

湖北省荆门市 2018 年中考数学真题试题

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (3 分) 8 的相反数的立方根是 ()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. $-\frac{1}{2}$

2. (3 分) 中国的陆地面积和领水面积共约 9970000km²，9970000 这个数用科学记数法可表示为 ()

- A. 9.97×10^5 B. 99.7×10^5 C. 9.97×10^6 D. 0.997×10^7

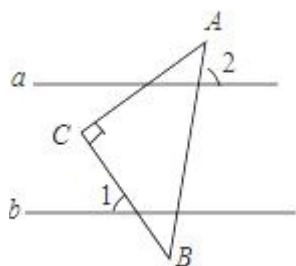
3. (3 分) 在函数 $y = \frac{\sqrt{x-1}}{1-x}$ 中，自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \geq 1$ B. $x > 1$ C. $x < 1$ D. $x \leq 1$

4. (3 分) 下列命题错误的是 ()

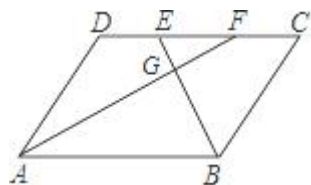
- A. 若一个多边形的内角和与外角和相等，则这个多边形是四边形
B. 矩形一定有外接圆
C. 对角线相等的菱形是正方形
D. 一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形

5. (3 分) 已知直线 $a \parallel b$ ，将一块含 45° 角的直角三角板 ($\angle C = 90^\circ$) 按如图所示的位置摆放，若 $\angle 1 = 55^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为 ()



- A. 80° B. 70° C. 85° D. 75°

6. (3 分) 如图，四边形 ABCD 为平行四边形，E、F 为 CD 边的两个三等分点，连接 AF、BE 交于点 G，则 $S_{\triangle EFG} : S_{\triangle ABG} =$ ()



- A. 1: 3 B. 3: 1 C. 1: 9 D. 9: 1

7. (3分) 已知关于 x 的不等式 $3x - m + 1 > 0$ 的最小整数解为 2, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $4 \leq m < 7$ B. $4 < m < 7$ C. $4 \leq m \leq 7$ D. $4 < m \leq 7$

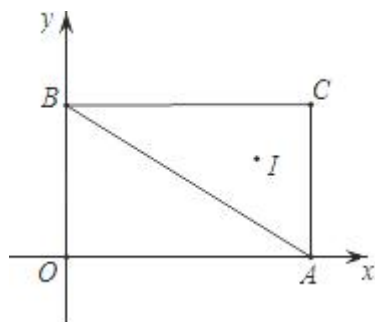
8. (3分) 甲、乙两名同学分别进行 6 次射击训练, 训练成绩 (单位: 环) 如下表

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次
甲	9	8	6	7	8	10
乙	8	7	9	7	8	8

对他们的训练成绩作如下分析, 其中说法正确的是 ()

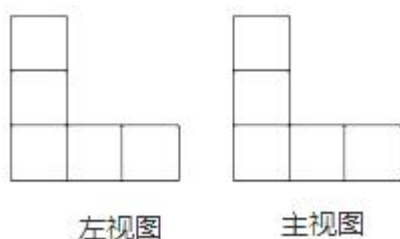
A. 他们训练成绩的平均数相同 B. 他们训练成绩的中位数不同
C. 他们训练成绩的众数不同 D. 他们训练成绩的方差不同

9. (3分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(4, 0)$, $B(0, 3)$, $C(4, 3)$, I 是 $\triangle ABC$ 的内心, 将 $\triangle ABC$ 绕原点逆时针旋转 90° 后, I 的对应点 I' 的坐标为 ()



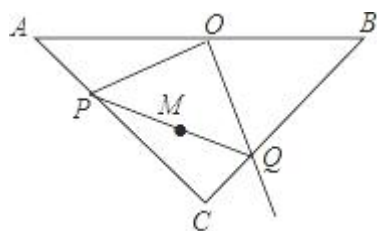
A. $(-2, 3)$ B. $(-3, 2)$ C. $(3, -2)$ D. $(2, -3)$

10. (3分) 某几何体由若干大小相同的小正方体搭成, 其主视图与左视图如图所示, 则搭成这个几何体的小正方体最少有 ()



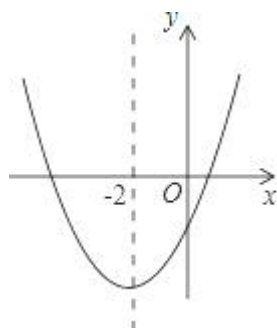
A. 4 个 B. 5 个 C. 6 个 D. 7 个

11. (3分) 如图, 等腰 $Rt\triangle ABC$ 中, 斜边 AB 的长为 2, O 为 AB 的中点, P 为 AC 边上的动点, $OQ \perp OP$ 交 BC 于点 Q , M 为 PQ 的中点, 当点 P 从点 A 运动到点 C 时, 点 M 所经过的路线长为 ()



- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ C. 1 D. 2

12. (3分) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的大致图象如图所示, 顶点坐标为 $(-2, -9a)$, 下列结论: ① $4a+2b+c > 0$; ② $5a-b+c=0$; ③若方程 $a(x+5)(x-1)=-1$ 有两个根 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $-5 < x_1 < x_2 < 1$; ④若方程 $|ax^2+bx+c|=1$ 有四个根, 则这四个根的和为 -4 . 其中正确的结论有 ()



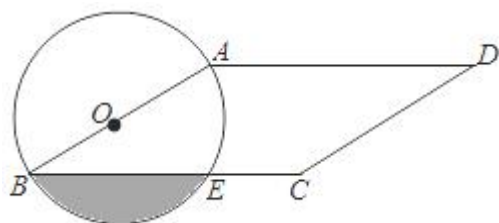
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

二、填空题 (每题 3 分, 满分 15 分, 将答案填在答题纸上)

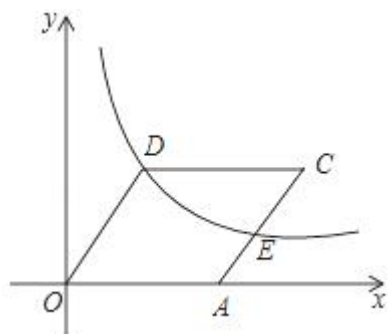
13. (3分) 计算: $\sqrt{(-2)^2} \times 2^{-2} - |\sqrt{3} \tan 30^\circ - 3| + 2018^0 =$ _____.

14. (3分) 已知 $x=2$ 是关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + (k^2 - 2)x + 2k + 4 = 0$ 的一个根, 则 k 的值为_____.

15. (3分) 如图, 在平行四边形 ABCD 中, $AB < AD$, $\angle D = 30^\circ$, $CD = 4$, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 E, 则阴影部分的面积为_____.



16. (3分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0, x > 0$) 的图象经过菱形 OACD 的顶点 D 和边 AC 的中点 E, 若菱形 OACD 的边长为 3, 则 k 的值为_____.



17. (3分) 将数 1 个 1, 2 个 $\frac{1}{2}$, 3 个 $\frac{1}{3}$, $\dots$, n 个 $\frac{1}{n}$ (n 为正整数) 顺次排成一列: 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots$, 记 $a_1=1, a_2=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{2}, \dots, S_1=a_1, S_2=a_1+a_2, S_3=a_1+a_2+a_3, \dots, S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$, 则 $S_{2018}=\underline{\hspace{2cm}}$.

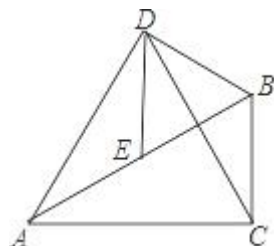
三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 69 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

18. (8分) 先化简, 再求值: $(x+2+\frac{3x+4}{x-2}) \div \frac{x^2+6x+9}{x-2}$, 其中 $x=2\sqrt{3}$.

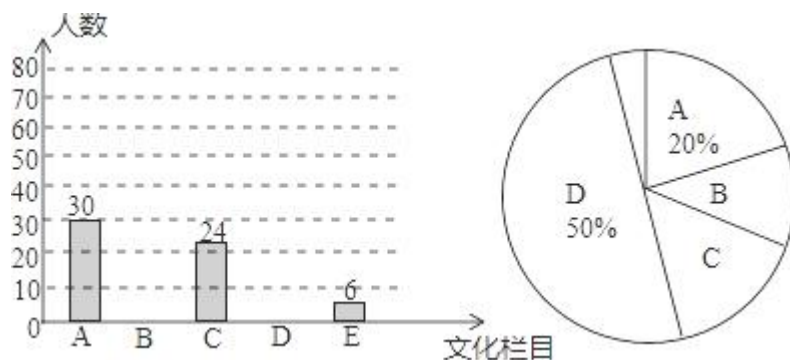
19. (9分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, (M_2, N_2) , $\angle BAC=30^\circ$, E 为 AB 边的中点, 以 BE 为边作等边 $\triangle BDE$, 连接 AD, CD .

(1) 求证: $\triangle ADE \cong \triangle CDB$;

(2) 若 $BC=\sqrt{3}$, 在 AC 边上找一点 H , 使得 $BH+EH$ 最小, 并求出这个最小值.



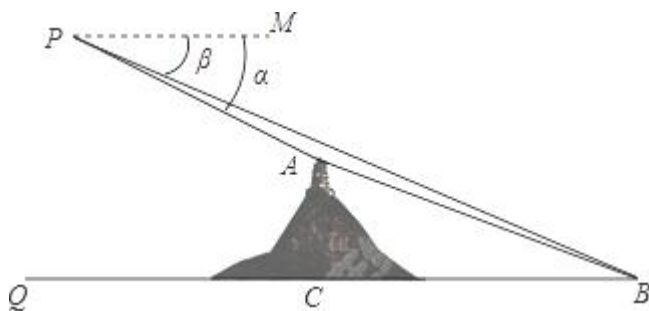
20. (10分) 文化是一个国家、一个民族的灵魂, 近年来, 央视推出《中国诗词大会》、《中国成语大会》、《朗读者》、《经典咏流传》等一系列文化栏目. 为了解学生对这些栏目的喜爱情况, 某学校组织学生会成员随机抽取了部分学生进行调查, 被调查的学生必须从《经典咏流传》(记为 A)、《中国诗词大会》(记为 B)、《中国成语大会》(记为 C)、《朗读者》(记为 D) 中选择自己最喜爱的一个栏目, 也可以写出一个自己喜爱的其他文化栏目 (记为 E). 根据调查结果绘制成如图所示的两幅不完整的统计图.



请根据图中信息解答下列问题:

- (1) 在这项调查中, 共调查了多少名学生?
- (2) 将条形统计图补充完整, 并求出扇形统计图中“B”所在扇形圆心角的度数;
- (3) 若选择“E”的学生中有 2 名女生, 其余为男生, 现从选择“E”的学生中随机选出两名学生参加座谈, 请用列表法或画树状图的方法求出刚好选到同性别学生的概率.

21. (10 分) 数学实践活动小组借助载有测角仪的无人机测量象山岚光阁与文明湖湖心亭之间的距离. 如图, 无人机所在位置 P 与岚光阁阁顶 A、湖心亭 B 在同一铅垂面内, P 与 B 的垂直距离为 300 米, A 与 B 的垂直距离为 150 米, 在 P 处测得 A、B 两点的俯角分别为 α 、 β , 且 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = \sqrt{2} - 1$, 试求岚光阁与湖心亭之间的距离 AB. (计算结果若含有根号, 请保留根号)

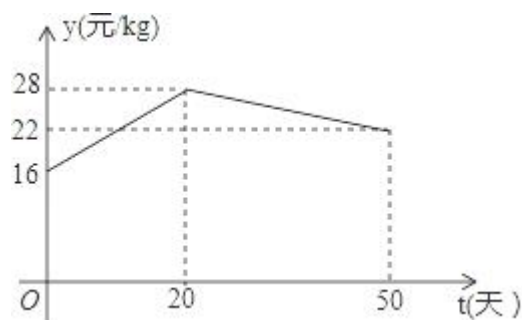


22. (10 分) 随着龙虾节的火热举办, 某龙虾养殖大户为了发挥技术优势, 一次性收购了 10000kg 小龙虾, 计划养殖一段时间后再出售. 已知每天养殖龙虾的成本相同, 放养 10 天的总成本为 166000, 放养 30 天的总成本为 178000 元. 设这批小龙虾放养 t 天后的质量为 a kg, 销售单价为 y 元/kg, 根据往年的行情预测, a 与 t 的函数关系为 $a = \begin{cases} 10000 (0 \leq t \leq 20) \\ 100t + 8000 (20 < t \leq 50) \end{cases}$, y 与 t 的函数关系如图所示.

- (1) 设每天的养殖成本为 m 元, 收购成本为 n 元, 求 m 与 n 的值;
- (2) 求 y 与 t 的函数关系式;
- (3) 如果将这批小龙虾放养 t 天后一次性出售所得利润为 W 元. 问该龙虾养殖大户将这批

小龙虾放养多少天后一次性出售所得利润最大？最大利润是多少？

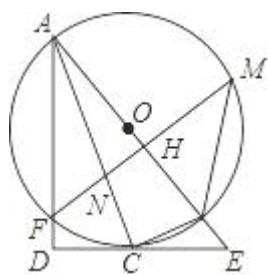
(总成本=放养总费用+收购成本； 利润=销售总额 - 总成本)



23. (10 分) 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, 经过点 C 的切线交 AB 的延长线于点 E, $AD \perp EC$ 交 EC 的延长线于点 D, AD 交 $\odot O$ 于 F, $FM \perp AB$ 于 H, 分别交 $\odot O$ 、AC 于 M、N, 连接 MB, BC.

(1) 求证: AC 平分 $\angle DAE$;

(2) 若 $\cos M = \frac{4}{5}$, $BE=1$, ①求 $\odot O$ 的半径; ②求 FN 的长.



24. (12 分) 如图, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于原点及点 A, 且经过点 B (4, 8), 对称轴为直线 $x=-2$.

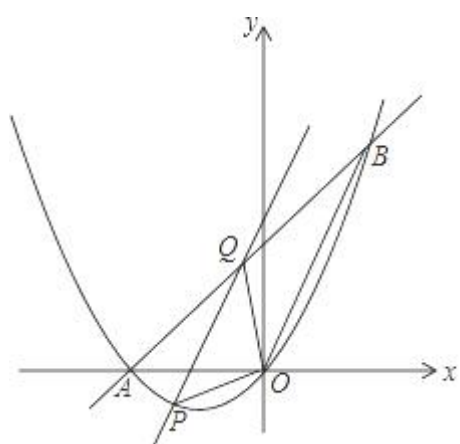
(1) 求抛物线的解析式;

(2) 设直线 $y=kx+4$ 与抛物线两交点的横坐标分别为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 当 $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2}$ 时,

求 k 的值;

(3) 连接 OB, 点 P 为 x 轴下方抛物线上一动点, 过点 P 作 OB 的平行线交直线 AB 于点 Q, 当 $S_{\triangle POQ} : S_{\triangle BOQ} = 1 : 2$ 时, 求出点 P 的坐标.

(坐标平面内两点 M (x_1, y_1), N (x_2, y_2) 之间的距离 $MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$)



参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (3 分) 8 的相反数的立方根是 ()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. $-\frac{1}{2}$

【分析】 根据相反数的定义、立方根的概念计算即可.

【解答】 解：8 的相反数是 -8，

-8 的立方根是 -2，

则 8 的相反数的立方根是 -2，

故选：C.

【点评】 本题考查的是实数的性质，掌握相反数的定义、立方根的概念是解题的关键.

2. (3 分) 中国的陆地面积和领水面积共约 9970000km²，9970000 这个数用科学记数法可表示为 ()

- A. 9.97×10^5 B. 99.7×10^5 C. 9.97×10^6 D. 0.997×10^7

【分析】 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时，n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时，n 是负数.

【解答】 解：9970000 = 9.97×10^6 ，

故选：C.

【点评】 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3 分) 在函数 $y = \frac{\sqrt{x-1}}{1-x}$ 中，自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \geq 1$ B. $x > 1$ C. $x < 1$ D. $x \leq 1$

【分析】 根据被开方数大于等于 0，分母不等于 0 列式求解即可.

【解答】 解：根据题意得 $x - 1 \geq 0$ ， $1 - x \neq 0$ ，

解得 $x > 1$.

故选：B.

【点评】 本题主要考查了函数自变量的取值范围的确定，根据分母不等于 0，被开方数大于等于 0 列式计算即可，是基础题，比较简单.

4. (3 分) 下列命题错误的是 ()

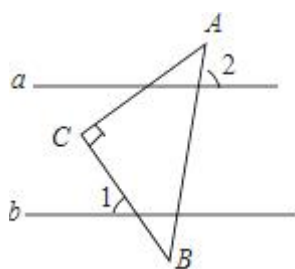
- A. 若一个多边形的内角和与外角和相等，则这个多边形是四边形
- B. 矩形一定有外接圆
- C. 对角线相等的菱形是正方形
- D. 一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形

【分析】 A、任意多边形的外角和为 360° ，然后利用多边形的内角和公式计算即可；
B、判断一个四边形是否有外接圆，要看此四边形的对角是否互补，矩形的对角互补，一定有外接圆；
C、根据正方形的判定方法进行判断；
D、一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

【解答】 解： A、一个多边形的外角和为 360° ，若外角和=内角和= 360° ，所以这个多边形是四边形，故此选项正确；
B、矩形的四个角都是直角，满足对角互补，根据对角互补的四边形四点共圆，则矩形一定有外接圆，故此选项正确；
C、对角线相等的菱形是正方形，故此选项正确；
D、一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；而一对边平行，另一组对边相等的四边形可能是平行四边形或是梯形，故此选项错误；
本题选择错误的命题，
故选： D.

【点评】 本题主要考查的是多边形的内角和和外角和，四点共圆问题，正方形的判定，平行四边形的判定，掌握这些定理和性质是关键.

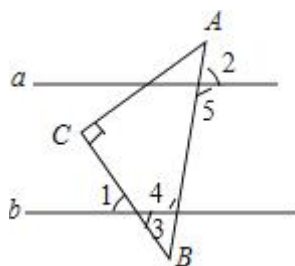
5. (3 分) 已知直线 $a \parallel b$ ，将一块含 45° 角的直角三角板 ($\angle C = 90^\circ$) 按如图所示的位置摆放，若 $\angle 1 = 55^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为 ()



A. 80° B. 70° C. 85° D. 75°

【分析】想办法求出 $\angle 5$ 即可解决问题；

【解答】解：



$$\because \angle 1 = \angle 3 = 55^\circ, \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 3 + \angle B = 100^\circ,$$

$$\because a \parallel b,$$

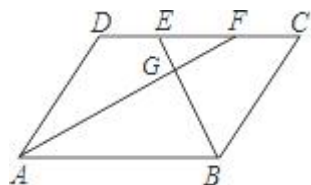
$$\therefore \angle 5 = \angle 4 = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 5 = 80^\circ,$$

故选：A.

【点评】本题考查平行线的性质，三角形内角和定理，三角形的外角的性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

6. (3分) 如图，四边形 ABCD 为平行四边形，E、F 为 CD 边的两个三等分点，连接 AF、BE 交于点 G，则 $S_{\triangle EFG} : S_{\triangle ABG} =$ ()



A. 1: 3 B. 3: 1 C. 1: 9 D. 9: 1

【分析】利用相似三角形的性质面积比等于相似比的平方即可解决问题；

【解答】解： $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形，

$$\therefore CD=AB, CD\parallel AB,$$

$$\because DE=EF=FC,$$

$$\therefore EF: AB=1: 3,$$

$$\therefore \triangle EFG\sim \triangle BAG,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle BAG}} = \left(\frac{EF}{AB}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

故选：C.

【点评】 本题考查平行四边形的性质、相似三角形的性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

7. (3分) 已知关于 x 的不等式 $3x - m + 1 > 0$ 的最小整数解为 2，则实数 m 的取值范围是 ()

A. $4 \leq m < 7$ B. $4 < m < 7$ C. $4 \leq m \leq 7$ D. $4 < m \leq 7$

【分析】 先解出不等式，然后根据最小整数解为 2 得出关于 m 的不等式组，解之即可求得 m 的取值范围.

【解答】 解：解不等式 $3x - m + 1 > 0$ ，得： $x > \frac{m-1}{3}$,

$\because$ 不等式有最小整数解 2,

$$\therefore 1 \leq \frac{m-1}{3} < 2,$$

解得： $4 \leq m < 7$,

故选：A.

【点评】 本题考查了一元一次不等式的整数解，正确解不等式，求出解集是解答本题的关键. 解不等式应根据不等式的基本性质.

8. (3分) 甲、乙两名同学分别进行 6 次射击训练，训练成绩 (单位：环) 如下表

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次
甲	9	8	6	7	8	10
乙	8	7	9	7	8	8

对他们的训练成绩作如下分析，其中说法正确的是 ()

A. 他们训练成绩的平均数相同 B. 他们训练成绩的中位数不同

C. 他们训练成绩的众数不同 D. 他们训练成绩的方差不同

【分析】利用方差的定义、以及众数和中位数的定义分别计算得出答案.

【解答】解：∵甲 6 次射击的成绩从小到大排列为 6、7、8、8、9、10，

∴甲成绩的平均数为 $\frac{6+7+8+8+9+10}{6}=8$ (环)，中位数为 $\frac{8+8}{2}=8$ (环)、众数为 8 环，

方差为 $\frac{1}{6} \times [(6-8)^2 + (7-8)^2 + 2 \times (8-8)^2 + (9-8)^2 + (10-8)^2] = \frac{5}{3}$ (环²),

∵乙 6 次射击的成绩从小到大排列为：7、7、8、8、8、9，

∴乙成绩的平均数为 $\frac{7+7+8+8+8+9}{6} = \frac{47}{6}$ ，中位数为 $\frac{8+8}{2}=8$ (环)、众数为 8 环，

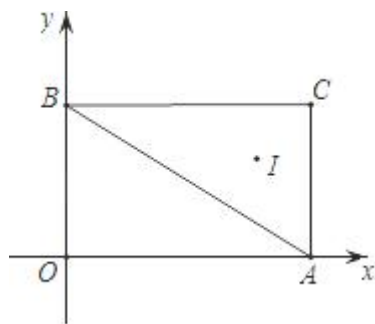
方差为 $\frac{1}{6} \times [2 \times (7 - \frac{47}{6})^2 + 3 \times (8 - \frac{47}{6})^2 + (9 - \frac{47}{6})^2] = \frac{17}{36}$ (环²),

则甲、乙两人的平均成绩不相同、中位数和众数均相同，而方差不相同，

故选：D.

【点评】此题主要考查了中位数以及方差以及众数的定义等知识，正确掌握相关定义是解题关键.

9. (3 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，A (4, 0)，B (0, 3)，C (4, 3)，I 是△ABC 的内心，将△ABC 绕原点逆时针旋转 90° 后，I 的对应点 I' 的坐标为 ()



A. (-2, 3) B. (-3, 2) C. (3, -2) D. (2, -3)

【分析】直接利用直角三角形的性质得出其内切圆半径，进而得出 I 点坐标，再利用旋转的性质得出对应点坐标.

【解答】解：过点作 IF ⊥ AC 于点 F，IE ⊥ OA 于点 E，

∵A (4, 0)，B (0, 3)，C (4, 3)，

∴BC=4，AC=3，

则 AB=5，

∵I 是△ABC 的内心，

$\therefore I$ 到 $\triangle ABC$ 各边距离相等，等于其内切圆的半径，

$\therefore IF=1$ ，故 I 到 BC 的距离也为 1，

则 $AE=1$ ，

故 $IE=3-1=2$ ，

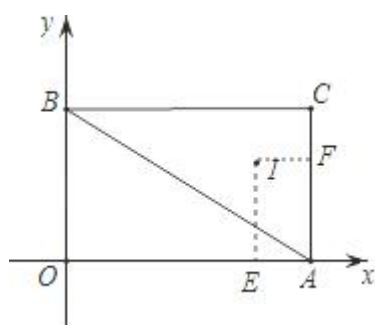
$OE=4-1=3$ ，

则 $I(3, 2)$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 绕原点逆时针旋转 90° ，

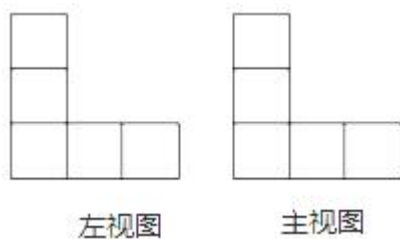
$\therefore I$ 的对应点 I' 的坐标为： $(-2, 3)$ 。

故选：A.



【点评】此题主要考查了旋转的性质以及直角三角形的性质，得出其内切圆半径是解题关键.

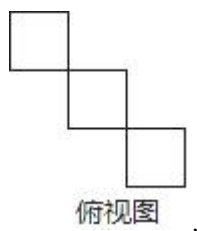
10. (3分) 某几何体由若干大小相同的小正方体搭成，其主视图与左视图如图所示，则搭成这个几何体的小正方体最少有 ()



A. 4个 B. 5个 C. 6个 D. 7个

【分析】由主视图和左视图确定俯视图的形状，再判断最少的小正方体的个数.

【解答】解：由主视图和左视图可确定所需正方体个数最少时俯视图为：

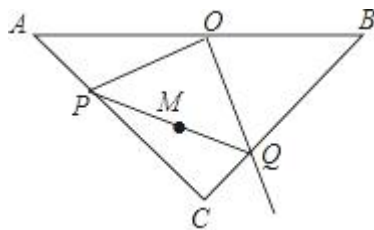


则搭成这个几何体的小正方体最少有 5 个.

故选: B.

【点评】此题主要考查了由三视图判断几何体, 根据主视图和左视图画出所需正方体个数最少的俯视图是关键.

11. (3 分) 如图, 等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 斜边 AB 的长为 2, O 为 AB 的中点, P 为 AC 边上的动点, $OQ \perp OP$ 交 BC 于点 Q , M 为 PQ 的中点, 当点 P 从点 A 运动到点 C 时, 点 M 所经过的路线长为 ()



- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ C. 1 D. 2

【分析】连接 OC , 作 $PE \perp AB$ 于 E , $MH \perp AB$ 于 H , $QF \perp AB$ 于 F , 如图, 利用等腰直角三角形的性质得 $AC=BC=\sqrt{2}$, $\angle A=\angle B=45^\circ$, $OC \perp AB$, $OC=OA=OB=1$, $\angle OCB=45^\circ$, 再证明 $\text{Rt}\triangle AOP \cong \triangle COQ$ 得到 $AP=CQ$, 接着利用 $\triangle APE$ 和 $\triangle BFQ$ 都为等腰直角三角形得到 $PE=\frac{\sqrt{2}}{2}AP=\frac{\sqrt{2}}{2}CQ$, $QF=\frac{\sqrt{2}}{2}BQ$, 所以 $PE+QF=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=1$, 然后证明 MH 为梯形 $PEFQ$ 的中位线得到 $MH=\frac{1}{2}$, 即可判定点 M 到 AB 的距离为 $\frac{1}{2}$, 从而得到点 M 的运动路线为 $\triangle ABC$ 的中位线, 最后利用三角形中位线性质的得到点 M 所经过的路线长.

【解答】解: 连接 OC , 作 $PE \perp AB$ 于 E , $MH \perp AB$ 于 H , $QF \perp AB$ 于 F , 如图,

$\because \triangle ACB$ 为到等腰直角三角形,

$$\therefore AC=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}, \quad \angle A=\angle B=45^\circ,$$

$\because O$ 为 AB 的中点,

$\therefore OC \perp AB$, OC 平分 $\angle ACB$, $OC=OA=OB=1$,

$\therefore \angle OCB=45^\circ$,

$\because \angle POQ=90^\circ$, $\angle COA=90^\circ$,

$\therefore \angle AOP=\angle COQ$,

在 $\text{Rt}\triangle AOP$ 和 $\triangle COQ$ 中

$$\begin{cases} \angle A = \angle OCQ \\ AO = CO \\ \angle AOP = \angle COQ \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt} \triangle AOP \cong \triangle COQ,$

$\therefore AP = CQ,$

易得 $\triangle APE$ 和 $\triangle BFQ$ 都为等腰直角三角形,

$$\therefore PE = \frac{\sqrt{2}}{2} AP = \frac{\sqrt{2}}{2} CQ, \quad QF = \frac{\sqrt{2}}{2} BQ,$$

$$\therefore PE + QF = \frac{\sqrt{2}}{2} (CQ + BQ) = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1,$$

$\therefore M$ 点为 PQ 的中点,

$\therefore MH$ 为梯形 $PEFQ$ 的中位线,

$$\therefore MH = \frac{1}{2} (PE + QF) = \frac{1}{2},$$

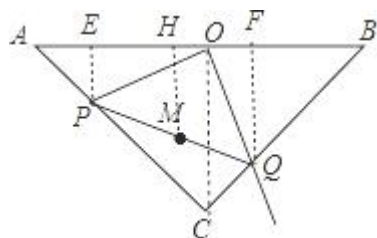
即点 M 到 AB 的距离为 $\frac{1}{2}$,

而 $CO = 1$,

$\therefore$ 点 M 的运动路线为 $\triangle ABC$ 的中位线,

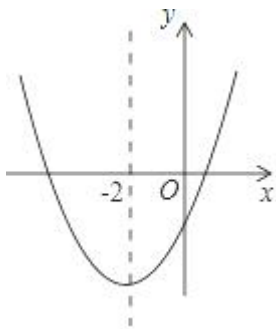
$\therefore$ 当点 P 从点 A 运动到点 C 时, 点 M 所经过的路线长 $= \frac{1}{2} AB = 1$.

故选: C.



【点评】 本题考查了轨迹: 通过计算确定动点在运动过程中不变的量, 从而得到运动的轨迹. 也考查了等腰直角三角形的性质.

12. (3 分) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的大致图象如图所示, 顶点坐标为 $(-2, -9a)$, 下列结论: ① $4a + 2b + c > 0$; ② $5a - b + c = 0$; ③ 若方程 $a(x+5)(x-1) = -1$ 有两个根 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $-5 < x_1 < x_2 < 1$; ④ 若方程 $|ax^2 + bx + c| = 1$ 有四个根, 则这四个根的和为 -4 . 其中正确的结论有 ()



A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【分析】根据二次函数的性质一一判断即可.

【解答】解: $\because$ 抛物线的顶点坐标 $(-2a, -9a)$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -2a, \frac{4ac-b^2}{4a} = -9a,$$

$$\therefore b=4a, c=5a,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y=ax^2+4ax-5a,$$

$$\therefore 4a+2b+c=4a+8a-5a=7a>0, \text{ 故①正确,}$$

$$5a-b+c=5a-4a-5a=-4a<0, \text{ 故②错误,}$$

$$\therefore \text{抛物线 } y=ax^2+4ax-5a \text{ 交 } x \text{ 轴于 } (-5, 0), (1, 0),$$

$\therefore$ 若方程 $a(x+5)(x-1)=-1$ 有两个根 x_1 和 x_2 , 且 $x_1<x_2$, 则 $-5<x_1<x_2<1$, 正确, 故③正确,

若方程 $ax^2+bx+c=1$ 有四个根, 则这四个根的和为 -8 , 故④错误,

故选: B.

【点评】本题考查二次函数的性质、二次函数图象上的点的特征、抛物线与坐标轴的交点问题等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 属于中考常考题型.

二、填空题 (每题 3 分, 满分 15 分, 将答案填在答题纸上)

13. (3 分) 计算: $\sqrt{(-2)^2} \times 2^{-2} - |\sqrt{3} \tan 30^\circ - 3| + 2018^0 = -\frac{1}{2}$.

【分析】直接利用二次根式的性质结合绝对值的性质以及特殊角的三角函数值分别化简得出答案.

【解答】解: 原式 $= 2 \times \frac{1}{4} - |\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 3| + 1$
 $= \frac{1}{2} - 2 + 1$

$$= -\frac{1}{2}.$$

故答案为: $-\frac{1}{2}$.

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

14. (3分) 已知 $x=2$ 是关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + (k^2 - 2)x + 2k + 4 = 0$ 的一个根，则 k 的值为 -3.

【分析】把 $x=2$ 代入 $kx^2 + (k^2 - 2)x + 2k + 4 = 0$ 得 $4k + 2k^2 - 4 + 2k + 4 = 0$ ，再解关于 k 的方程，然后根据一元二次方程的定义确定 k 的值.

【解答】解：把 $x=2$ 代入 $kx^2 + (k^2 - 2)x + 2k + 4 = 0$ 得 $4k + 2k^2 - 4 + 2k + 4 = 0$ ，
整理得 $k^2 + 3k = 0$ ，解得 $k_1 = 0$ ， $k_2 = -3$ ，

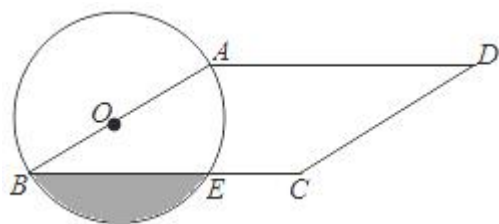
因为 $k \neq 0$ ，

所以 k 的值为 -3 .

故答案为 -3 .

【点评】本题考查了一元二次方程的解：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解.

15. (3分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB < AD$ ， $\angle D = 30^\circ$ ， $CD = 4$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 E ，则阴影部分的面积为 $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$.



【分析】连接半径和弦 AE ，根据直径所对的圆周角是直角得： $\angle AEB = 90^\circ$ ，可得 AE 和 BE 的长，所以图中弓形的面积为扇形 OBE 的面积与 $\triangle OBE$ 面积的差，因为 $OA = OB$ ，所以 $\triangle OBE$ 的面积是 $\triangle ABE$ 面积的一半，可得结论.

【解答】解：连接 OE 、 AE ，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB=CD=4, \angle B=\angle D=30^\circ,$$

$$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=2, BE=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3},$$

$$\therefore OA=OB=OE,$$

$$\therefore \angle B=\angle OEB=30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOE=120^\circ,$$

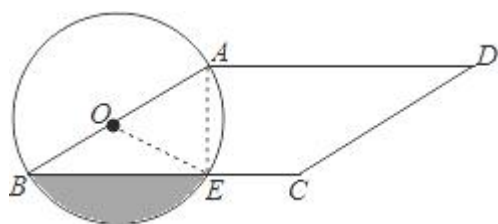
$$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形 OBE}}-S_{\triangle BOE},$$

$$=\frac{120\pi \times 2^2}{360}-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} AE \cdot BE,$$

$$=\frac{4\pi}{3}-\frac{1}{4} \times 2 \times 2\sqrt{3},$$

$$=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3},$$

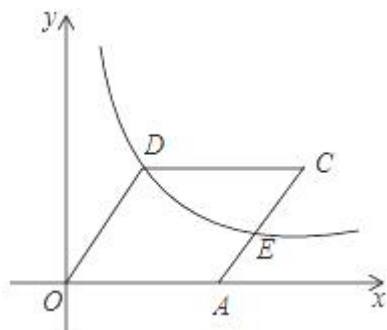
$$\text{故答案为: } \frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.$$



【点评】本题考查了扇形的面积计算、平行四边形的性质，直角三角形中30度角等知识点，能求出扇形OBE的面积和 $\triangle ABE$ 的面积是解此题的关键.

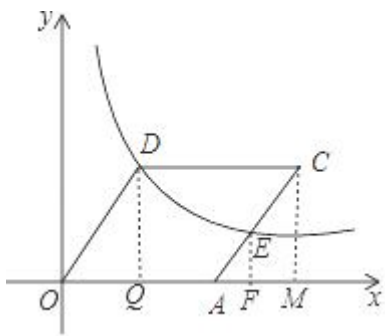
16. (3分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0, x>0$) 的图象经过菱形 $OACD$

的顶点 D 和边 AC 的中点 E ，若菱形 $OACD$ 的边长为3，则 k 的值为 $2\sqrt{5}$.



【分析】过 D 作 $DQ \perp x$ 轴于 Q ，过 C 作 $CM \perp x$ 轴于 M ，过 E 作 $EF \perp x$ 轴于 F ，设 D 点的坐标为 (a, b) ，求出 C 、 E 的坐标，代入函数解析式，求出 a ，再根据勾股定理求出 b ，即可请求出答案.

【解答】解：过 D 作 $DQ \perp x$ 轴于 Q，过 C 作 $CM \perp x$ 轴于 M，过 E 作 $EF \perp x$ 轴于 F，



设 D 点的坐标为 (a, b) 则 C 点的坐标为 $(a+3, b)$,

$\because E$ 为 AC 的中点,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}b, \quad AF = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}OQ = \frac{1}{2}a,$$

E 点的坐标为 $(3 + \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b)$,

把 D、E 的坐标代入 $y = \frac{k}{x}$ 得: $k = ab = (3 + \frac{1}{2}a) \cdot \frac{1}{2}b$,

解得: $a = 2$,

在 $Rt\triangle DQO$ 中, 由勾股定理得: $a^2 + b^2 = 3^2$,

即 $2^2 + b^2 = 9$,

解得: $b = \sqrt{5}$ (负数舍去),

$$\therefore k = ab = 2\sqrt{5},$$

故答案为: $2\sqrt{5}$.

【点评】本题考查了勾股定理、反比例函数图象上点的坐标特征、菱形的性质等知识点, 能得出关于 a 、 b 的方程是解此题的关键.

17. (3 分) 将数 1 个 1, 2 个 $\frac{1}{2}$, 3 个 $\frac{1}{3}$, $\dots$, n 个 $\frac{1}{n}$ (n 为正整数) 顺次排成一列: 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots$, 记 $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{2}, \dots$, $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 则 $S_{2018} = \frac{63}{32}$.

【分析】由 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 结合 $\frac{63 \times 64}{2} + 2 = 2018$, 可得出前 2018 个数里面包含: 1 个 1, 2 个 $\frac{1}{2}$, 3 个 $\frac{1}{3}$, $\dots$, 63 个 $\frac{1}{63}$, 2 个 $\frac{1}{64}$, 进而可得出 $S_{2018} = 1 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \dots + 63 \times \frac{1}{63} + 2 \times \frac{1}{64} = \frac{63}{32}$, 此题得解.

【解答】解：∵ $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{63 \times 64}{2}+2=2018$,

∴ 前 2018 个数里面包含：1 个 1, 2 个 $\frac{1}{2}$, 3 个 $\frac{1}{3}$, ..., 63 个 $\frac{1}{63}$, 2 个 $\frac{1}{64}$,

∴ $S_{2018}=1 \times 1+2 \times \frac{1}{2}+3 \times \frac{1}{3}+\cdots+63 \times \frac{1}{63}+2 \times \frac{1}{64}=1+1+\cdots+1+\frac{1}{32}=\frac{63}{32}$.

故答案为： $\frac{63}{32}$.

【点评】本题考查了规律型中数字的变化类，根据数列中数的排列规律找出“前 2018 个数里面包含：1 个 1, 2 个 $\frac{1}{2}$, 3 个 $\frac{1}{3}$, ..., 63 个 $\frac{1}{63}$, 2 个 $\frac{1}{64}$ ”是解题的关键.

三、解答题（本大题共 7 小题，共 69 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

18. (8 分) 先化简，再求值： $(x+2+\frac{3x+4}{x-2}) \div \frac{x^2+6x+9}{x-2}$ ，其中 $x=2\sqrt{3}$.

【分析】先根据分式混合运算顺序和运算法则化简原式，再将 x 的值代入计算可得.

【解答】解：原式 $= (\frac{x^2-4}{x-2}+\frac{3x+4}{x-2}) \div \frac{(x+3)^2}{x-2}$

$$= \frac{x^2+3x}{x-2} \cdot \frac{x-2}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{x(x+3)}{x-2} \cdot \frac{x-2}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{x}{x+3},$$

当 $x=2\sqrt{3}$ 时,

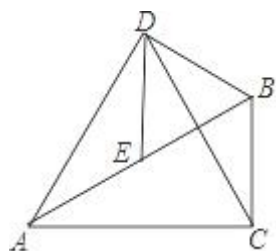
原式 $= \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = 2(2-\sqrt{3}) = 4-2\sqrt{3}$.

【点评】本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是熟练掌握分式混合运算顺序和运算法则.

19. (9 分) 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， (M_2, N_2) ， $\angle BAC=30^\circ$ ，E 为 AB 边的中点，以 BE 为边作等边 $\triangle BDE$ ，连接 AD，CD.

(1) 求证： $\triangle ADE \cong \triangle CDB$;

(2) 若 $BC=\sqrt{3}$ ，在 AC 边上找一点 H，使得 BH+EH 最小，并求出这个最小值.



【分析】(1) 只要证明 $\triangle DEB$ 是等边三角形，再根据SAS即可证明；

(2) 如图，作点E关于直线AC点E'，连接BE'交AC于点H. 则点H即为符合条件的点.

【解答】(1) 证明：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=30^\circ$ ，E为AB边的中点，

$$\therefore BC=EA, \angle ABC=60^\circ.$$

$\therefore \triangle DEB$ 为等边三角形，

$$\therefore DB=DE, \angle DEB=\angle DBE=60^\circ,$$

$$\therefore \angle DEA=120^\circ, \angle DBC=120^\circ,$$

$$\therefore \angle DEA=\angle DBC$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDB.$$

(2) 解：如图，作点E关于直线AC点E'，连接BE'交AC于点H.

则点H即为符合条件的点.

由作图可知： $EH=HE'$ ， $AE'=AE$ ， $\angle E'AC=\angle BAC=30^\circ$.

$$\therefore \angle EAE'=60^\circ,$$

$\therefore \triangle EAE'$ 为等边三角形，

$$\therefore EE'=EA=\frac{1}{2}AB,$$

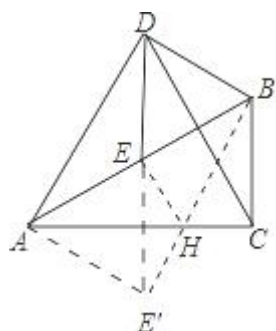
$$\therefore \angle AE'B=90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=30^\circ$ ， $BC=\sqrt{3}$,

$$\therefore AB=2\sqrt{3}, AE'=AE=\sqrt{3},$$

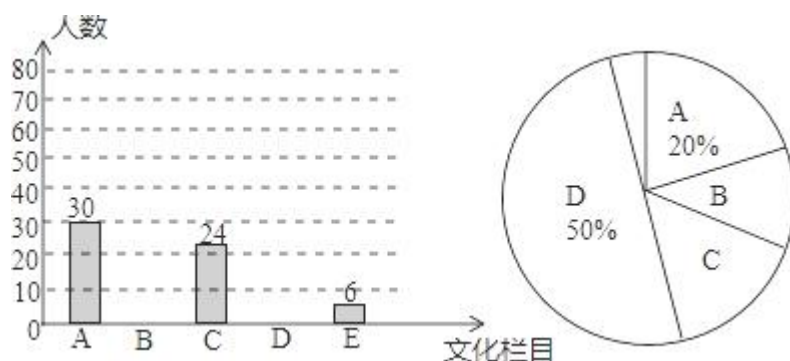
$$\therefore BE'=\sqrt{AB^2-AE'^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3,$$

$\therefore BH+EH$ 的最小值为3.



【点评】 本题考查轴对称最短问题、等边三角形的判定和性质、全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会利用轴对称解决最短问题，属于中考常考题型．

20. (10 分) 文化是一个国家、一个民族的灵魂，近年来，央视推出《中国诗词大会》、《中国成语大会》、《朗读者》、《经典咏流传》等一系列文化栏目．为了解学生对这些栏目的喜爱情况，某学校组织学生会成员随机抽取了部分学生进行调查，被调查的学生必须从《经典咏流传》(记为 A)、《中国诗词大会》(记为 B)、《中国成语大会》(记为 C)、《朗读者》(记为 D) 中选择自己最喜爱的一个栏目，也可以写出一个自己喜爱的其他文化栏目(记为 E)．根据调查结果绘制成如图所示的两幅不完整的统计图．



请根据图中信息解答下列问题：

- (1) 在这项调查中，共调查了多少名学生？
- (2) 将条形统计图补充完整，并求出扇形统计图中“B”所在扇形圆心角的度数；
- (3) 若选择“E”的学生中有 2 名女生，其余为男生，现从选择“E”的学生中随机选出两名学生参加座谈，请用列表法或画树状图的方法求出刚好选到同性别学生的概率．

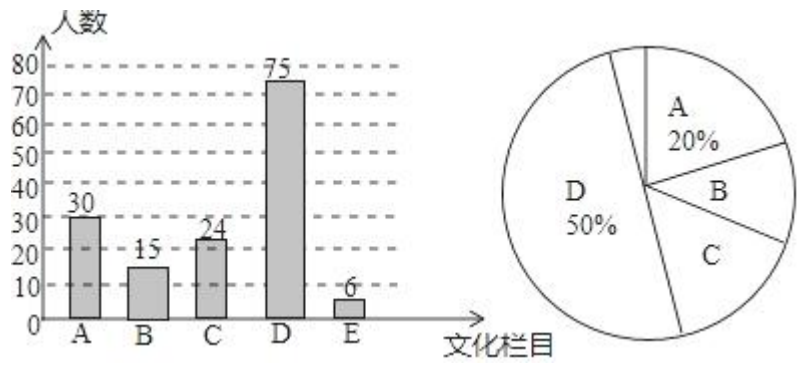
【分析】 (1) 由 A 栏目人数及其所占百分比可得总人数；
 (2) 总人数乘以 D 栏目所占百分比求得其人数，再用总人数减去其他栏目人数求得 B 的人数即可补全图形，用 360° 乘以 B 人数所占比例可得；
 (3) 列表得出所有等可能结果，然后利用概率的计算公式即可求解

【解答】解：(1) $30 \div 20\% = 150$ (人)，

$\therefore$ 共调查了 150 名学生.

(2) D: $50\% \times 150 = 75$ (人), B: $150 - 30 - 75 - 24 - 6 = 15$ (人)

补全条形图如图所示.



扇形统计图中“B”所在扇形圆心角的度数为 $\frac{15}{150} \times 360^\circ = 36^\circ$.

(3) 记选择“E”的同学中的 2 名女生分别为 N_1, N_2 , 4 名男生分别为 M_1, M_2, M_3, M_4 ,

列表如下:

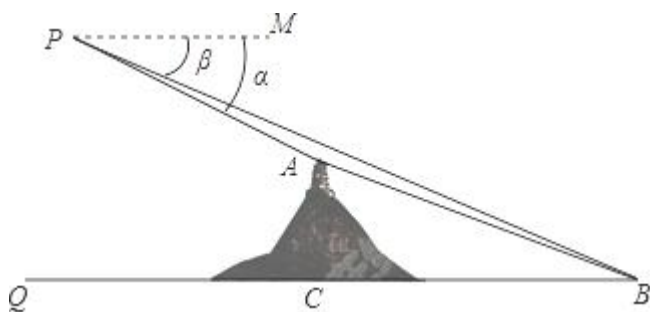
	N_1	N_2	M_1	M_2	M_3	M_4
N_1		(N_1, N_2)	(N_1, M_1)	(N_1, M_2)	(N_1, M_3)	(N_1, M_4)
N_2	(N_2, N_1)		(N_2, M_1)	(N_2, M_2)	(N_2, M_3)	(N_2, M_4)
M_1	(M_1, N_1)	(M_1, N_2)		(M_1, M_2)	(M_1, M_3)	(M_1, M_4)
M_2	(M_2, N_1)	(M_2, N_2)	(M_2, M_1)		(M_2, M_3)	(M_2, M_4)
M_3	(M_3, N_1)	(M_3, N_2)	(M_3, M_1)	(M_3, M_2)		(M_3, M_4)
M_4	(M_4, N_1)	(M_4, N_2)	(M_4, M_1)	(M_4, M_2)	(M_4, M_3)	

$\therefore$ 共有 30 种等可能的结果，其中，恰好是同性别学生（记为事件 F）的有 14 种情况，

$$\therefore P(F) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}.$$

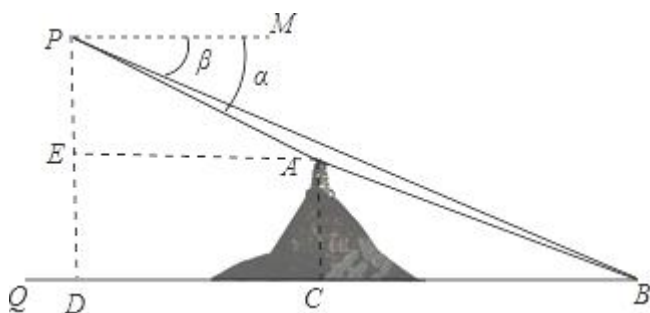
【点评】 本题考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力以及求随机事件的概率；利用统计图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能作出正确的判断和解决问题.

21. (10 分) 数学实践活动小组借助载有测角仪的无人机测量象山岚光阁与文明湖湖心亭之间的距离. 如图, 无人机所在位置 P 与岚光阁阁顶 A、湖心亭 B 在同一铅垂面内, P 与 B 的垂直距离为 300 米, A 与 B 的垂直距离为 150 米, 在 P 处测得 A、B 两点的俯角分别为 α 、 β , 且 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = \sqrt{2} - 1$, 试求岚光阁与湖心亭之间的距离 AB. (计算结果若含有根号, 请保留根号)



【分析】 过点 P 作 $PD \perp QB$ 于点 D, 过点 A 作 $AE \perp PD$ 于点 E, 利用直角三角形的性质和三角函数解答即可.

【解答】 解: 过点 P 作 $PD \perp QB$ 于点 D, 过点 A 作 $AE \perp PD$ 于点 E.



由题意得: $\angle PBD = \beta$, $\angle PAE = \alpha$, $AC = 150$, $PD = 300$,

$$\text{在 Rt}\triangle PBD \text{ 中, } BD = \frac{PD}{\tan \angle PBD} = \frac{300}{\tan \beta} = \frac{300}{\sqrt{2}-1} = 300(\sqrt{2}+1),$$

$$\because \angle AED = \angle EDC = \angle ACD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 EDCA 为矩形,

$$\therefore DC = EA, ED = AC = 150,$$

$$\therefore PE=PD-ED=300-150=150,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PEA \text{ 中, } EA=\frac{PE}{\tan\angle PAE}=\frac{150}{\tan\alpha}=\frac{150}{\frac{1}{2}}=300,$$

$$\therefore BC=BD-CD=BD-EA=300(\sqrt{2}+1)-300=300\sqrt{2}$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACB \text{ 中, } AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{150^2+(300\sqrt{2})^2}=450 \text{ (米)}$$

答: 岚光阁与湖心亭之间的距离 AB 为 450 米.

【点评】 此题考查了俯角的定义. 注意能借助俯角构造直角三角形并解直角三角形.

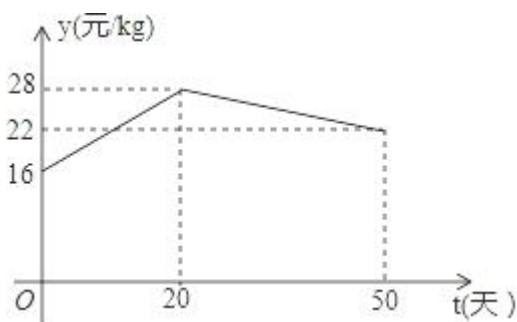
22. (10 分) 随着龙虾节的火热举办, 某龙虾养殖大户为了发挥技术优势, 一次性收购了 10000kg 小龙虾, 计划养殖一段时间后再出售. 已知每天养殖龙虾的成本相同, 放养 10 天的总成本为 166000, 放养 30 天的总成本为 178000 元. 设这批小龙虾放养 t 天后的质量为 a kg, 销售单价为 y 元/kg, 根据往年的行情预测, a 与 t 的函数关系为 $a=\begin{cases} 10000(0\leq t\leq 20) \\ 100t+8000(20<t\leq 50) \end{cases}$, y 与 t 的函数关系如图所示.

(1) 设每天的养殖成本为 m 元, 收购成本为 n 元, 求 m 与 n 的值;

(2) 求 y 与 P 的函数关系式;

(3) 如果将这批小龙虾放养 t 天后一次性出售所得利润为 W 元. 问该龙虾养殖大户将这批小龙虾放养多少天后一次性出售所得利润最大? 最大利润是多少?

(总成本=放养总费用+收购成本; 利润=销售总额-总成本)



【分析】 (1) 根据题意列出方程组, 求出方程组的解得到 m 与 n 的值即可;

(2) 根据图象, 分类讨论利用待定系数法求出 y 与 P 的解析式即可;

(3) 根据 $W=ya-mt-n$, 表示出 W 与 t 的函数解析式, 利用一次函数与二次函数的性质求出所求即可.

【解答】 解: (1) 依题意得
$$\begin{cases} 10m+n=166000 \\ 30m+n=178000 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m=600 \\ n=160000 \end{cases};$$

(2) 当 $0 \leq t \leq 20$ 时, 设 $y=k_1t+b_1$,

$$\text{由图象得: } \begin{cases} b_1=16 \\ 20k_1+b_1=28 \end{cases};$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1=\frac{3}{5} \\ b_1=16 \end{cases}$$

$$\therefore y=\frac{3}{5}t+16;$$

当 $20 < t \leq 50$ 时, 设 $y=k_2t+b_2$,

$$\text{由图象得: } \begin{cases} 20k_2+b_2=28 \\ 50k_2+b_2=22 \end{cases};$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_2=-\frac{1}{5} \\ b_2=32 \end{cases},$$

$$\therefore y=-\frac{1}{5}t+32,$$

$$\text{综上, } y=\begin{cases} \frac{3}{5}t+16 & (0 \leq t \leq 20) \\ -\frac{1}{5}t+32 & (20 < t \leq 50) \end{cases};$$

$$(3) W=ya - mt - n,$$

$$\text{当 } 0 \leq t \leq 20 \text{ 时, } W=10000 \left(\frac{3}{5}t+16\right) - 600t - 160000=5400t,$$

$$\therefore 5400 > 0,$$

$$\therefore \text{当 } t=20 \text{ 时, } W_{\text{最大}}=5400 \times 20=108000,$$

$$\text{当 } 20 < t \leq 50 \text{ 时, } W=\left(-\frac{1}{5}t+32\right)(100t+8000) - 600t - 160000=-20t^2+1000t+96000=-20$$

$$(t-25)^2+108500,$$

$$\therefore -20 < 0, \text{ 抛物线开口向下,}$$

$$\therefore \text{当 } t=25, W_{\text{最大}}=108500,$$

$$\therefore 108500 > 108000,$$

$$\therefore \text{当 } t=25 \text{ 时, } W \text{ 取得最大值, 该最大值为 } 108500 \text{ 元.}$$

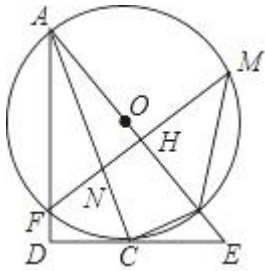
【点评】此题考查了二次函数的应用, 待定系数法确定函数解析式, 熟练掌握二次函数的性

质是解本题的关键.

23. (10 分) 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, 经过点 C 的切线交 AB 的延长线于点 E, $AD \perp EC$ 交 EC 的延长线于点 D, AD 交 $\odot O$ 于 F, $FM \perp AB$ 于 H, 分别交 $\odot O$ 、AC 于 M、N, 连接 MB, BC.

(1) 求证: AC 平分 $\angle DAE$;

(2) 若 $\cos M = \frac{4}{5}$, $BE=1$, ①求 $\odot O$ 的半径; ②求 FN 的长.



【分析】 (1) 连接 OC, 如图, 利用切线的性质得 $OC \perp DE$, 则判断 $OC \parallel AD$ 得到 $\angle 1 = \angle 3$, 加上 $\angle 2 = \angle 3$, 从而得到 $\angle 1 = \angle 2$;

(2) ①利用圆周角定理和垂径定理得到 $\widehat{CF} = \widehat{BC}$, 则 $\angle COE = \angle FAB$, 所以 $\angle FAB = \angle M = \angle COE$, 设 $\odot O$ 的半径为 r , 然后在 $Rt\triangle OCE$ 中利用余弦的定义得到 $\frac{r}{r+1} = \frac{4}{5}$, 从而解方程求出 r 即可;

②连接 BF, 如图, 先在 $Rt\triangle AFB$ 中利用余弦定义计算出 $AF = \frac{32}{5}$, 再计算出 $OC=3$, 接着证明 $\triangle AFN \sim \triangle AEC$, 然后利用相似比可计算出 FN 的长.

【解答】 (1) 证明: 连接 OC, 如图,

$\because$ 直线 DE 与 $\odot O$ 相切于点 C,

$\therefore OC \perp DE$,

又 $\because AD \perp DE$,

$\therefore OC \parallel AD$.

$\therefore \angle 1 = \angle 3$

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore AC$ 平分 $\angle DAE$;

(2) 解: ① $\because$ AB 为直径,

$$\therefore \angle AFB=90^{\circ},$$

而 $DE \perp AD$,

$$\therefore BF \parallel DE,$$

$$\therefore OC \perp BF,$$

$$\therefore \widehat{CF} = \widehat{BC},$$

$$\therefore \angle COE = \angle FAB,$$

而 $\angle FAB = \angle M$,

$$\therefore \angle COE = \angle M,$$

设 $\odot O$ 的半径为 r ,

$$\text{在 Rt}\triangle OCE \text{ 中, } \cos \angle COE = \frac{OC}{OE} = \frac{4}{5}, \text{ 即 } \frac{r}{r+1} = \frac{4}{5}, \text{ 解得 } r=4,$$

即 $\odot O$ 的半径为 4;

②连接 BF, 如图,

$$\text{在 Rt}\triangle AFB \text{ 中, } \cos \angle FAB = \frac{AF}{AB},$$

$$\therefore AF = 8 \times \frac{4}{5} = \frac{32}{5}$$

在 $\text{Rt}\triangle OCE$ 中, $OE=5$, $OC=4$,

$$\therefore CE=3,$$

$$\therefore AB \perp FM,$$

$$\therefore \widehat{AM} = \widehat{AF},$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 4,$$

$$\therefore FB \parallel DE,$$

$$\therefore \angle 5 = \angle E = \angle 4,$$

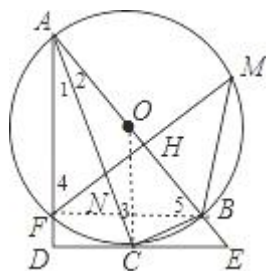
$$\therefore \widehat{CF} = \widehat{BC},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \triangle AFN \sim \triangle AEC,$$

$$\therefore \frac{FN}{CE} = \frac{AF}{AE}, \text{ 即 } \frac{FN}{3} = \frac{\frac{32}{5}}{9},$$

$$\therefore FN = \frac{32}{15}.$$



【点评】 本题考查了切线的性质：圆的切线垂直于经过切点的半径．若出现圆的切线，必连过切点的半径，构造定理图，得出垂直关系．也考查了垂径定理、圆周角定理和相似三角形的判定与性质．

24. (12 分) 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于原点及点 A，且经过点 B (4, 8)，对称轴为直线 $x=-2$ ．

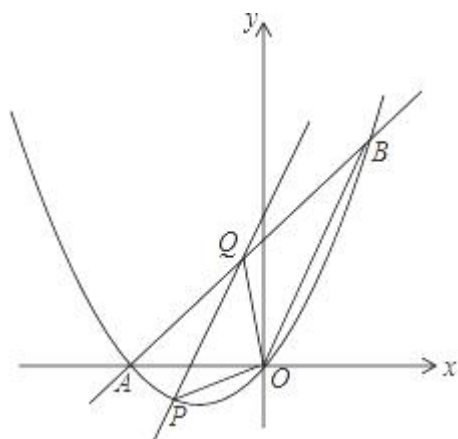
(1) 求抛物线的解析式；

(2) 设直线 $y=kx+4$ 与抛物线两交点的横坐标分别为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)，当 $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2}$ 时，

求 k 的值；

(3) 连接 OB，点 P 为 x 轴下方抛物线上一动点，过点 P 作 OB 的平行线交直线 AB 于点 Q，当 $S_{\triangle POQ} : S_{\triangle BOQ} = 1 : 2$ 时，求出点 P 的坐标．

(坐标平面内两点 M (x_1, y_1), N (x_2, y_2) 之间的距离 $MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$)



【分析】 (1) 先利用对称轴公式得出 $b=4a$ ，进而利用待定系数法即可得出结论；

(2) 先利用根与系数的关系得出， $x_1+x_2=4(k-1)$ ， $x_1x_2=-16$ ，转化已知条件，代入即可得出结论；

(3) 先判断出 $OB=2PQ$ ，进而判断出点 C 是 OB 中点，再求出 AB 解析式，判断出 $PC \parallel AB$ ，

即可得出 PC 解析式，和抛物线解析式联立解方程组即可得出结论.

【解答】解：(1) 根据题意得，
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ 16a + 4b + c = 8 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 + x$;

(2) $\because$ 直线 $y = kx + 4$ 与抛物线两交点的横坐标分别为 x_1, x_2 ,

$$\therefore \frac{1}{4}x^2 + x = kx + 4,$$

$$\therefore x^2 - 4(k-1)x - 16 = 0,$$

根据根与系数的关系得， $x_1 + x_2 = 4(k-1)$ ， $x_1x_2 = -16$,

$$\therefore \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore 2(x_1 - x_2) = x_1x_2,$$

$$\therefore 4(x_1 - x_2)^2 = (x_1x_2)^2,$$

$$\therefore 4[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = (x_1x_2)^2,$$

$$\therefore 4[16(k-1)^2 + 64] = 16^2,$$

$$\therefore k = 1;$$

(3) 如图，取 OB 的中点 C，

$$\therefore BC = \frac{1}{2}OB,$$

$$\therefore B(4, 8),$$

$$\therefore C(2, 4),$$

$$\therefore PQ \parallel OB,$$

$\therefore$ 点 O 到 PQ 的距离等于点 O 到 OB 的距离，

$$\therefore S_{\triangle POQ} : S_{\triangle BOQ} = 1 : 2,$$

$$\therefore OB = 2PQ,$$

$$\therefore PQ = BC, \therefore PQ \parallel OB,$$

∴ 四边形 BCPQ 是平行四边形,

∴ PC // AB,

∴ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 + x$ ②,

令 $y=0$,

∴ $\frac{1}{4}x^2 + x = 0$,

∴ $x=0$ 或 $x=-4$,

∴ A (-4, 0),

∴ B (4, 8),

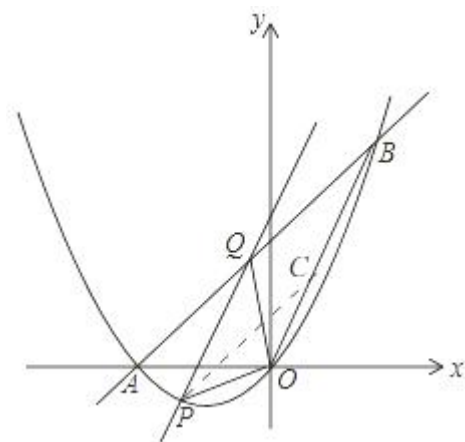
∴ 直线 AB 解析式为 $y=x+4$, 设直线 PC 的解析式为 $y=x+m$,

∴ C (2, 4),

∴ 直线 PC 的解析式为 $y=x+2$ ②,

联立①②解得, $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2}+2 \end{cases}$ (舍) 或 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2}+2 \end{cases}$,

∴ P $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}+2)$.



【点评】此题是二次函数综合题, 主要考查了待定系数法, 一元二次方程的根与系数的关系, 平行四边形的判定和性质, 等高的两三角形面积的比等于底的比, 判断出 $OB=2PQ$ 是解本题的关键.