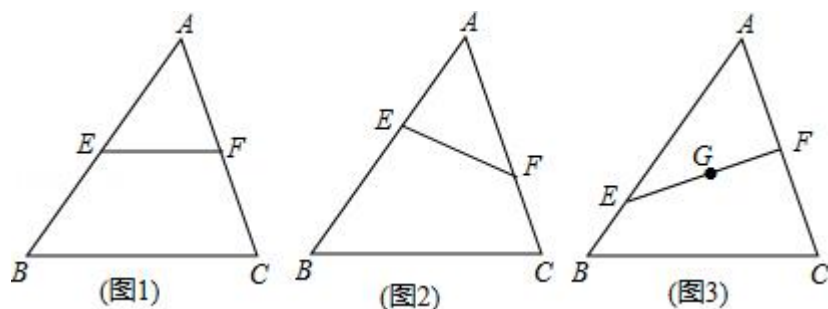
【点评】 本题考查一次函数的应用、一元一次不等式的应用, 解答本题的关键是明确题意, 利用函数和不等式的性质解答.

24. (9 分) 在 $\triangle ABC$ 中, E、F 分别为线段 AB、AC 上的点 (不与 A、B、C 重合).

(1) 如图 1, 若 $EF \parallel BC$, 求证: $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE \cdot AF}{AB \cdot AC}$

(2) 如图 2, 若 EF 不与 BC 平行, (1) 中的结论是否仍然成立? 请说明理由;

(3) 如图 3, 若 EF 上一点 G 恰为 $\triangle ABC$ 的重心, $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{4}$, 求 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值.



【分析】(1) 由 $EF \parallel BC$ 知 $\triangle AEF \sim \triangle ABC$, 据此得 $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$, 根据 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2$ 即可得

证;

(2) 分别过点 F 、 C 作 AB 的垂线, 垂足分别为 N 、 H , 据此知 $\triangle AFN \sim \triangle ACH$, 得 $\frac{FN}{CH} = \frac{AF}{AC}$,

根据 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AE \cdot FN}{\frac{1}{2}AB \cdot CH}$ 即可得证;

(3) 连接 AG 并延长交 BC 于点 M , 连接 BG 并延长交 AC 于点 N , 连接 MN , 由重心性质

知 $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM}$ 、 $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$, 设 $\frac{AF}{AC} = a$, 利用 (2) 中结论知 $\frac{S_{\triangle AEG}}{S_{\triangle ABM}} = \frac{AE \cdot AG}{AB \cdot AM} = \frac{1}{2}$ 、

$\frac{S_{\triangle AFG}}{S_{\triangle ACM}} = \frac{AG \cdot AF}{AM \cdot AC} = \frac{2}{3}a$, 从而得 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle AEG} + S_{\triangle AFG}}{2S_{\triangle ACM}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}a$, 结合 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE \cdot AF}{AB \cdot AC} = \frac{3}{4}a$

可关于 a 的方程, 解之求得 a 的值即可得出答案.

【解答】解: (1) $\because EF \parallel BC$,

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AF}{AC} = \frac{AE \cdot AF}{AB \cdot AC};$$

(2) 若 EF 不与 BC 平行, (1) 中的结论仍然成立,

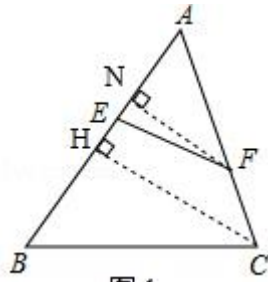


图 1

分别过点 F、C 作 AB 的垂线，垂足分别为 N、H，

$\therefore FN \perp AB$ 、 $CH \perp AB$,

$\therefore FN \parallel CH$,

$\therefore \triangle AFN \sim \triangle ACH$,

$$\therefore \frac{FN}{CH} = \frac{AF}{AC},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AE \cdot FN}{\frac{1}{2}AB \cdot CH} = \frac{AE \cdot AF}{AB \cdot AC};$$

(3) 连接 AG 并延长交 BC 于点 M，连接 BG 并延长交 AC 于点 N，连接 MN，

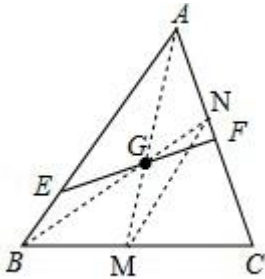


图 2

则 MN 分别是 BC、AC 的中点，

$\therefore MN \parallel AB$ ，且 $MN = \frac{1}{2}AB$,

$\therefore \frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{2}$ ，且 $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM}$,

$\therefore \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$,

设 $\frac{AF}{AC} = a$,

由 (2) 知: $\frac{S_{\triangle AEG}}{S_{\triangle ABM}} = \frac{AE \cdot AG}{AB \cdot AM} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, $\frac{S_{\triangle AFG}}{S_{\triangle ACM}} = \frac{AG \cdot AF}{AM \cdot AC} = \frac{2}{3}a$.

$$\text{则} \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle AEG} + S_{\triangle AFG}}{2S_{\triangle ACM}} = \frac{S_{\triangle AEG}}{2S_{\triangle ABM}} + \frac{S_{\triangle AFG}}{2S_{\triangle ACM}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}a,$$

$$\text{而} \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE \cdot AF}{AB \cdot AC} = \frac{3}{4}a,$$

$$\therefore \frac{1}{4} + \frac{1}{3}a = \frac{3}{4}a,$$

$$\text{解得: } a = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{20}.$$

【点评】本题主要考查相似形的综合问题，解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定与性质和三角形重心的定义及其性质等知识点.

25. (10分) 已知抛物线 $y = a(x-1)^2$ 过点 $(3, 1)$ ，D 为抛物线的顶点.

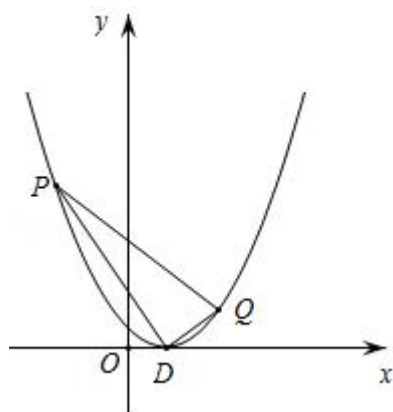
(1) 求抛物线的解析式;

(2) 若点 B、C 均在抛物线上，其中点 B $(0, \frac{1}{4})$ ，且 $\angle BDC = 90^\circ$ ，求点 C 的坐标;

(3) 如图，直线 $y = kx + 4 - k$ 与抛物线交于 P、Q 两点.

①求证: $\angle PDQ = 90^\circ$;

②求 $\triangle PDQ$ 面积的最小值.



【分析】(1) 将点 $(3, 1)$ 代入解析式求得 a 的值即可;

(2) 设点 C 的坐标为 (x_0, y_0) ，其中 $y_0 = \frac{1}{4}(x_0 - 1)^2$ ，作 $CF \perp x$ 轴，证 $\triangle BDO \sim \triangle DCF$ 得

$$\frac{BO}{DO} = \frac{DF}{CF}, \text{ 即 } \frac{1}{4} = \frac{|x_0 - 1|}{|y_0|} = \frac{1}{\frac{1}{4}(x_0 - 1)} \text{ 据此求得 } x_0 \text{ 的值即可得;}$$

(3) ①设点 P 的坐标为 (x_1, y_1) ，点 Q 为 (x_2, y_2) ，联立直线和抛物线解析式，化为关于

x 的方程可得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4k + 2 \\ x_1 x_2 = 4k - 15 \end{cases}$, 据此知 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = -16$, 由 $PM = y_1 = \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2$,

$QN = y_2 = \frac{1}{4}(x_2 - 1)^2$, $DM = |x_1 - 1| = 1 - x_1$, $DN = |x_2 - 1| = x_2 - 1$ 知 $PM \cdot QN = DM \cdot DN = 16$, 即 $\frac{PM}{DN} = \frac{DN}{QN}$,

从而得 $\triangle PMD \sim \triangle DNQ$, 据此进一步求解可得;

②过点 D 作 x 轴的垂线交直线 PQ 于点 G, 则 $DG = 4$, 根据 $S_{\triangle PDQ} = \frac{1}{2}DG \cdot MN$ 列出关于 k 的等式求解可得.

【解答】解: (1) 将点 (3, 1) 代入解析式, 得: $4a = 1$,

解得: $a = \frac{1}{4}$,

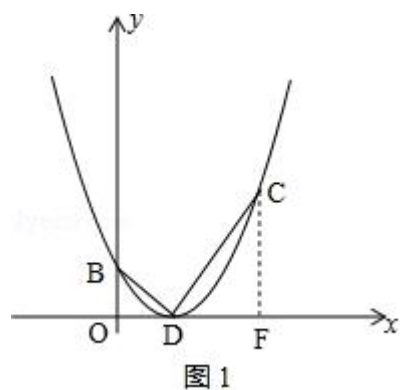
所以抛物线解析式为 $y = \frac{1}{4}(x - 1)^2$;

(2) 由 (1) 知点 D 坐标为 (1, 0),

设点 C 的坐标为 (x_0, y_0) , $(x_0 > 1, y_0 > 0)$,

则 $y_0 = \frac{1}{4}(x_0 - 1)^2$,

如图 1, 过点 C 作 $CF \perp x$ 轴,



$\therefore \angle BOD = \angle DFC = 90^\circ$, $\angle DCF + \angle CDF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BDC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BDO + \angle CDF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BDO = \angle DCF$,

$\therefore \triangle BDO \sim \triangle DCF$,

$\therefore \frac{BO}{DO} = \frac{DF}{CF}$,

$$\therefore \frac{1}{4} \frac{|x_0 - 1|}{|y_0|} = \frac{1}{\frac{1}{4}(x_0 - 1)},$$

解得: $x_0=17$, 此时 $y_0=64$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(17, 64)$.

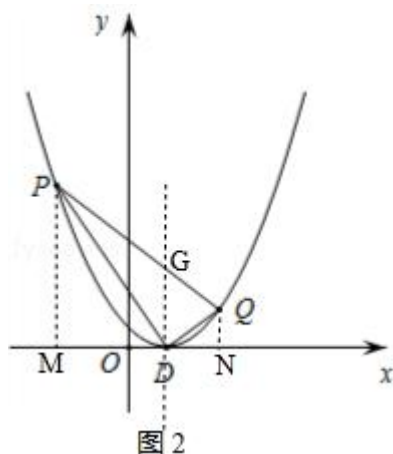
(3) ①证明: 设点 P 的坐标为 (x_1, y_1) , 点 Q 为 (x_2, y_2) , (其中 $x_1 < 1 < x_2$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$),

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{1}{4}(x-1)^2 \\ y = kx + 4 - k \end{cases}, \text{得: } x^2 - (4k+2)x + 4k - 15 = 0,$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = 4k + 2 \\ x_1 x_2 = 4k - 15 \end{cases},$$

$$\therefore (x_1 - 1)(x_2 - 1) = -16,$$

如图 2, 分别过点 P、Q 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 M、N,



$$\text{则 } PM = y_1 = \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2, \quad QN = y_2 = \frac{1}{4}(x_2 - 1)^2,$$

$$DM = |x_1 - 1| = 1 - x_1, \quad DN = |x_2 - 1| = x_2 - 1,$$

$$\therefore PM \cdot QN = DM \cdot DN = 16,$$

$$\therefore \frac{PM}{DN} = \frac{DN}{QN},$$

$$\text{又 } \angle PMD = \angle DNQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PMD \sim \triangle DNQ,$$

$$\therefore \angle MPD = \angle NDQ,$$

$$\text{而 } \angle MPD + \angle MDP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MDP + \angle NDQ = 90^\circ, \text{ 即 } \angle PDQ = 90^\circ;$$

②过点 D 作 x 轴的垂线交直线 PQ 于点 G, 则点 G 的坐标为 $(1, 4)$,

所以 $DG=4$,

$$\therefore S_{\triangle PDQ} = \frac{1}{2} DG \cdot MN = \frac{1}{2} \times 4 \times |x_1 - x_2| = 2\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 8\sqrt{k^2 + 4},$$

$\therefore$ 当 $k=0$ 时, $S_{\triangle PDQ}$ 取得最小值 16.

【点评】 本题主要考查二次函数的综合问题, 解题的关键是熟练掌握待定系数法求函数解析式、相似三角形的判定与性质及一元二次方程根与系数的关系等知识点.