

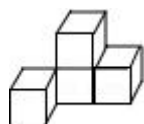
湖北省随州市 2018 年中考数学真题试题

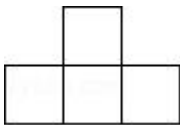
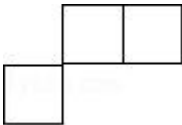
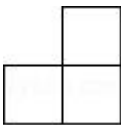
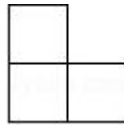
一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 每小题给出的四个选项中, 只有一个正确的)

1. (3 分) $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 ()

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

2. (3 分) 如图是一个由 4 个相同正方体组成的立体图形, 它的左视图是 ()



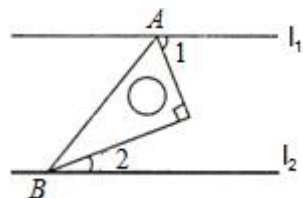
A.  B.  C.  D. 

3. (3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $a^3 \div a^{-3} = 1$

C. $(a-b)^2 = a^2 - ab + b^2$ D. $(-a^2)^3 = -a^6$

4. (3 分) 如图, 在平行线 l_1 、 l_2 之间放置一块直角三角板, 三角板的锐角顶点 A, B 分别在直线 l_1 、 l_2 上, 若 $\angle 1 = 65^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是 ()

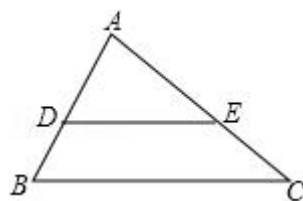


A. 25° B. 35° C. 45° D. 65°

5. (3 分) 某同学连续 6 次考试的数学成绩分别是 85, 97, 93, 79, 85, 95, 则这组数据的众数和中位数分别为 ()

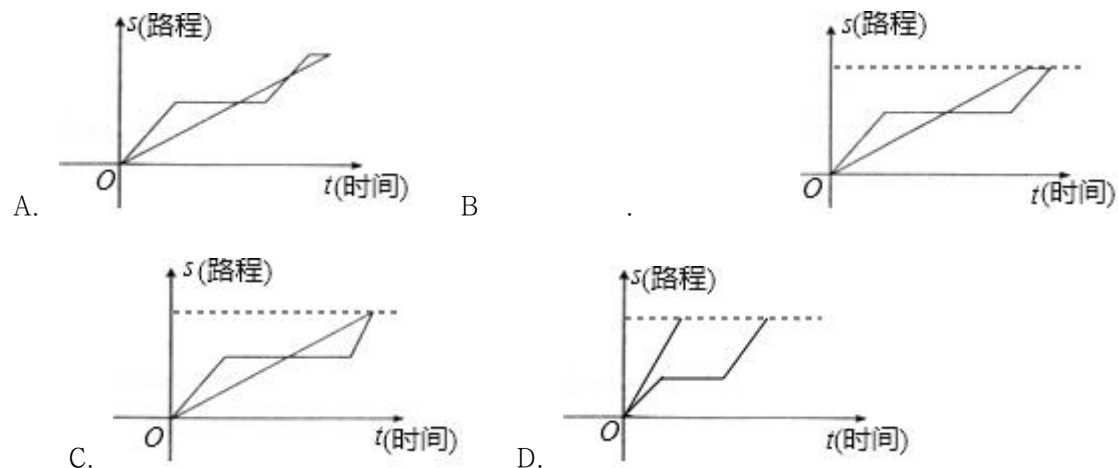
A. 85 和 89 B. 85 和 86 C. 89 和 85 D. 89 和 86

6. (3 分) 如图, 平行于 BC 的直线 DE 把 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分, 则 $\frac{BD}{AD}$ 的值为 ()

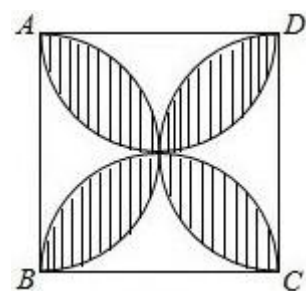


- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $\sqrt{2}+1$

7. (3分) “龟兔赛跑”这则寓言故事讲述的是比赛中兔子开始领先，但它因为骄傲在途中睡觉，而乌龟一直坚持爬行最终赢得比赛，下列函数图象可以体现这一故事过程的是 ()

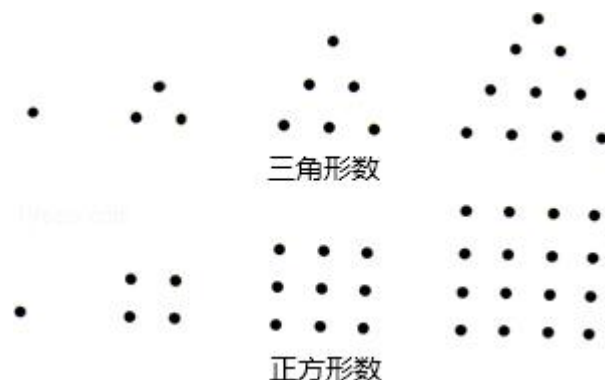


8. (3分) 正方形 ABCD 的边长为 2，以各边为直径在正方形内画半圆，得到如图所示阴影部分，若随机向正方形 ABCD 内投一粒米，则米粒落在阴影部分的概率为 ()



- A. $\frac{\pi-2}{2}$ B. $\frac{\pi-2}{4}$ C. $\frac{\pi-2}{8}$ D. $\frac{\pi-2}{16}$

9. (3分) 我们将如图所示的两种排列形式的点的个数分别称作“三角形数” (如 1, 3, 6, 10...) 和“正方形数” (如 1, 4, 9, 16...), 在小于 200 的数中, 设最大的“三角形数”为 m, 最大的“正方形数”为 n, 则 m+n 的值为 ()

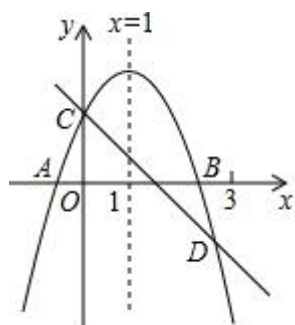


- A. 33 B. 301 C. 386 D. 571

10. (3分) 如图所示, 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于点 C 对称轴为直线 $x=1$. 直线 $y=-x+c$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交于 C 、 D 两点, D 点在 x 轴下方且横坐标小于 3, 则下列结论:

- ① $2a+b+c > 0$;
- ② $a-b+c < 0$;
- ③ $x(ax+b) \leq a+b$;
- ④ $a < -1$.

其中正确的有 ()

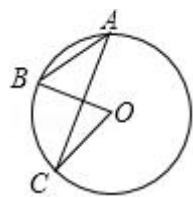


A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

二.填空题 (本大题共 6 小题、每小题 3 分, 共 18 分, 只需要将结果直接填在答题卡对应题号处的横线上)

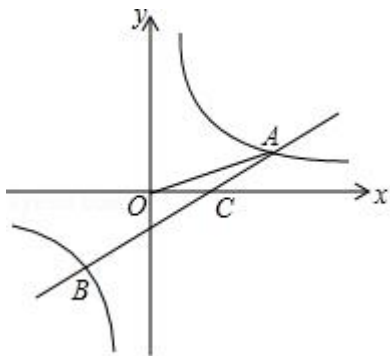
11. (3分) 计算: $\sqrt{8} - |2 - 2\sqrt{2}| + 2\tan 45^\circ =$ _____.

12. (3分) 如图, 点 A , B , C 在 $\odot O$ 上, $\angle A=40$ 度, $\angle C=20$ 度, 则 $\angle B=$ _____度.

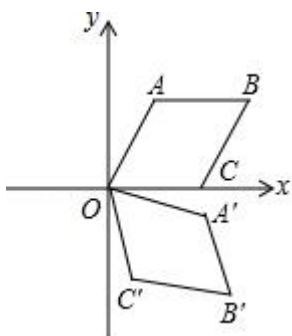


13. (3分) 已知 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 是关于 x , y 的二元一次方程组 $\begin{cases} ax+by=7 \\ ax-by=1 \end{cases}$ 的一组解, 则 $a+b=$ _____.

14. (3分) 如图, 一次函数 $y=x-2$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 的图象相交于 A 、 B 两点, 与 x 轴交与点 C , 若 $\tan \angle AOC = \frac{1}{3}$, 则 k 的值为_____.



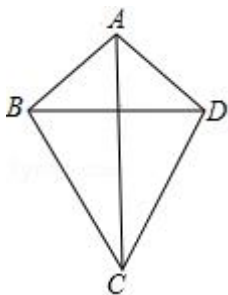
15. (3分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 菱形 $OABC$ 的边长为 2, 点 A 在第一象限, 点 C 在 x 轴正半轴上, $\angle AOC = 60^\circ$, 若将菱形 $OABC$ 绕点 O 顺时针旋转 75° , 得到四边形 $OA'B'C'$, 则点 B 的对应点 B' 的坐标为_____.



16. (3分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD=5$, $BC=CD$ 且 $BC > AB$, $BD=8$. 给出以下判断:

- ① AC 垂直平分 BD ;
- ② 四边形 $ABCD$ 的面积 $S=AC \cdot BD$;
- ③ 顺次连接四边形 $ABCD$ 的四边中点得到的四边形可能是正方形;
- ④ 当 A, B, C, D 四点在同一个圆上时, 该圆的半径为 $\frac{25}{6}$;
- ⑤ 将 $\triangle ABD$ 沿直线 BD 对折, 点 A 落在点 E 处, 连接 BE 并延长交 CD 于点 F , 当 $BF \perp CD$ 时, 点 F 到直线 AB 的距离为 $\frac{678}{125}$.

其中正确的是_____. (写出所有正确判断的序号)



三、解答题（本人题共 8 小题，共 72 分，解答应写出必要的演算步骤、文字说明或证明过程）

17. (6 分) 先化简，再求值： $\frac{x^2}{x^2-1} \div (\frac{1}{x-1}+1)$ ，其中 x 为整数且满足不等式组 $\begin{cases} x-1 > 1 \\ 8-2x \geq 2 \end{cases}$.

18. (7 分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k+3)x + k^2 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 若 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$ ，求 k 的值.

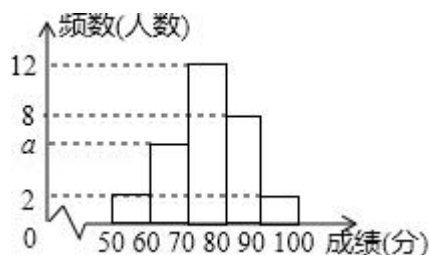
19. (9 分) 为了解某次“小学生书法比赛”的成绩情况，随机抽取了 30 名学生的成绩进行统计，并将统计情况绘成如图所示的频数分布直方图，已知成绩 x （单位：分）均满足“ $50 \leq x < 100$ ”. 根据图中信息回答下列问题：

(1) 图中 a 的值为_____；

(2) 若要绘制该样本的扇形统计图，则成绩 x 在“ $70 \leq x < 80$ ”所对应扇形的圆心角度数为度；

(3) 此次比赛共有 300 名学生参加，若将“ $x \geq 80$ ”的成绩记为“优秀”，则获得“优秀”的学生大约有_____人；

(4) 在这些抽查的样本中，小明的成绩为 92 分，若从成绩在“ $50 \leq x < 60$ ”和“ $90 \leq x < 100$ ”的学生中任选 2 人，请用列表或画树状图的方法，求小明被选中的概率.



20. (8 分) 随州市新溉水一桥（如图 1）设计灵感来源于市花——兰花，采用蝴蝶兰斜拉桥方案，设计长度为 258 米，宽 32 米，为双向六车道，2018 年 4 月 3 日通车. 斜拉桥又称斜张桥，主要由索塔、主梁、斜拉索组成. 某座斜拉桥的部分截面图如图 2 所示，索塔 AB 和斜拉索（图中只画出最短的斜拉索 DE 和最长的斜拉索 AC ）均在同一水平面内， BC 在水平桥面上. 已知 $\angle ABC = \angle DEB = 45^\circ$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ， $BE = 6$ 米， $AB = 5BD$.

(1) 求最短的斜拉索 DE 的长；

(2) 求最长的斜拉索 AC 的长.



图1

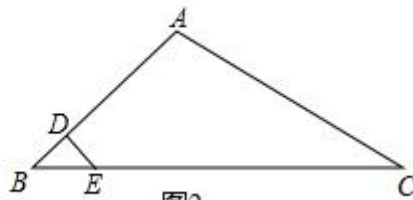
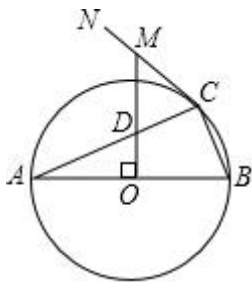


图2

21. (8分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 为 $\odot O$ 上一点, CN 为 $\odot O$ 的切线, OM $\perp$ AB 于点 O, 分别交 AC、CN 于 D、M 两点.

(1) 求证: MD=MC;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 5, $AC=4\sqrt{5}$, 求 MC 的长.



22. (11分) 为迎接“世界华人炎帝故里寻根节”, 某工厂接到一批纪念品生产订单, 按要求在 15 天内完成, 约定这批纪念品的出厂价为每件 20 元, 设第 x 天 ($1 \leq x \leq 15$, 且 x 为整数) 每件产品的成本是 p 元, p 与 x 之间符合一次函数关系, 部分数据如表:

天数 (x)	1	3	6	10
每件成本 p (元)	7.5	8.5	10	12

任务完成后, 统计发现工人李师傅第 x 天生产的产品件数 y (件) 与 x (天) 满足如下关系:

$$y = \begin{cases} 2x+20 & (1 \leq x < 10, \text{ 且 } x \text{ 为整数}) \\ 40 & (10 \leq x \leq 15, \text{ 且 } x \text{ 为整数}) \end{cases}$$

设李师傅第 x 天创造的产品利润为 W 元.

(1) 直接写出 p 与 x , W 与 x 之间的函数关系式, 并注明自变量 x 的取值范围:

(2) 求李师傅第几天创造的利润最大? 最大利润是多少元?

(3) 任务完成后, 统计发现平均每个工人每天创造的利润为 299 元. 工厂制定如下奖励制度: 如果一个工人某天创造的利润超过该平均值, 则该工人当天可获得 20 元奖金. 请计算李师傅共可获得多少元奖金?

23. (11分) 我们知道, 有理数包括整数、有限小数和无限循环小数, 事实上, 所有的有理数都可以化为分数形式 (整数可看作分母为 1 的分数), 那么无限循环小数如何表示为分数

形式呢？请看以下示例：

例：将 $0.\dot{7}$ 化为分数形式

由于 $0.\dot{7}=0.777\cdots$ ，设 $x=0.777\cdots$ ①

则 $10x=7.777\cdots$ ②

② - ①得 $9x=7$ ，解得 $x=\frac{7}{9}$ ，于是得 $0.\dot{7}=\frac{7}{9}$ 。

同理可得 $0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ ， $1.\dot{4}=1+0.\dot{4}=1+\frac{4}{9}=\frac{13}{9}$

根据以上阅读，回答下列问题：（以下计算结果均用最简分数表示）

【基础训练】

(1) $0.\dot{5}$ = _____， $5.\dot{8}$ = _____；

(2) 将 $0.\dot{2}\dot{3}$ 化为分数形式，写出推导过程；

【能力提升】

(3) $0.\dot{3}\dot{1}\dot{5}$ = _____， $2.0\dot{1}\dot{8}$ = _____；

(注： $0.\dot{3}\dot{1}\dot{5}=0.315315\cdots$ ， $2.0\dot{1}\dot{8}=2.01818\cdots$)

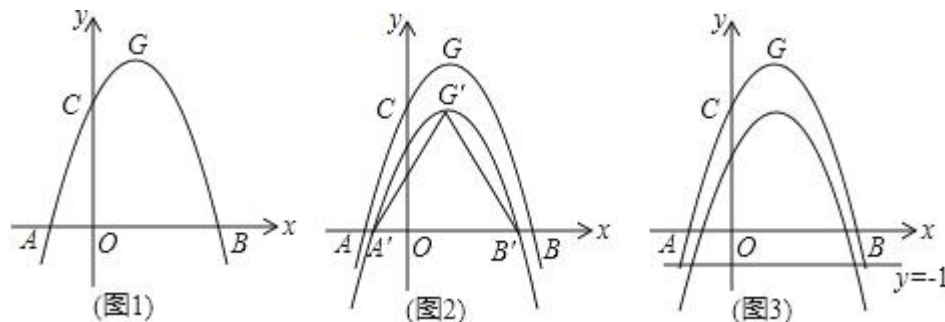
【探索发现】

(4) ①试比较 $0.\dot{9}$ 与 1 的大小： $0.\dot{9}$ _____ 1（填“>”、“<”或“=”）

②若已知 $0.\dot{2}8571\dot{4}=\frac{2}{7}$ ，则 $3.\dot{7}1428\dot{5}$ = _____。

(注： $0.\dot{2}8571\dot{4}=0.285714285714\cdots$)

24. (12分) 如图1，抛物线 $C_1: y=ax^2-2ax+c$ ($a<0$) 与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C。已知点 A 的坐标为 $(-1, 0)$ ，点 O 为坐标原点， $OC=3OA$ ，抛物线 C_1 的顶点为 G。



(1) 求出抛物线 C_1 的解析式，并写出点 G 的坐标；

(2) 如图2，将抛物线 C_1 向下平移 k ($k>0$) 个单位，得到抛物线 C_2 ，设 C_2 与 x 轴的交点

为 A' 、 B' ，顶点为 G' ，当 $\triangle A'B'G'$ 是等边三角形时，求 k 的值：

(3) 在 (2) 的条件下，如图 3，设点 M 为 x 轴正半轴上一动点，过点 M 作 x 轴的垂线分别交抛物线 C_1 、 C_2 于 P 、 Q 两点，试探究在直线 $y = -1$ 上是否存在点 N ，使得以 P 、 Q 、 N 为顶点的三角形与 $\triangle AOQ$ 全等，若存在，直接写出点 M 、 N 的坐标；若不存在，请说明理由。

参考答案与试题解析

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 每小题给出的四个选项中, 只有一个正确的)

1. (3 分) $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 ()

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

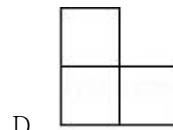
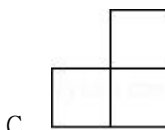
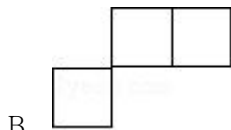
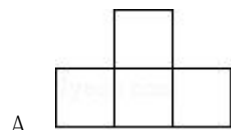
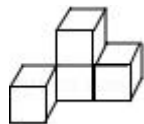
【分析】根据只有符号不同的两个数互为相反数, 可得答案.

【解答】解: $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 $\frac{1}{2}$,

故选: B.

【点评】本题考查了相反数, 在一个数的前面加上负号就是这个数的相反数.

2. (3 分) 如图是一个由 4 个相同正方体组成的立体图形, 它的左视图是 ()



【分析】根据从左边看得到的图形是左视图, 可得答案.

【解答】解: 从左边看第一层是两个小正方形, 第二层左边一个小正方形,

故选: D.

【点评】本题考查了简单组合体的三视图, 从左边看得到的图形是左视图.

3. (3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $a^3 \div a^{-3} = 1$

C. $(a-b)^2 = a^2 - ab + b^2$ D. $(-a^2)^3 = -a^6$

【分析】根据同底数幂的乘法、完全平方公式及同底数幂的除法、幂的乘方逐一计算可得.

【解答】解: A、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 此选项错误;

B、 $a^3 \div a^{-3} = a^6$, 此选项错误;

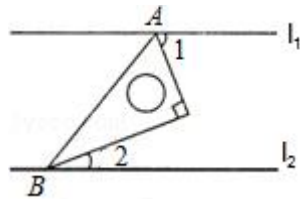
C、 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 此选项错误;

D、 $(-a^2)^3 = -a^6$, 此选项正确;

故选：D.

【点评】 本题主要考查幂的运算，解题的关键是掌握同底数幂的乘法、完全平方公式及同底数幂的除法、幂的乘方的运算法则.

4. (3分) 如图，在平行线 l_1 、 l_2 之间放置一块直角三角板，三角板的锐角顶点 A，B 分别在直线 l_1 、 l_2 上，若 $\angle 1 = 65^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是 ()



A. 25° B. 35° C. 45° D. 65°

【分析】 过点 C 作 $CD \parallel a$ ，再由平行线的性质即可得出结论.

【解答】 解：如图，过点 C 作 $CD \parallel a$ ，则 $\angle 1 = \angle ACD$.

$$\because a \parallel b,$$

$$\therefore CD \parallel b,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle DCB.$$

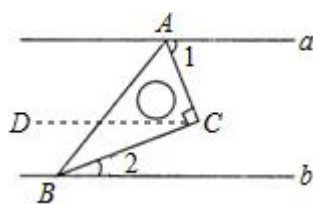
$$\because \angle ACD + \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle 1 = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 25^\circ.$$

故选：A.



【点评】 本题考查的是平行线的性质，根据题意作出辅助线，构造出平行线是解答此题的关键.

5. (3分) 某同学连续 6 次考试的数学成绩分别是 85，97，93，79，85，95，则这组数据的众数和中位数分别为 ()

A. 85 和 89 B. 85 和 86 C. 89 和 85 D. 89 和 86

【分析】根据众数、中位数的定义即可判断；

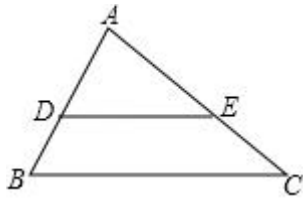
【解答】解：将数据重新排列为 79、85、85、93、95、97，

则这组数据的中位数为 $\frac{85+93}{2}=89$ ，众数为 85

故选：A.

【点评】本题考查了确定一组数据的中位数的能力. 中位数是将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后，最中间的那个数 (最中间两个数的平均数)，叫做这组数据的中位数. 众数是次数出现最多的数；

6. (3 分) 如图, 平行于 BC 的直线 DE 把 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分, 则 $\frac{BD}{AD}$ 的值为 ()



- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $\sqrt{2}+1$

【分析】由 $DE \parallel BC$ 可得出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，利用相似三角形的性质结合 $S_{\triangle ADE} = S_{\text{四边形 } BCED}$ ，可得出 $\frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，结合 $BD = AB - AD$ 即可求出 $\frac{BD}{AD}$ 的值，此题得解.

【解答】解： $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \angle ADE = \angle B, \quad \angle AED = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}.$$

$$\because S_{\triangle ADE} = S_{\text{四边形 } BCED},$$

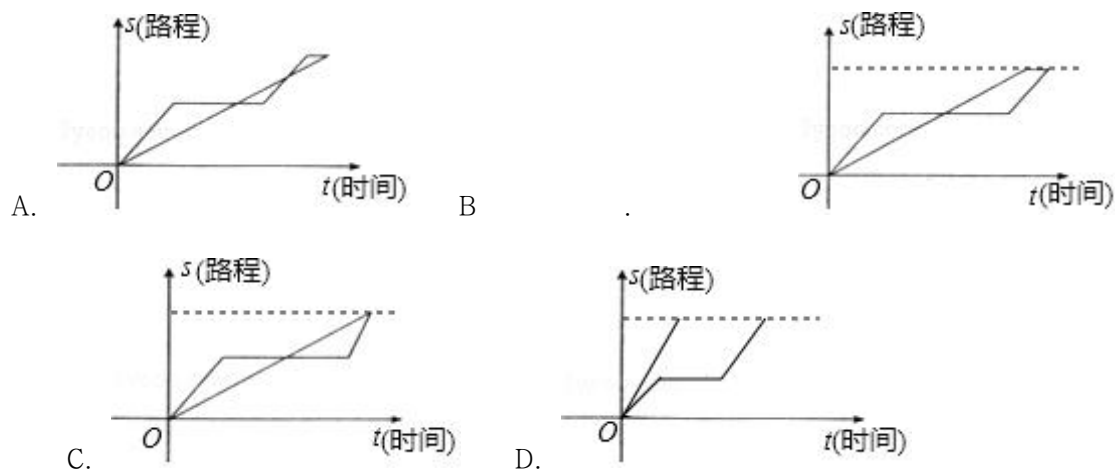
$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{AB - AD}{AD} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

故选：C.

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，牢记相似三角形的面积比等于相似比的平方是解题的关键.

7. (3分) “龟兔赛跑”这则寓言故事讲述的是比赛中兔子开始领先，但它因为骄傲在途中睡觉，而乌龟一直坚持爬行最终赢得比赛，下列函数图象可以体现这一故事过程的是 ()



【分析】根据兔子的路程在一段时间内保持不变、乌龟比兔子所用时间少逐一判断即可得.

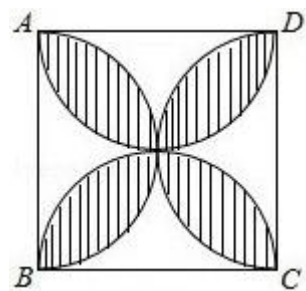
【解答】解：由于兔子在图中睡觉，所以兔子的路程在一段时间内保持不变，所以 D 选项错误；

因为乌龟最终赢得比赛，即乌龟比兔子所用时间少，所以 A、C 均错误；

故选：B.

【点评】本题主要考查函数图象，解题的关键是弄清函数图象中横、纵轴所表示的意义及实际问题中自变量与因变量之间的关系.

8. (3分) 正方形 ABCD 的边长为 2，以各边为直径在正方形内画半圆，得到如图所示阴影部分，若随机向正方形 ABCD 内投一粒米，则米粒落在阴影部分的概率为 ()



- A. $\frac{\pi-2}{2}$ B. $\frac{\pi-2}{4}$ C. $\frac{\pi-2}{8}$ D. $\frac{\pi-2}{16}$

【分析】求得阴影部分的面积后除以正方形的面积即可求得概率.

【解答】解：如图，连接 PA、PB、OP；

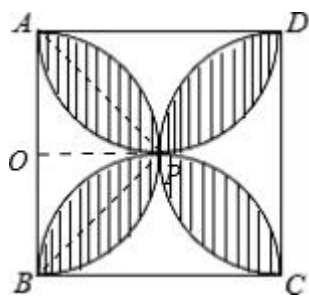
$$\text{则 } S_{\text{半圆O}} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}, S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1,$$

由题意得：图中阴影部分的面积=4 (S_{半圆O} - S_{△ABP})

$$=4 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 2\pi - 4,$$

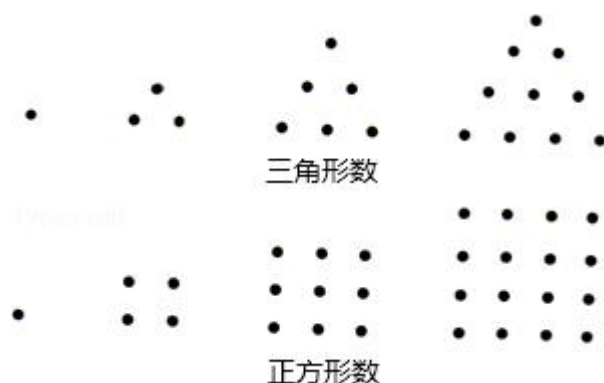
$$\therefore \text{米粒落在阴影部分的概率为 } \frac{2\pi - 4}{4} = \frac{\pi - 2}{2},$$

故选：A.



【点评】 本题考查了几何概率的知识，解题的关键是求得阴影部分的面积，难度不大.

9. (3分) 我们将如图所示的两种排列形式的点的个数分别称作“三角形数” (如 1, 3, 6, 10…) 和“正方形数” (如 1, 4, 9, 16…), 在小于 200 的数中，设最大的“三角形数”为 m，最大的“正方形数”为 n，则 m+n 的值为 ()



A. 33 B. 301 C. 386 D. 571

【分析】 由图形知第 n 个三角形数为 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ，第 n 个正方形数为 n^2 ，据此得出最大的三角形数和正方形数即可得.

【解答】 解：由图形知第 n 个三角形数为 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ，第 n 个正方形数为 n^2 ，
当 n=19 时， $\frac{n(n+1)}{2}=190 < 200$ ，当 n=20 时， $\frac{n(n+1)}{2}=210 > 200$ ，

所以最大的三角形数 m=190；

当 n=14 时， $n^2=196 < 200$ ，当 n=15 时， $n^2=225 > 200$ ，

所以最大的正方形数 n=196，

则 $m+n=386$,

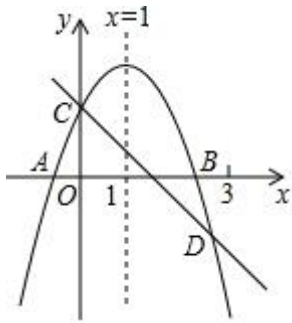
故选: C.

【点评】 本题主要考查数字的变化规律, 解题的关键是由图形得出第 n 个三角形数为 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, 第 n 个正方形数为 n^2 .

10. (3分) 如图所示, 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点, 与 y 轴交于点 C 对称轴为直线 $x=1$. 直线 $y=-x+c$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交于 C、D 两点, D 点在 x 轴下方且横坐标小于 3, 则下列结论:

- ① $2a+b+c > 0$;
- ② $a-b+c < 0$;
- ③ $x(ax+b) \leq a+b$;
- ④ $a < -1$.

其中正确的有 ()



A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

【分析】 利用抛物线与 y 轴的交点位置得到 $c > 0$, 利用对称轴方程得到 $b = -2a$, 则 $2a+b+c=c > 0$, 于是可对①进行判断; 利用抛物线的对称性得到抛物线与 x 轴的另一个交点在点 $(-1, 0)$ 右侧, 则当 $x = -1$ 时, $y < 0$, 于是可对②进行判断; 根据二次函数的性质得到 $x=1$ 时, 二次函数有最大值, 则 $ax^2+bx+c \leq a+b+c$, 于是可对③进行判断; 由于直线 $y = -x+c$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交于 C、D 两点, D 点在 x 轴下方且横坐标小于 3, 利用函数图象得 $x=3$ 时, 一次函数值比二次函数值大, 即 $9a+3b+c < -3+c$, 然后把 $b = -2a$ 代入解 a 的不等式, 则可对④进行判断.

【解答】 解: $\because$ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方,
 $\therefore c > 0$,

∵ 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$,

∴ $b = -2a$,

∴ $2a + b + c = 2a - 2a + c = c > 0$, 所以①正确;

∵ 抛物线与 x 轴的一个交点在点 $(3, 0)$ 左侧,

而抛物线的对称轴为直线 $x = 1$,

∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点在点 $(-1, 0)$ 右侧,

∴ 当 $x = -1$ 时, $y < 0$,

∴ $a - b + c < 0$, 所以②正确;

∵ $x = 1$ 时, 二次函数有最大值,

∴ $ax^2 + bx + c \leq a + b + c$,

∴ $ax^2 + bx \leq a + b$, 所以③正确;

∵ 直线 $y = -x + c$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交于 C 、 D 两点, D 点在 x 轴下方且横坐标小于 3,

∴ $x = 3$ 时, 一次函数值比二次函数值大,

即 $9a + 3b + c < -3 + c$,

而 $b = -2a$,

∴ $9a - 6a < -3$, 解得 $a < -1$, 所以④正确.

故选: A.

【点评】 本题考查了二次函数与不等式 (组): 利用两个函数图象在直角坐标系中的上下位置关系求自变量的取值范围, 可作图利用交点直观求解. 也考查了二次函数图象与系数的关系.

二. 填空题 (本大题共 6 小题、每小题 3 分, 共 18 分, 只需要将结果直接填在答题卡对应题号处的横线上)

11. (3 分) 计算: $\sqrt{8} - |2 - 2\sqrt{2}| + 2\tan 45^\circ = \underline{4}$.

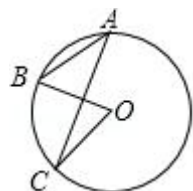
【分析】 直接利用二次根式的性质结合绝对值的性质以及特殊角的三角函数值分别化简得出答案.

【解答】 解: 原式 $= 2\sqrt{2} - (2\sqrt{2} - 2) + 2 \times 1$
 $= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2 + 2$
 $= 4$.

故答案为：4.

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

12. (3分) 如图，点 A, B, C 在 $\odot O$ 上， $\angle A=40^\circ$ ， $\angle C=20^\circ$ ，则 $\angle B=$ 60 度.



【分析】连接 OA，根据等腰三角形的性质得到 $\angle OAC=\angle C=20^\circ$ ，根据等腰三角形的性质解答即可.

【解答】解：如图，连接 OA，

$$\because OA=OC,$$

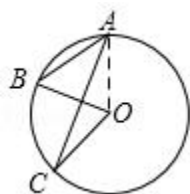
$$\therefore \angle OAC=\angle C=20^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB=60^\circ,$$

$$\because OA=OB,$$

$$\therefore \angle B=\angle OAB=60^\circ,$$

故答案为：60.



【点评】本题考查的是圆周角定理的运用，掌握圆的半径相等、等腰三角形的性质是解题的关键.

13. (3分) 已知 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 是关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} ax+by=7 \\ ax-by=1 \end{cases}$ 的一组解，则 $a+b=$ 5.

【分析】根据方程组解的定义，把问题转化为关于 a、b 的方程组，求出 a、b 即可解决问题；

【解答】解： $\because \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 是关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} ax+by=7 \\ ax-by=1 \end{cases}$ 的一组解，

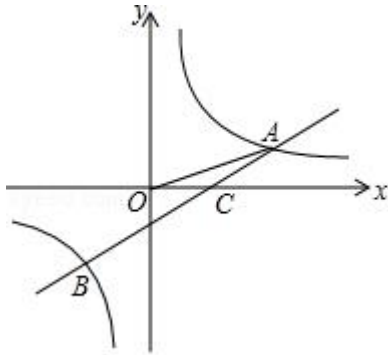
$$\therefore \begin{cases} 2a+b=7 \\ 2a-b=1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases},$$

$$\therefore a+b=5,$$

故答案为 5.

【点评】 本题考查二元方程组，解题的关键是理解题意，学会用转化的思想思考问题，所以中考常考题型.

14. (3 分) 如图，一次函数 $y=x-2$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 的图象相交于 A、B 两点，与 x 轴交与点 C，若 $\tan \angle AOC=\frac{1}{3}$ ，则 k 的值为 3.



【分析】 根据题意设出点 A 的坐标，然后根据一次函数 $y=x-2$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 的图象相交于 A、B 两点，可以求得 a 的值，进而求得 k 的值，本题得以解决.

【解答】 解：设点 A 的坐标为 $(3a, a)$,

$\because$ 一次函数 $y=x-2$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 的图象相交于 A、B 两点，

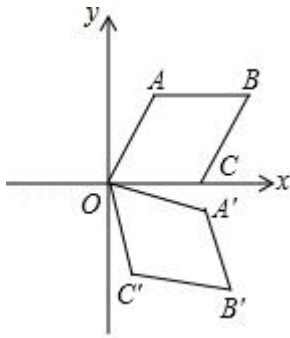
$\therefore a=3a-2$ ，得 $a=1$ ，

$\therefore 1=\frac{k}{3}$ ，得 $k=3$ ，

故答案为：3.

【点评】 本题考查反比例函数与一次函数的交点问题，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用数形结合的思想解答.

15. (3 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，菱形 OABC 的边长为 2，点 A 在第一象限，点 C 在 x 轴正半轴上， $\angle AOC=60^\circ$ ，若将菱形 OABC 绕点 O 顺时针旋转 75° ，得到四边形 $OA'B'C'$ ，则点 B 的对应点 B' 的坐标为 $(\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.



【分析】作 $B'H \perp x$ 轴于 H 点，连结 OB , OB' ，根据菱形的性质得到 $\angle AOB = 30^\circ$ ，再根据旋转的性质得 $\angle BOB' = 75^\circ$ ， $OB' = OB = 2\sqrt{3}$ ，则 $\angle AOB' = \angle BOB' - \angle AOB = 45^\circ$ ，所以 $\triangle OBH$ 为等腰直角三角形，根据等腰直角三角形性质可计算得 $OH = B'H = \sqrt{6}$ ，然后根据第四象限内点的坐标特征写出 B' 点的坐标.

【解答】解：作 $B'H \perp x$ 轴于 H 点，连结 OB , OB' ，如图，

$\because$ 四边形 $OABC$ 为菱形，

$\therefore \angle AOC = 180^\circ - \angle C = 60^\circ$ ， OB 平分 $\angle AOC$ ，

$\therefore \angle AOB = 30^\circ$ ，

$\because$ 菱形 $OABC$ 绕原点 O 顺时针旋转 75° 至第四象限 $OA'B'C'$ 的位置，

$\therefore \angle BOB' = 75^\circ$ ， $OB' = OB = 2\sqrt{3}$ ，

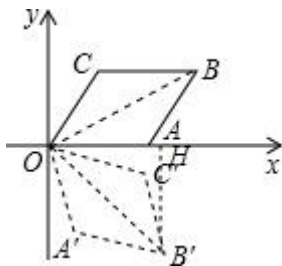
$\therefore \angle AOB' = \angle BOB' - \angle AOB = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle OBH$ 为等腰直角三角形，

$\therefore OH = B'H = \frac{\sqrt{2}}{2} OB' = \sqrt{6}$ ，

$\therefore$ 点 B' 的坐标为 $(\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

故答案为： $(\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

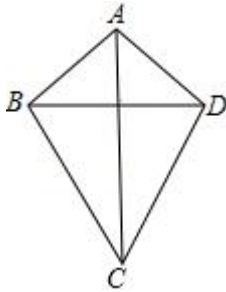


【点评】本题考查了坐标与图形变化—旋转：图形或点旋转之后要结合旋转的角度和图形的特殊性质来求出旋转后的点的坐标. 常见的是旋转特殊角度如： 30° ， 45° ， 60° ， 90° ， 180° .

16. (3分) 如图, 在四边形 ABCD 中, $AB=AD=5$, $BC=CD$ 且 $BC > AB$, $BD=8$. 给出以下判断:

- ① AC 垂直平分 BD;
- ② 四边形 ABCD 的面积 $S=AC \cdot BD$;
- ③ 顺次连接四边形 ABCD 的四边中点得到的四边形可能是正方形;
- ④ 当 A, B, C, D 四点在同一个圆上时, 该圆的半径为 $\frac{25}{6}$;
- ⑤ 将 $\triangle ABD$ 沿直线 BD 对折, 点 A 落在点 E 处, 连接 BE 并延长交 CD 于点 F, 当 $BF \perp CD$ 时, 点 F 到直线 AB 的距离为 $\frac{678}{125}$.

其中正确的是 ①③④. (写出所有正确判断的序号)



【分析】 依据 $AB=AD=5$, $BC=CD$, 可得 AC 是线段 BD 的垂直平分线, 故①正确; 依据四边形 ABCD 的面积 $S=\frac{AC \cdot BD}{2}$, 故②错误; 依据 $AC=BD$, 可得顺次连接四边形 ABCD 的四边中点得到的四边形是正方形, 故③正确; 当 A, B, C, D 四点在同一个圆上时, 设该圆的半径为 r , 则 $r^2 = (r-3)^2 + 4^2$, 得 $r=\frac{25}{6}$, 故④正确; 连接 AF, 设点 F 到直线 AB 的距离为 h , 由折叠可得, 四边形 ABED 是菱形, $AB=BE=5=AD=GD$, $BO=DO=4$, 依据 $S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times BD \times OE = \frac{1}{2} \times BE \times DF$, 可得 $DF = \frac{24}{5}$, 进而得出 $GF = \frac{7}{5}$, 再根据 $S_{\triangle ABF} = S_{\text{梯形 ABFD}} - S_{\triangle ADF}$, 即可得到 $h = \frac{768}{125}$, 故⑤错误.

【解答】 解: $\because$ 在四边形 ABCD 中, $AB=AD=5$, $BC=CD$,

$\therefore$ AC 是线段 BD 的垂直平分线, 故①正确;

四边形 ABCD 的面积 $S=\frac{AC \cdot BD}{2}$, 故②错误;

当 $AC=BD$ 时, 顺次连接四边形 ABCD 的四边中点得到的四边形是正方形, 故③正确;

当 A, B, C, D 四点在同一个圆上时, 设该圆的半径为 r , 则

$$r^2 = (r-3)^2 + 4^2,$$

得 $r = \frac{25}{6}$, 故④正确;

将 $\triangle ABD$ 沿直线 BD 对折, 点 A 落在点 E 处, 连接 BE 并延长交 CD 于点 F , 如图所示,

连接 AF , 设点 F 到直线 AB 的距离为 h ,

由折叠可得, 四边形 $ABED$ 是菱形, $AB=BE=5=AD=GD$, $BO=DO=4$,

$$\therefore AO=EO=3,$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times BD \times OE = \frac{1}{2} \times BE \times DF,$$

$$\therefore DF = \frac{BD \times EO}{BE} = \frac{24}{5},$$

$$\therefore BF \perp CD, BF \parallel AD,$$

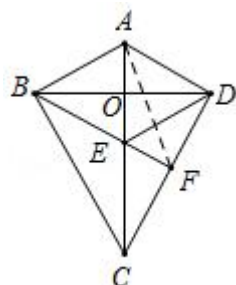
$$\therefore AD \perp CD, GF = \sqrt{DG^2 - DF^2} = \frac{7}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\text{梯形} ABFD} - S_{\triangle ADF},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 5h = \frac{1}{2} \left(5 + 5 + \frac{7}{5} \right) \times \frac{24}{5} - \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{24}{5},$$

$$\text{解得 } h = \frac{768}{125}, \text{ 故⑤错误;}$$

故答案为: ①③④.



【点评】 本题主要考查了菱形的判定与性质, 线段垂直平分线的性质以及勾股定理的综合运用, 解决问题的关键是利用图形面积的和差关系进行计算.

三、解答题 (本人题共 8 小题, 共 72 分, 解答应写出必要的演算步骤、文字说明或证明过程)

17. (6 分) 先化简, 再求值: $\frac{x^2}{x^2-1} \div \left(\frac{1}{x-1} + 1 \right)$, 其中 x 为整数且满足不等式组 $\begin{cases} x-1 > 1 \\ 8-2x \geq 2 \end{cases}$.

【分析】 根据分式的除法和加法可以化简题目中的式子, 由 x 为整数且满足不等式组

$$\begin{cases} x-1 > 1 \\ 8-2x \geq 2 \end{cases} \text{ 可以求得 } x \text{ 的值, 从而可以解答本题.}$$

【解答】解： $\frac{x^2}{x^2-1} \div (\frac{1}{x-1}+1)$

$$= \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} \div \frac{1+x-1}{x-1}$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{x}$$

$$= \frac{x}{x+1},$$

由 $\begin{cases} x-1 > 1 \\ 8-2x \geq 2 \end{cases}$ 得, $2 < x \leq 3$,

$\because x$ 是整数,

$$\therefore x=3,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}.$$

【点评】 本题考查分式的化简求值、解一元一次不等式组、一元一次不等式组的整数解，解答本题的关键是明确分式的化简求值的计算方法.

18. (7 分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k+3)x + k^2 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$, 求 k 的值.

【分析】 (1) 根据方程的系数结合根的判别式 $\Delta > 0$, 即可得出关于 k 的一元一次方程, 解之即可得出 k 的取值范围;

(2) 根据根与系数的关系可得出 $x_1+x_2 = -2k-3$ 、 $x_1x_2 = k^2$, 结合 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$ 即可得出关于 k 的分式方程, 解之经检验即可得出结论.

【解答】 解: (1) $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k+3)x + k^2 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (2k+3)^2 - 4k^2 > 0,$$

$$\text{解得: } k > -\frac{3}{4}.$$

(2) $\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2 + (2k+3)x + k^2 = 0$ 的实数根,

$$\therefore x_1+x_2 = -2k-3, \quad x_1x_2 = k^2,$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = -\frac{(2k+3)}{k^2} = -1,$$

$$\text{解得: } k_1=3, \quad k_2=-1,$$

经检验, $k_1=3$, $k_2=-1$ 都是原分式方程的根.

$$\text{又} \because k > -\frac{3}{4},$$

$$\therefore k=3.$$

【点评】 本题考查了根与系数的关系以及根的判别式, 解题的关键是: (1) 牢记“当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根”; (2) 根据根与系数的关系结合 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$ 找出关于 k 的分式方程.

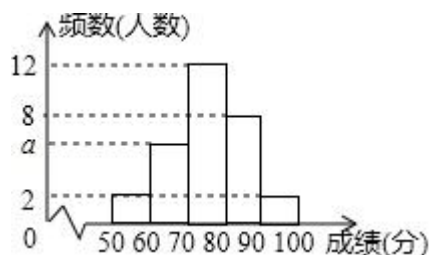
19. (9分) 为了解某次“小学生书法比赛”的成绩情况, 随机抽取了 30 名学生的成绩进行统计, 并将统计情况绘成如图所示的频数分布直方图, 已知成绩 x (单位: 分) 均满足“ $50 \leq x < 100$ ”. 根据图中信息回答下列问题:

(1) 图中 a 的值为 6;

(2) 若要绘制该样本的扇形统计图, 则成绩 x 在“ $70 \leq x < 80$ ”所对应扇形的圆心角度数为 144 度;

(3) 此次比赛共有 300 名学生参加, 若将“ $x \geq 80$ ”的成绩记为“优秀”, 则获得“优秀”的学生大约有 100 人;

(4) 在这些抽查的样本中, 小明的成绩为 92 分, 若从成绩在“ $50 \leq x < 60$ ”和“ $90 \leq x < 100$ ”的学生中任选 2 人, 请用列表或画树状图的方法, 求小明被选中的概率.



【分析】 (1) 用总人数减去其他分组的人数即可求得 $60 \leq x < 70$ 的人数 a ;

(2) 用 360° 乘以成绩在 $70 \leq x < 80$ 的人数所占比例可得;

(3) 用总人数乘以样本中优秀人数所占比例即可得;

(4) 先画出树状图展示所有 12 种等可能的结果数, 再找出有 C 的结果数, 然后根据概率公式求解.

【解答】 解: (1) $a=30 - (2+12+8+2) =6$,

故答案为: 6;

(2) 成绩 x 在 “ $70 \leq x < 80$ ” 所对应扇形的圆心角度数为 $360^\circ \times \frac{12}{30} = 144^\circ$,

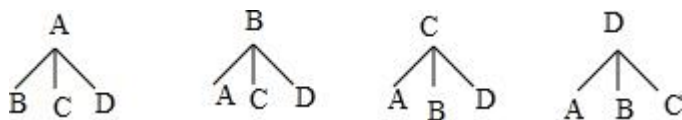
故答案为: 144;

(3) 获得 “优秀” 的学生大约有 $300 \times \frac{8+2}{30} = 100$ 人,

故答案为: 100;

(4) $50 \leq x < 60$ 的两名同学用 A、B 表示, $90 \leq x < 100$ 的两名同学用 C、D 表示 (小明用 C 表示),

画树状图为:



共有 12 种等可能的结果数, 其中有 C 的结果数为 6,

所以小明被选中的概率为 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

【点评】 本题考查了列表法或树状图法: 通过列表法或树状图法展示所有等可能的结果求出 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 然后根据概率公式求出事件 A 或 B 的概率. 也考查了扇形统计图和频率分布直方图.

20. (8 分) 随州市新渼水一桥 (如图 1) 设计灵感来源于市花 —— 兰花, 采用蝴蝶兰斜拉桥方案, 设计长度为 258 米, 宽 32 米, 为双向六车道, 2018 年 4 月 3 日通车. 斜拉桥又称斜张桥, 主要由索塔、主梁、斜拉索组成. 某座斜拉桥的部分截面图如图 2 所示, 索塔 AB 和斜拉索 (图中只画出最短的斜拉索 DE 和最长的斜拉索 AC) 均在同一水平面内, BC 在水平桥面上. 已知 $\angle ABC = \angle DEB = 45^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$, $BE = 6$ 米, $AB = 5BD$.

(1) 求最短的斜拉索 DE 的长;

(2) 求最长的斜拉索 AC 的长.



图1

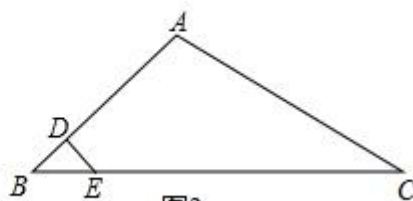


图2

【分析】(1) 根据等腰直角三角形的性质计算 DE 的长；

(2) 作 $AH \perp BC$ 于 H, 如图 2, 由于 $BD=DE=3\sqrt{2}$, 则 $AB=3BD=15\sqrt{2}$, 在 $Rt\triangle ABH$ 中, 根据等腰直角三角形的性质可计算出 $BH=AH=15$, 然后在 $Rt\triangle ACH$ 中利用含 30° 的直角三角形三边的关系即可得到 AC 的长.

【解答】解: (1) $\because \angle ABC = \angle DEB = 45^\circ$,

$\therefore \triangle BDE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{2}}{2} BE = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6 = 3\sqrt{2}.$$

答: 最短的斜拉索 DE 的长为 $3\sqrt{2}m$;

(2) 作 $AH \perp BC$ 于 H, 如图 2,

$$\therefore BD = DE = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore AB = 3BD = 5 \times 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2},$$

在 $Rt\triangle ABH$ 中, $\because \angle B = 45^\circ$,

$$\therefore BH = AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 15\sqrt{2} = 15,$$

在 $Rt\triangle ACH$ 中, $\because \angle C = 30^\circ$,

$$\therefore AC = 2AH = 30.$$

答: 最长的斜拉索 AC 的长为 $30m$.

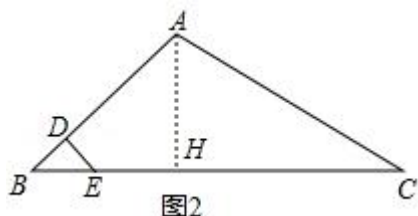


图2

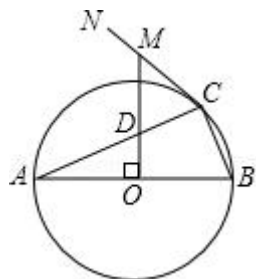
【点评】本题考查了解直角三角形的应用: 将实际问题抽象为数学问题 (画出平面图形, 构造出直角三角形转化为解直角三角形问题).

21. (8分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 为 $\odot O$ 上一点, CN 为 $\odot O$ 的切线, $OM \perp AB$ 于

点 O，分别交 AC、CN 于 D、M 两点.

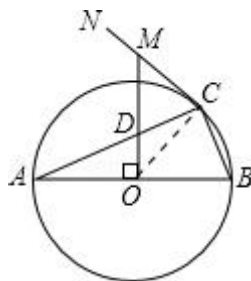
(1) 求证: $MD=MC$;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 5, $AC=4\sqrt{5}$, 求 MC 的长.



【分析】(1) 连接 OC，利用切线的性质证明即可；

(2) 根据相似三角形的判定和性质以及勾股定理解答即可.



【解答】解: (1) 连接 OC,

$\because$ CN 为 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OC \perp CM$, $\angle OCA + \angle ACM = 90^\circ$,

$\because OM \perp AB$,

$\therefore \angle OAC + \angle ODA = 90^\circ$,

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle OAC = \angle OCA$,

$\therefore \angle ACM = \angle ODA = \angle CDM$,

$\therefore MD = MC$;

(2) 由题意可知 $AB = 5 \times 2 = 10$, $AC = 4\sqrt{5}$,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore BC = \sqrt{10^2 - (4\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5}$,

$\because \angle AOD = \angle ACB$, $\angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle AOD \sim \triangle ACB$,

$$\therefore \frac{OD}{BC} = \frac{AO}{AC}, \text{ 即 } \frac{OD}{2\sqrt{5}} = \frac{5}{4\sqrt{5}},$$

可得: $OD=2.5$,

设 $MC=MD=x$, 在 $Rt\triangle OCM$ 中, 由勾股定理得: $(x+2.5)^2 = x^2 + 5^2$,

$$\text{解得: } x = \frac{15}{4},$$

$$\text{即 } MC = \frac{15}{4}.$$

【点评】 本题考查切线的判定和性质、相似三角形的判定和性质、勾股定理等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 正确寻找相似三角形解决问题.

22. (11 分) 为迎接“世界华人炎帝故里寻根节”, 某工厂接到一批纪念品生产订单, 按要求在 15 天内完成, 约定这批纪念品的出厂价为每件 20 元, 设第 x 天 ($1 \leq x \leq 15$, 且 x 为整数) 每件产品的成本是 p 元, p 与 x 之间符合一次函数关系, 部分数据如表:

天数 (x)	1	3	6	10
每件成本 p (元)	7.5	8.5	10	12

任务完成后, 统计发现工人李师傅第 x 天生产的产品件数 y (件) 与 x (天) 满足如下关系:

$$y = \begin{cases} 2x+20 & (1 \leq x < 10, \text{ 且 } x \text{ 为整数}) \\ 40 & (10 \leq x \leq 15, \text{ 且 } x \text{ 为整数}) \end{cases}$$

设李师傅第 x 天创造的产品利润为 W 元.

- (1) 直接写出 p 与 x , W 与 x 之间的函数关系式, 并注明自变量 x 的取值范围;
- (2) 求李师傅第几天创造的利润最大? 最大利润是多少元?
- (3) 任务完成后, 统计发现平均每个工人每天创造的利润为 299 元. 工厂制定如下奖励制度: 如果一个工人某天创造的利润超过该平均值, 则该工人当天可获得 20 元奖金. 请计算李师傅共可获得多少元奖金?

【分析】 (1) 根据题意和表格中的数据可以求得 p 与 x , W 与 x 之间的函数关系式, 并注明自变量 x 的取值范围;

(2) 根据题意和题目中的函数表达式可以解答本题;

(3) 根据 (2) 中的结果和不等式的性质可以解答本题.

【解答】 解: (1) 设 p 与 x 之间的函数关系式为 $p=kx+b$,

$$\begin{cases} k+b=7.5 \\ 3k+b=8.5 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} k=0.5 \\ b=7 \end{cases},$$

即 p 与 x 的函数关系式为 $p=0.5x+7$ ($1 \leq x \leq 15$, x 为整数),

当 $1 \leq x < 10$ 时,

$$W=[20 - (0.5x+7)] (2x+20) = -x^2+16x+260,$$

当 $10 \leq x \leq 15$ 时,

$$W=[20 - (0.5x+7)] \times 40 = -20x+520,$$

$$\text{即 } W = \begin{cases} -x^2+16x+260 & (1 \leq x < 10, x \text{ 为整数}) \\ -20x+520 & (10 \leq x \leq 15, x \text{ 为整数}) \end{cases};$$

(2) 当 $1 \leq x < 10$ 时,

$$W = -x^2+16x+260 = -(x-8)^2+324,$$

$\therefore$ 当 $x=8$ 时, W 取得最大值, 此时 $W=324$,

当 $10 \leq x \leq 15$ 时,

$$W = -20x+520,$$

$\therefore$ 当 $x=10$ 时, W 取得最大值, 此时 $W=320$,

$$\because 324 > 320,$$

$\therefore$ 李师傅第 8 天创造的利润最大, 最大利润是 324 元;

(3) 当 $1 \leq x < 10$ 时,

$$\text{令 } -x^2+16x+260=299, \text{ 得 } x_1=3, x_2=13,$$

当 $W > 299$ 时, $3 < x < 13$,

$$\because 1 \leq x < 10,$$

$$\therefore 3 < x < 10,$$

当 $10 \leq x \leq 15$ 时,

$$\text{令 } W = -20x+520 > 299, \text{ 得 } x < 11.05,$$

$$\therefore 10 \leq x \leq 11,$$

由上可得, 李师傅获得奖金的月份是 4 月到 11 月, 李师傅共获得奖金为: $20 \times (11 - 3) = 160$ (元),

即李师傅共可获得 160 元奖金.

【点评】 本题考查二次函数的应用、一元二次方程的应用, 解不等式, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件, 利用二次函数的性质解答.

23. (11 分) 我们知道, 有理数包括整数、有限小数和无限循环小数, 事实上, 所有的有理

数都可以化为分数形式（整数可看作分母为1的分数），那么无限循环小数如何表示为分数形式呢？请看以下示例：

例：将 $0.\dot{7}$ 化为分数形式

由于 $0.\dot{7}=0.777\cdots$ ，设 $x=0.777\cdots$ ①

则 $10x=7.777\cdots$ ②

② - ①得 $9x=7$ ，解得 $x=\frac{7}{9}$ ，于是得 $0.\dot{7}=\frac{7}{9}$ 。

同理可得 $0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ ， $1.\dot{4}=1+0.\dot{4}=1+\frac{4}{9}=\frac{13}{9}$

根据以上阅读，回答下列问题：（以下计算结果均用最简分数表示）

【基础训练】

(1) $0.\dot{5}=\frac{5}{9}$ ， $5.\dot{8}=\frac{53}{9}$ ；

(2) 将 $0.\dot{2}\dot{3}$ 化为分数形式，写出推导过程；

【能力提升】

(3) $0.\dot{3}\dot{1}\dot{5}=\frac{35}{111}$ ， $2.0\dot{1}\dot{8}=\frac{111}{55}$ ；

(注： $0.\dot{3}\dot{1}\dot{5}=0.315315\cdots$ ， $2.0\dot{1}\dot{8}=2.01818\cdots$)

【探索发现】

(4) ①试比较 $0.\dot{9}$ 与 1 的大小： $0.\dot{9} \underline{=} 1$ （填“>”、“<”或“=”）

②若已知 $0.\dot{2}8571\dot{4}=\frac{2}{7}$ ，则 $3.\dot{7}1428\dot{5}=\frac{26}{7}$ 。

(注： $0.\dot{2}8571\dot{4}=0.285714285714\cdots$)

【分析】 根据阅读材料可知，每个整数部分为零的无限循环小数都可以写成分式形式，如果循环节有 n 位，则这个分数的分母为 n 个 9，分子为循环节。

【解答】 解：(1) 由题意知 $0.\dot{5}=\frac{5}{9}$ 、 $5.\dot{8}=5+\frac{8}{9}=\frac{53}{9}$ ，

故答案为： $\frac{5}{9}$ 、 $\frac{53}{9}$ ；

(2) $0.\dot{2}\dot{3}=0.232323\cdots$ ，

设 $x=0.232323\cdots$ ①，

则 $100x=23.2323\cdots$ ②，

② - ①, 得: $99x=23$,

解得: $x=\frac{23}{99}$,

$\therefore 0.\dot{2}\dot{3}=\frac{23}{99}$;

(3) 同理

$0.\dot{3}\dot{1}\dot{5}=\frac{315}{999}=\frac{35}{111}$, $2.0\dot{1}\dot{8}=2+\frac{1}{10}\times\frac{18}{99}=\frac{111}{55}$

故答案为: $\frac{55}{111}$, $\frac{111}{55}$

(4) ① $0.\dot{9}=\frac{9}{9}=1$

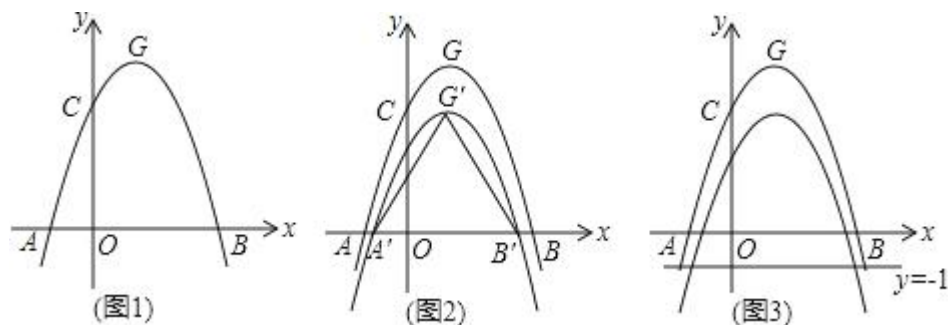
故答案为: =

② $3.\dot{7}1428\dot{5}=3+\frac{714285}{999999}=3+\frac{5}{7}=\frac{26}{7}$

故答案为: $\frac{26}{7}$

【点评】 本题考查了规律探索和简单一元一次方程的应用, 解答时注意按照阅读材料的示例找到规律.

24. (12 分) 如图 1, 抛物线 $C_1: y=ax^2-2ax+c$ ($a<0$) 与 x 轴交于 A、B 两点, 与 y 轴交于点 C. 已知点 A 的坐标为 $(-1, 0)$, 点 O 为坐标原点, $OC=3OA$, 抛物线 C_1 的顶点为 G.



(1) 求出抛物线 C_1 的解析式, 并写出点 G 的坐标;

(2) 如图 2, 将抛物线 C_1 向下平移 k ($k>0$) 个单位, 得到抛物线 C_2 , 设 C_2 与 x 轴的交点为 A' 、 B' , 顶点为 G' , 当 $\triangle A'B'G'$ 是等边三角形时, 求 k 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 如图 3, 设点 M 为 x 轴正半轴上一动点, 过点 M 作 x 轴的垂线分别交抛物线 C_1 、 C_2 于 P、Q 两点, 试探究在直线 $y=-1$ 上是否存在点 N, 使得以 P、Q、N 为顶点的三角形与 $\triangle AOQ$ 全等, 若存在, 直接写出点 M、N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【分析】(1) 由点 A 的坐标及 $OC=3OA$ 得点 C 坐标，将 A、C 坐标代入解析式求解可得；

(2) 设抛物线 C_2 的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3 - k$ ，即 $y = -(x-1)^2 + 4 - k$ ，作 $G'D \perp x$ 轴于点 D，设 $BD' = m$ ，由等边三角形性质知点 B' 的坐标为 $(m+1, 0)$ ，点 G' 的坐标为 $(1, \sqrt{3}m)$ ，代入所设解析式求解可得；

(3) 设 $M(x, 0)$ ，则 $P(x, -x^2 + 2x + 3)$ 、 $Q(x, -x^2 + 2x + 2)$ ，根据 $PQ=OA=1$ 且 $\angle AOQ$ 、 $\angle PQN$ 均为钝角知 $\triangle AOQ \cong \triangle PQN$ ，延长 PQ 交直线 $y = -1$ 于点 H，证 $\triangle OQM \cong \triangle QNH$ ，根据对应边相等建立关于 x 的方程，解之求得 x 的值从而进一步求解。

【解答】解：(1) $\because$ 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$ ，

$\therefore OA=1$ ，

$\therefore OC=3OA$ ，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 3)$ ，

将 A、C 坐标代入 $y = ax^2 - 2ax + c$ ，得：

$$\begin{cases} a+2a+c=0 \\ c=3 \end{cases},$$

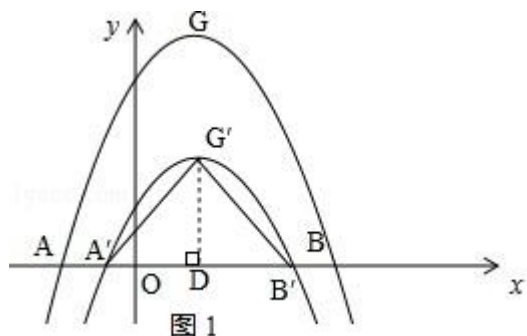
$$\text{解得：} \begin{cases} a=-1 \\ c=3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线 C_1 的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$ ，

所以点 G 的坐标为 $(1, 4)$ 。

(2) 设抛物线 C_2 的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3 - k$ ，即 $y = -(x-1)^2 + 4 - k$ ，

过点 G' 作 $G'D \perp x$ 轴于点 D，设 $BD' = m$ ，



$\therefore \triangle A'B'G'$ 为等边三角形，

$\therefore G'D = \sqrt{3}B'D = \sqrt{3}m$ ，

则点 B' 的坐标为 $(m+1, 0)$ ，点 G' 的坐标为 $(1, \sqrt{3}m)$ ，

将点 B' 、 G' 的坐标代入 $y = -(x-1)^2 + 4 - k$ ，得：

$$\begin{cases} -m^2+4-k=0 \\ 4-k=\sqrt{3}m \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m_1=0 \\ k_1=4 \end{cases} \text{ (舍)}, \begin{cases} m_2=\sqrt{3} \\ k_2=1 \end{cases},$$

$$\therefore k=1;$$

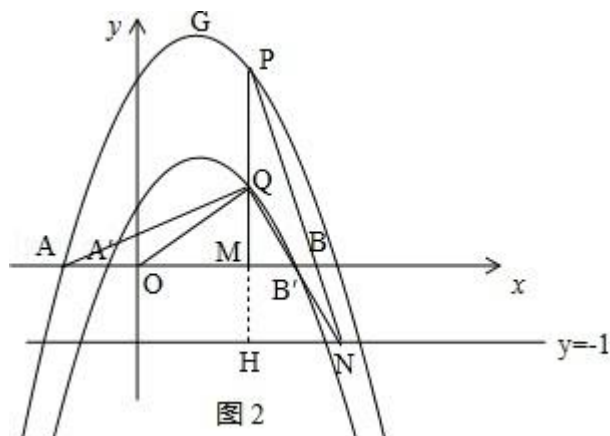
(3) 设 $M(x, 0)$, 则 $P(x, -x^2+2x+3)$ 、 $Q(x, -x^2+2x+2)$,

$$\therefore PQ=OA=1,$$

$\therefore \angle AOQ$ 、 $\angle PQN$ 均为钝角,

$$\therefore \triangle AOQ \cong \triangle PQN,$$

如图 2, 延长 PQ 交直线 $y=-1$ 于点 H ,



则 $\angle QHN = \angle OMQ = 90^\circ$,

又 $\therefore \triangle AOQ \cong \triangle PQN$,

$$\therefore OQ=QN, \angle AOQ = \angle PQN,$$

$$\therefore \angle MOQ = \angle HQN,$$

$$\therefore \triangle OQM \cong \triangle QNH \text{ (AAS)},$$

$$\therefore OM=QH, \text{ 即 } x = -x^2+2x+2+1,$$

$$\text{解得: } x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \text{ (负值舍去),}$$

$$\text{当 } x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ 时, } HN=QM = -x^2+2x+2 = \frac{\sqrt{13}-1}{2}, \text{ 点 } M \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 0 \right),$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 坐标为 } \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{13}-1}{2}, -1 \right), \text{ 即 } (\sqrt{13}, -1);$$

$$\text{或 } \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2} - \frac{\sqrt{13}-1}{2}, -1 \right), \text{ 即 } (1, -1);$$

如图 3,

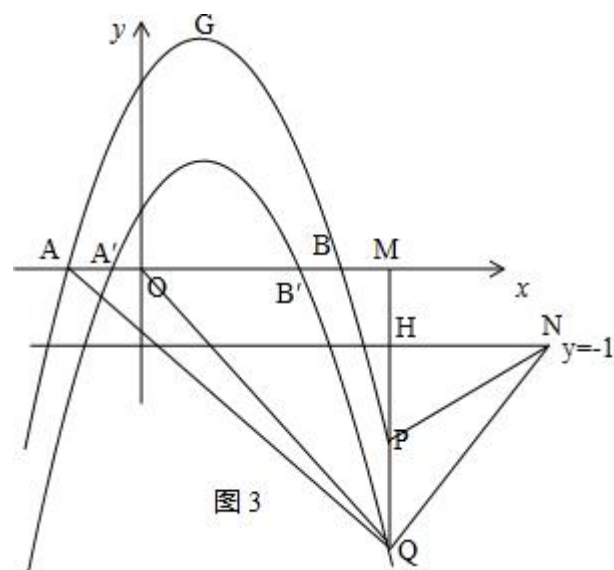


图 3

同理可得 $\triangle OQM \cong \triangle PNH$,

$\therefore OM = PH$, 即 $x = -(-x^2 + 2x + 2) - 1$,

解得: $x = -1$ (舍) 或 $x = 4$,

当 $x = 4$ 时, 点 M 的坐标为 $(4, 0)$, $HN = QM = -(-x^2 + 2x + 2) = 6$,

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(4+6, -1)$ 即 $(10, -1)$, 或 $(4-6, -1)$ 即 $(-2, -1)$;

综上点 $M_1(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 0)$ 、 $N_1(\sqrt{13}, -1)$; $M_2(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 0)$ 、 $N_2(1, -1)$;

$M_3(4, 0)$ 、 $N_3(10, -1)$; $M_4(4, 0)$ 、 $N_4(-2, -1)$.

【点评】 本题主要考查二次函数的综合问题, 解题的关键是掌握待定系数法求函数解析式、等边三角形的性质、全等三角形的判定与性质等知识点.