

湖北省荆州市 2018 年中考数学真题试题

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题只有唯一正确答案，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3.00 分) 下列代数式中，整式为（ ）

A. $x+1$ B. $\frac{1}{x+1}$ C. $\sqrt{x^2+1}$ D. $\frac{x+1}{x}$

2. (3.00 分) 如图，两个实数互为相反数，在数轴上的对应点分别是点 A、点 B，则下列说法正确的是（ ）

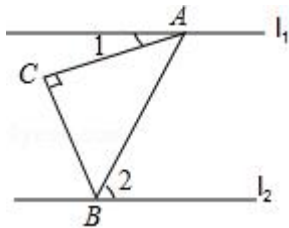


- A. 原点在点 A 的左边 B. 原点在线段 AB 的中点处
C. 原点在点 B 的右边 D. 原点可以在点 A 或点 B 上

3. (3.00 分) 下列计算正确的是（ ）

A. $3a^2 - 4a^2 = a^2$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ C. $a^{10} \div a^5 = a^2$ D. $(a^2)^3 = a^6$

4. (3.00 分) 如图，两条直线 $l_1 \parallel l_2$ ，Rt $\triangle ACB$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，顶点 A、B 分别在 l_1 和 l_2 上， $\angle 1 = 20^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是（ ）



- A. 45° B. 55° C. 65° D. 75°

5. (3.00 分) 解分式方程 $\frac{1}{x-2} - 3 = \frac{4}{2-x}$ 时，去分母可得（ ）

A. $1 - 3(x-2) = 4$ B. $1 - 3(x-2) = -4$ C. $-1 - 3(2-x) = -4$ D. $1 - 3(2-x) = 4$

6. (3.00 分) 《九章算术》是中国传统数学名著，其中记载：“今有牛五、羊二，直金十两；牛二、羊五，直金八两。问牛、羊各直金几何？”译文：“假设有 5 头牛，2 只羊，值金 10 两；2 头牛，5 只羊，值金 8 两。问每头牛、每只羊各值金多少两？”若设每头牛、每只羊分别值金 x 两、 y 两，则可列方程组为（ ）

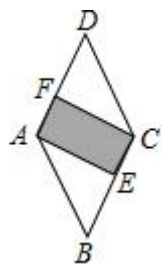
A. $\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+5y=8 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 5x-2y=10 \\ 2x-5y=8 \end{cases}$
C. $\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x-5y=8 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 5x+2y=8 \\ 2x+5y=10 \end{cases}$

7. (3.00 分) 已知：将直线 $y = x - 1$ 向上平移 2 个单位长度后得到直线 $y = kx + b$ ，则下列关于

直线 $y=kx+b$ 的说法正确的是 ()

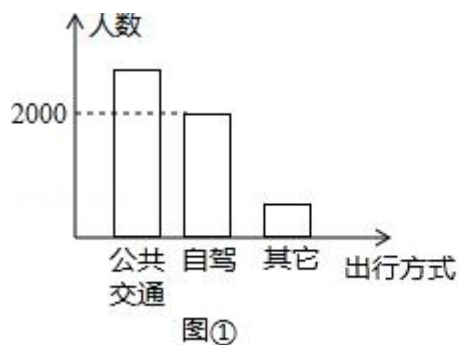
- A. 经过第一、二、四象限 B. 与 x 轴交于 $(1, 0)$
C. 与 y 轴交于 $(0, 1)$ D. y 随 x 的增大而减小

8. (3.00 分) 如图, 将一块菱形 $ABCD$ 硬纸片固定后进行投针训练. 已知纸片上 $AE \perp BC$ 于 E , $CF \perp AD$ 于 F , $\sin D = \frac{4}{5}$. 若随意投出一针命中了菱形纸片, 则命中矩形区域的概率是 ()

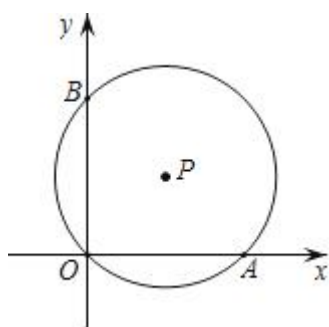


- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

9. (3.00 分) 荆州古城是闻名遐迩的历史文化名城, “五一”期间相关部门对到荆州观光游客的出行方式进行了随机抽样调查, 整理后绘制了两幅统计图 (尚不完整). 根据图中信息, 下列结论错误的是 ()



- A. 本次抽样调查的样本容量是 5000
B. 扇形图中的 m 为 10%
C. 样本中选择公共交通出行的有 2500 人
D. 若 “五一” 期间到荆州观光的游客有 50 万人, 则选择自驾方式出行的有 25 万人
10. (3.00 分) 如图, 平面直角坐标系中, $\odot P$ 经过三点 $A(8, 0)$, $O(0, 0)$, $B(0, 6)$, 点 D 是 $\odot P$ 上的一动点. 当点 D 到弦 OB 的距离最大时, $\tan \angle BOD$ 的值是 ()

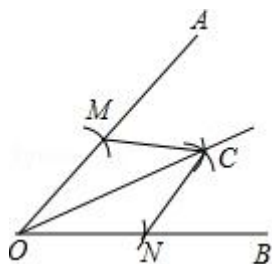


A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

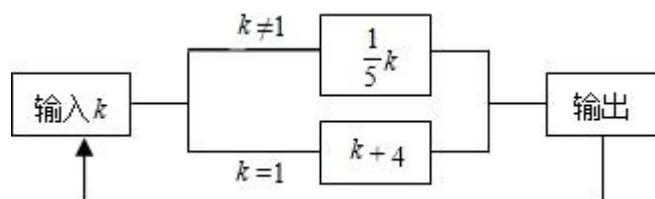
二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

11. (3.00 分) 计算： $| -2 | - \sqrt{4} + (\frac{1}{2})^{-1} + \tan 45^\circ =$ _____.

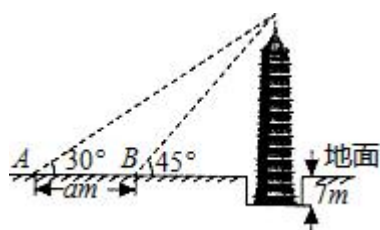
12. (3.00 分) 已知： $\angle AOB$ ，求作： $\angle AOB$ 的平分线. 作法：①以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 OA ， OB 于点 M ， N ；②分别以点 M ， N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在 $\angle AOB$ 内部交于点 C ；③画射线 OC . 射线 OC 即为所求. 上述作图用到了全等三角形的判定方法，这个方法是_____.



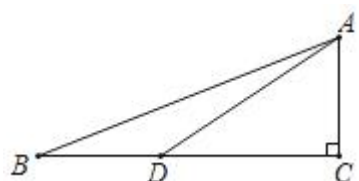
13. (3.00 分) 如图所示，是一个运算程序示意图. 若第一次输入 k 的值为 125，则第 2018 次输出的结果是_____.



14. (3.00 分) 荆州市滨江公园旁的万寿宝塔始建于明嘉靖年间，周边风景秀丽. 现在塔底低于地面约 7 米，某校学生测得古塔的整体高度约为 40 米. 其测量塔顶相对地面高度的过程如下：先在地面 A 处测得塔顶的仰角为 30° ，再向古塔方向行进 a 米后到达 B 处，在 B 处测得塔顶的仰角为 45° (如图所示)，那么 a 的值约为_____米 ($\sqrt{3} \approx 1.73$ ，结果精确到 0.1).

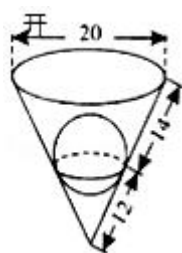


15. (3.00 分) 为了比较 $\sqrt{5}+1$ 与 $\sqrt{10}$ 的大小, 可以构造如图所示的图形进行推算, 其中 $\angle C=90^\circ$, $BC=3$, D 在 BC 上且 $BD=AC=1$. 通过计算可得 $\sqrt{5}+1$ _____ $\sqrt{10}$. (填“>”或“<”或“=”)

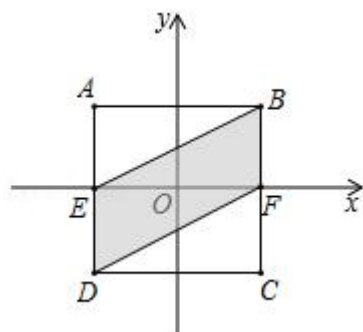


16. (3.00 分) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2kx + k^2 - k = 0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 = 4$, 则 $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ 的值是_____.

17. (3.00 分) 如图, 将钢球放置到一个倒立的空心透明圆锥中, 测得相关数据如图所示 (图中数据单位: cm), 则钢球的半径为_____cm (圆锥的壁厚忽略不计).



18. (3.00 分) 如图, 正方形 $ABCD$ 的对称中心在坐标原点, $AB \parallel x$ 轴, AD, BC 分别与 x 轴交于 E, F , 连接 BE, DF , 若正方形 $ABCD$ 有两个顶点在双曲线 $y = \frac{a+2}{x}$ 上, 实数 a 满足 $a^{3-a}=1$, 则四边形 $DEBF$ 的面积是_____.



三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 66 分)

19. (10.00 分) (1) 求不等式组 $\begin{cases} 2x-1 \geq x-2 \text{ ①} \\ x+\frac{1}{2} > 2(x-\frac{1}{4}) \text{ ②} \end{cases}$ 的整数解;

(2) 先化简, 后求值 $(1-\frac{a}{a+1}) \div \frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$, 其中 $a=\sqrt{2}+1$.

20. (8.00 分) 为了参加“荆州市中小学生首届诗词大会”, 某校八年级的两班学生进行了预选, 其中班上前 5 名学生的成绩 (百分制) 分别为: 八 (1) 班 86, 85, 77, 92, 85; 八 (2) 班 79, 85, 92, 85, 89. 通过数据分析, 列表如下:

班级	平均分	中位数	众数	方差
八 (1)	85	b	c	22.8
八 (2)	a	85	85	19.2

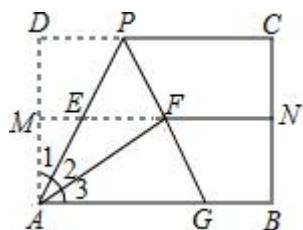
(1) 直接写出表中 a, b, c 的值;

(2) 根据以上数据分析, 你认为哪个班前 5 名同学的成绩较好? 说明理由.

21. (8.00 分) 如图, 对折矩形纸片 ABCD, 使 AB 与 DC 重合, 得到折痕 MN, 将纸片展平; 再一次折叠, 使点 D 落到 MN 上的点 F 处, 折痕 AP 交 MN 于 E; 延长 PF 交 AB 于 G. 求证:

(1) $\triangle AFG \cong \triangle AFP$;

(2) $\triangle APG$ 为等边三角形.



22. (8.00 分) 探究函数 $y=x+\frac{1}{x}$ ($x>0$) 与 $y=x+\frac{a}{x}$ ($x>0, a>0$) 的相关性质.

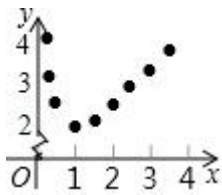
(1) 小聪同学对函数 $y=x+\frac{1}{x}$ ($x>0$) 进行了如下列表、描点, 请你帮他完成连线的步骤;

观察图象可得它的最小值为_____, 它的另一条性质为_____;

x	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	...
y	...	$\frac{17}{4}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{13}{6}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{29}{10}$	$\frac{10}{3}$	...

(2) 请用配方法求函数 $y=x+\frac{1}{x}$ ($x>0$) 的最小值;

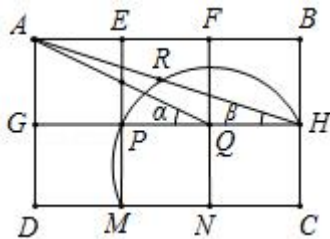
(3) 猜想函数 $y=x+\frac{a}{x}$ ($x>0, a>0$) 的最小值为_____.



23. (10.00 分) 问题: 已知 α 、 β 均为锐角, $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = \frac{1}{3}$, 求 $\alpha + \beta$ 的度数.

探究: (1) 用 6 个小正方形构造如图所示的网格图 (每个小正方形的边长均为 1), 请借助这个网格图求出 $\alpha + \beta$ 的度数;

延伸: (2) 设经过图中 M、P、H 三点的圆弧与 AH 交于 R, 求 $\widehat{MR}$ 的弧长.



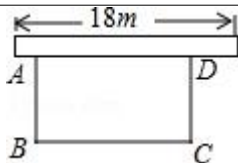
24. (10.00 分) 为响应荆州市“创建全国文明城市”号召, 某单位不断美化环境, 拟在一块矩形空地上修建绿色植物园, 其中一边靠墙, 可利用的墙长不超过 18m, 另外三边由 36m 长的栅栏围成. 设矩形 ABCD 空地中, 垂直于墙的边 $AB = xm$, 面积为 ym^2 (如图).

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;

(2) 若矩形空地的面积为 $160m^2$, 求 x 的值;

(3) 若该单位用 8600 元购买了甲、乙、丙三种绿色植物共 400 棵 (每种植物的单价和每棵栽种的合理用地面积如下表). 问丙种植物最多可以购买多少棵? 此时, 这批植物可以全部栽种到这块空地上吗? 请说明理由.

	甲	乙	丙
单价 (元/棵)	14	16	28
合理用地 (m^2 /棵)	0.4	1	0.4



25. (12.00 分) 阅读理解: 在平面直角坐标系中, 若两点 P、Q 的坐标分别是 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$, 则 P、Q 这两点间的距离为 $|PQ| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. 如 $P(1, 2)$, $Q(3, 4)$, 则 $|PQ| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}$.

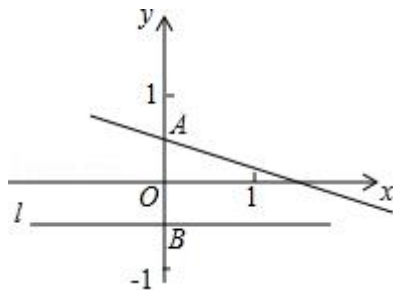
对于某种几何图形给出如下定义：符合一定条件的动点形成的图形，叫做符合这个条件的点的轨迹．如平面内到线段两个端点距离相等的点的轨迹是这条线段的垂直平分线．

解决问题：如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=kx+\frac{1}{2}$ 交 y 轴于点 A ，点 A 关于 x 轴的对称点为点 B ，过点 B 作直线 l 平行于 x 轴．

(1) 到点 A 的距离等于线段 AB 长度的点的轨迹是_____；

(2) 若动点 $C(x, y)$ 满足到直线 l 的距离等于线段 CA 的长度，求动点 C 轨迹的函数表达式；

问题拓展：(3) 若 (2) 中的动点 C 的轨迹与直线 $y=kx+\frac{1}{2}$ 交于 E 、 F 两点，分别过 E 、 F 作直线 l 的垂线，垂足分别是 M 、 N ，求证：① EF 是 $\triangle AMN$ 外接圆的切线；② $\frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}$ 为定值．



参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题只有唯一正确答案，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3.00 分) 下列代数式中，整式为（ ）

A. $x+1$ B. $\frac{1}{x+1}$ C. $\sqrt{x^2+1}$ D. $\frac{x+1}{x}$

【分析】直接利用整式、分式、二次根式的定义分析得出答案.

【解答】解：A、 $x+1$ 是整式，故此选项正确；

B、 $\frac{1}{x+1}$ ，是分式，故此选项错误；

C、 $\sqrt{x^2+1}$ 是二次根式，故此选项错误；

D、 $\frac{x+1}{x}$ ，是分式，故此选项错误；

故选：A.

【点评】此题主要考查了整式、分式、二次根式的定义，正确把握相关定义是解题关键.

2. (3.00 分) 如图，两个实数互为相反数，在数轴上的对应点分别是点 A、点 B，则下列说法正确的是（ ）



A. 原点在点 A 的左边 B. 原点在线段 AB 的中点处

C. 原点在点 B 的右边 D. 原点可以在点 A 或点 B 上

【分析】根据互为相反数的两个数，它们分别在原点两旁且到原点距离相等解答.

【解答】解： $\because$ 点 A、点 B 表示的两个实数互为相反数，

$\therefore$ 原点在到在线段 AB 上，且到点 A、点 B 的距离相等，

$\therefore$ 原点在线段 AB 的中点处，

故选：B.

【点评】本题考查的是实数与数轴、相反数的概念，掌握互为相反数的两个数，它们分别在原点两旁且到原点距离相等是解题的关键.

3. (3.00 分) 下列计算正确的是（ ）

A. $3a^2 - 4a^2 = a^2$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ C. $a^{10} \div a^5 = a^2$ D. $(a^2)^3 = a^6$

【分析】根据合并同类项法则，单项式的乘法运算法则，单项式的除法运算法则，对各选项

分析判断后利用排除法求解.

【解答】解: A、 $3a^2 - 4a^2 = -a^2$, 错误;

B、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 错误;

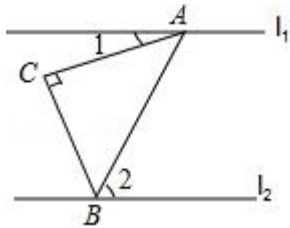
C、 $a^{10} \div a^5 = a^5$, 错误;

D、 $(a^2)^3 = a^6$, 正确;

故选: D.

【点评】本题考查了整式的除法, 单项式的乘法, 合并同类项法则, 是基础题, 熟记运算法则则是解题的关键.

4. (3.00 分) 如图, 两条直线 $l_1 \parallel l_2$, $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$, 顶点 A、B 分别在 l_1 和 l_2 上, $\angle 1 = 20^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是 ()



A. 45° B. 55° C. 65° D. 75°

【分析】根据平行线的性质和等腰直角三角形的性质解答即可.

【解答】解: $\because l_1 \parallel l_2$,

$\therefore \angle 1 + \angle CAB = \angle 2$,

$\because \text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$,

$\therefore \angle CAB = 45^\circ$,

$\therefore \angle 2 = 20^\circ + 45^\circ = 65^\circ$,

故选: C.

【点评】本题考查的是等腰直角三角形, 根据平行线的性质和等腰直角三角形的性质解答是解答此题的关键.

5. (3.00 分) 解分式方程 $\frac{1}{x-2} - 3 = \frac{4}{2-x}$ 时, 去分母可得 ()

A. $1 - 3(x-2) = 4$ B. $1 - 3(x-2) = -4$ C. $-1 - 3(2-x) = -4$ D. $1 - 3(2-x)$

$= 4$

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，即可作出判断.

【解答】解：去分母得： $1 - 3(x - 2) = -4$,

故选：B.

【点评】此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验.

6. (3.00 分)《九章算术》是中国传统数学名著，其中记载：“今有牛五、羊二，直金十两；牛二、羊五，直金八两. 问牛、羊各直金几何？”译文：“假设有 5 头牛，2 只羊，值金 10 两；2 头牛，5 只羊，值金 8 两. 问每头牛、每只羊各值金多少两？”若设每头牛、每只羊分别值金 x 两、 y 两，则可列方程组为 ()

A. $\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+5y=8 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 5x-2y=10 \\ 2x-5y=8 \end{cases}$
C. $\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x-5y=8 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 5x+2y=8 \\ 2x+5y=10 \end{cases}$

【分析】根据题意可以列出相应的方程组，从而可以解答本题.

【解答】解：由题意可得，

$$\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+5y=8 \end{cases},$$

故选：A.

【点评】本题考查由实际问题抽象出二元一次方程组，解答本题的关键是明确题意，列出相应的方程组.

7. (3.00 分) 已知：将直线 $y=x-1$ 向上平移 2 个单位长度后得到直线 $y=kx+b$ ，则下列关于直线 $y=kx+b$ 的说法正确的是 ()

- A. 经过第一、二、四象限 B. 与 x 轴交于 $(1, 0)$
C. 与 y 轴交于 $(0, 1)$ D. y 随 x 的增大而减小

【分析】利用一次函数图象的平移规律，左加右减，上加下减，得出即可.

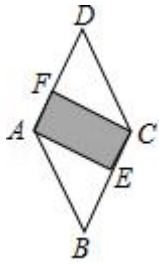
【解答】解：将直线 $y=x-1$ 向上平移 2 个单位长度后得到直线 $y=x-1+2=x+1$,

- A、直线 $y=x+1$ 经过第一、二、三象限，错误；
B、直线 $y=x+1$ 与 x 轴交于 $(-1, 0)$ ，错误；
C、直线 $y=x+1$ 与 y 轴交于 $(0, 1)$ ，正确；
D、直线 $y=x+1$ ， y 随 x 的增大而增大，错误；

故选：C.

【点评】此题主要考查了一次函数图象与几何变换，正确把握变换规律是解题关键.

8. (3.00 分) 如图，将一块菱形 ABCD 硬纸片固定后进行投针训练. 已知纸片上 $AE \perp BC$ 于 E, $CF \perp AD$ 于 F, $\sin D = \frac{4}{5}$. 若随意投出一针命中了菱形纸片，则命中矩形区域的概率是 ()



- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【分析】根据题意可以分别求得矩形的面积和菱形的面积，从而可以解答本题.

【解答】解：设 $CD=5a$,

$\because$ 四边形 ABCD 是菱形, $AE \perp BC$ 于 E, $CF \perp AD$ 于 F, $\sin D = \frac{4}{5}$,

$\therefore CF=4a$, $DF=3a$,

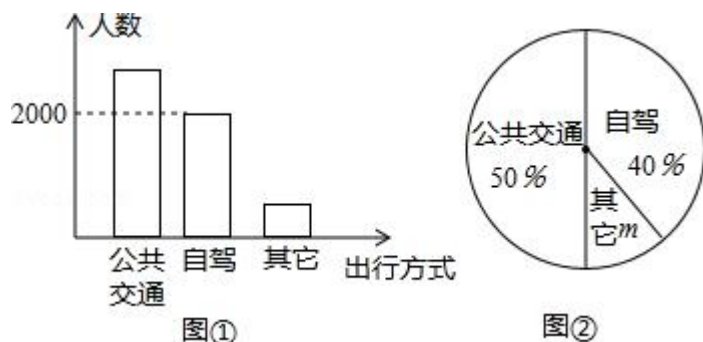
$\therefore AF=2a$,

$\therefore$ 命中矩形区域的概率是: $\frac{4a \cdot 2a}{5a \cdot 4a} = \frac{2}{5}$,

故选: B.

【点评】本题考查几何概率、菱形的性质、解直角三角形，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用数形结合的思想解答.

9. (3.00 分) 荆州古城是闻名遐迩的历史文化名城，“五一”期间相关部门对到荆州观光游客的出行方式进行了随机抽样调查，整理后绘制了两幅统计图（尚不完整）. 根据图中信息，下列结论错误的是 ()



- A. 本次抽样调查的样本容量是 5000
- B. 扇形图中的 m 为 10%
- C. 样本中选择公共交通出行的有 2500 人
- D. 若“五一”期间到荆州观光的游客有 50 万人，则选择自驾方式出行的有 25 万人

【分析】 结合条形图和扇形图，求出样本人数，进而进行解答.

【解答】 解：A、本次抽样调查的样本容量是 $\frac{2000}{40\%} = 5000$ ，正确；

B、扇形图中的 m 为 10%，正确；

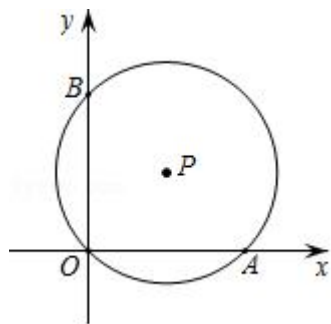
C、样本中选择公共交通出行的有 $5000 \times 50\% = 2500$ 人，正确；

D、若“五一”期间到荆州观光的游客有 50 万人，则选择自驾方式出行的有 $50 \times 40\% = 20$ 万人，错误；

故选：D.

【点评】 本题考查了频数分布直方图、扇形统计图，熟悉样本、用样本估计总体是解题的关键，另外注意学会分析图表.

10. (3.00 分) 如图，平面直角坐标系中， $\odot P$ 经过三点 A (8, 0)，O (0, 0)，B (0, 6)，点 D 是 $\odot P$ 上的一动点. 当点 D 到弦 OB 的距离最大时， $\tan \angle BOD$ 的值是 ()



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【分析】 直接连接 AB，过点 P 作 $PE \perp BO$ ，并延长 EP 交 $\odot P$ 于点 D，求出 $\odot P$ 的半径，进

而结合勾股定理得出答案.

【解答】解: 连接 AB, 过点 P 作 $PE \perp BO$, 并延长 EP 交 $\odot P$ 于点 D, 此时点 D 到弦 OB 的距离最大,

$$\because A(8, 0), B(0, 6),$$

$$\therefore AO=8, BO=6,$$

$$\because \angle BOA=90^\circ,$$

$$\therefore AB=\sqrt{8^2+6^2}=10, \text{ 则 } \odot P \text{ 的半径为 } 5,$$

$$\because PE \perp BO,$$

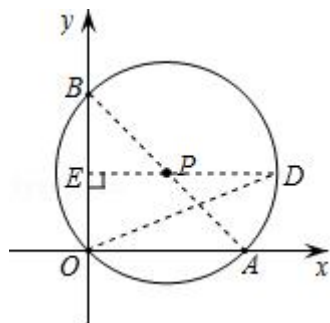
$$\therefore BE=EO=3,$$

$$\therefore PE=\sqrt{5^2-3^2}=4,$$

$$\therefore ED=9,$$

$$\therefore \tan \angle BOD = \frac{ED}{EO} = 3.$$

故选: B.



【点评】此题主要考查了圆周角定理以及勾股定理、解直角三角形等知识, 正确作出辅助线是解题关键.

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. (3.00 分) 计算: $|-2| - \sqrt{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \tan 45^\circ = \underline{3}$.

【分析】直接利用特殊角的三角函数值以及负指数幂的性质以及绝对值的性质分别化简得出答案.

【解答】解: $|-2| - \sqrt{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \tan 45^\circ$

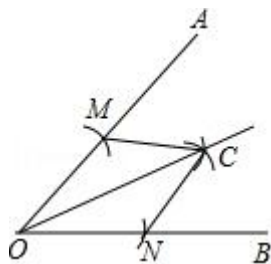
$$= 2 - 2 + 2 + 1$$

$$= 3.$$

故答案为：3.

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

12. (3.00 分) 已知： $\angle AOB$ ，求作： $\angle AOB$ 的平分线. 作法：①以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 OA ， OB 于点 M ， N ；②分别以点 M ， N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在 $\angle AOB$ 内部交于点 C ；③画射线 OC . 射线 OC 即为所求. 上述作图用到了全等三角形的判定方法，这个方法是 SSS.



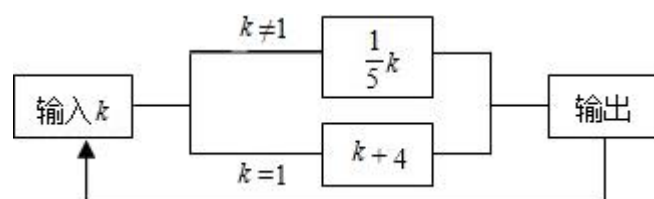
【分析】利用基本作图得到 $OM=ON$ ， $CM=CN$ ，加上公共边 OC ，则可根据 SSS 证明三角形全等.

【解答】解：由作法①知， $OM=ON$ ，
由作法②知， $CM=CN$ ，
 $\therefore OC=OC$ ，
 $\therefore \triangle OCM \cong \triangle OCN$ (SSS)，

故答案为：SSS.

【点评】本题考查了作图 - 基本作图：熟练掌握基本作图（作一条线段等于已知线段；作一个角等于已知角；作已知线段的垂直平分线；作已知角的角平分线；过一点作已知直线的垂线）. 也考查了全等三角形的判定.

13. (3.00 分) 如图所示，是一个运算程序示意图. 若第一次输入 k 的值为 125，则第 2018 次输出的结果是 5.



【分析】根据运算程序可找出前几次输出的结果，根据输出结果的变化找出变化规律“第

2n 次输出的结果是 5, 第 2n+1 次输出的结果是 1 (n 为正整数)”, 依此规律即可得出结论.

【解答】解: $\because$ 第 1 次输出的结果是 25, 第 2 次输出的结果是 5, 第 3 次输出的结果是 1, 第 4 次输出的结果是 5, 第 5 次输出的结果是 5, $\cdots$,

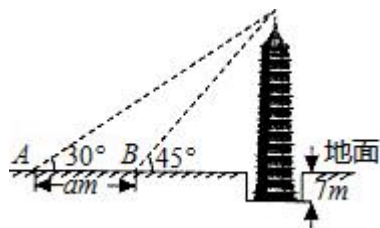
$\therefore$ 第 2n 次输出的结果是 5, 第 2n+1 次输出的结果是 1 (n 为正整数),

$\therefore$ 第 2018 次输出的结果是 5.

故答案为: 5.

【点评】 本题考查了代数式求值以及规律型中数字的变化类, 根据输出结果的变化找出变化规律是解题的关键.

14. (3.00 分) 荆州市滨江公园旁的万寿宝塔始建于明嘉靖年间, 周边风景秀丽. 现在塔底低于地面约 7 米, 某校学生测得古塔的整体高度约为 40 米. 其测量塔顶相对地面高度的过程如下: 先在地面 A 处测得塔顶的仰角为 30° , 再向古塔方向行进 a 米后到达 B 处, 在 B 处测得塔顶的仰角为 45° (如图所示), 那么 a 的值约为 24.1 米 ($\sqrt{3} \approx 1.73$, 结果精确到 0.1).



【分析】 设 CD 为塔身的高, 延长 AB 交 CD 于 E, 则 $CD=40$, $DE=7$, 进而得出 $BE=CE=33$, $AE=a+33$, 在 $Rt\triangle ACE$ 中, 依据 $\tan A = \frac{CE}{AE}$, 即可得到 a 的值.

【解答】 解: 如图, 设 CD 为塔身的高, 延长 AB 交 CD 于 E, 则 $CD=40$, $DE=7$,

$\therefore CE=33$,

$\because \angle CBE=45^\circ = \angle BCE$, $\angle CAE=30^\circ$,

$\therefore BE=CE=33$,

$\therefore AE=a+33$,

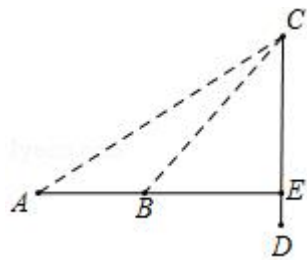
$\therefore \tan A = \frac{CE}{AE}$,

$\therefore \tan 30^\circ = \frac{33}{a+33}$, 即 $33\sqrt{3}=a+33$,

解得 $a=33(\sqrt{3}-1) \approx 24.1$,

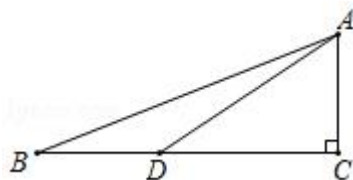
$\therefore$ a 的值约为 24.1 米,

故答案为：24.1.



【点评】此题考查了解直角三角形的应用，关键是根据在直角三角形中三角函数的定义列出算式，得出关于 a 的方程.

15. (3.00 分) 为了比较 $\sqrt{5}+1$ 与 $\sqrt{10}$ 的大小，可以构造如图所示的图形进行推算，其中 $\angle C=90^\circ$ ， $BC=3$ ， D 在 BC 上且 $BD=AC=1$. 通过计算可得 $\sqrt{5}+1$ > $\sqrt{10}$. (填 “>” 或 “<” 或 “=”)



【分析】依据勾股定理即可得到 $AD=\sqrt{CD^2+AC^2}=\sqrt{5}$ ， $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{10}$ ， $BD+AD=\sqrt{5}+1$ ，再根据 $\triangle ABD$ 中， $AD+BD>AB$ ，即可得到 $\sqrt{5}+1>\sqrt{10}$.

【解答】解： $\because \angle C=90^\circ$ ， $BC=3$ ， $BD=AC=1$ ，
 $\therefore CD=2$ ， $AD=\sqrt{CD^2+AC^2}=\sqrt{5}$ ， $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{10}$ ，
 $\therefore BD+AD=\sqrt{5}+1$ ，
 又 $\because \triangle ABD$ 中， $AD+BD>AB$ ，
 $\therefore \sqrt{5}+1>\sqrt{10}$ ，
 故答案为：>.

【点评】本题主要考查了三角形三边关系以及勾股定理的运用，解题时注意：三角形两边之和大于第三边.

16. (3.00 分) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2kx + k^2 - k = 0$ 的两个实数根分别是 x_1 、 x_2 ，且 $x_1^2 + x_2^2 = 4$ ，则 $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ 的值是 4.

【分析】根据根与系数的关系结合 $x_1+x_2=x_1 \cdot x_2$ 可得出关于 k 的一元二次方程，解之即可得出

k 的值，再根据方程有实数根结合根的判别式即可得出关于 k 的一元二次不等式，解之即可得出 k 的取值范围，从而可确定 k 的值.

【解答】解： $\because x^2 - 2kx + k^2 - k = 0$ 的两个实数根分别是 x_1 、 x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2k, \quad x_1 \cdot x_2 = k^2 - k,$$

$$\because x_1^2 + x_2^2 = 4,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4,$$

$$(2k)^2 - 2(k^2 - k) = 4,$$

$$2k^2 + 2k - 4 = 0,$$

$$k^2 + k - 2 = 0,$$

$$k = -2 \text{ 或 } 1,$$

$$\because \Delta = (-2k)^2 - 4 \times 1 \times (k^2 - k) \geq 0,$$

$$k \geq 0,$$

$$\therefore k = 1,$$

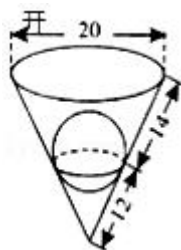
$$\therefore x_1 \cdot x_2 = k^2 - k = 0,$$

$$\therefore x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 4 - 0 = 4.$$

故答案为：4.

【点评】 本题考查了根的判别式以及根与系数的关系，熟练掌握“当一元二次方程有实数根时，根的判别式 $\Delta \geq 0$ ”是解题的关键.

17. (3.00 分) 如图，将钢球放置到一个倒立的空心透明圆锥中，测得相关数据如图所示（图中数据单位：cm），则钢球的半径为 $\frac{60}{13}$ cm（圆锥的壁厚忽略不计）.



【分析】 根据相似三角形的性质先求出钢球的直径，进一步得到钢球的半径.

【解答】解：钢球的直径： $\frac{12}{12+14} \times 20 = \frac{120}{13}$ (cm),

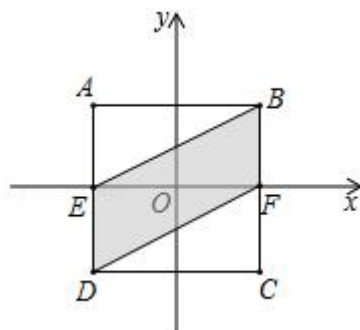
钢球的半径: $\frac{120}{13} \div 2 = \frac{60}{13}$ (cm).

答: 钢球的半径为 $\frac{60}{13}$ cm.

故答案为: $\frac{60}{13}$.

【点评】考查了圆锥的计算, 相似三角形的性质, 关键是求出钢球的直径.

18. (3.00 分) 如图, 正方形 ABCD 的对称中心在坐标原点, AB // x 轴, AD、BC 分别与 x 轴交于 E、F, 连接 BE、DF, 若正方形 ABCD 有两个顶点在双曲线 $y = \frac{a+2}{x}$ 上, 实数 a 满足 $a^3 - a = 1$, 则四边形 DEBF 的面积是 6 或 2 或 10.



【分析】根据乘方, 可得 a 的值, 根据正方形的对称中心在坐标原点, 可得 B 点的横坐标等于纵坐标, 根据平行四边形的面积公式, 可得答案.

【解答】解: 由 $a^3 - a = 1$ 得

$a = 1$, 或 $a = -1$, $a = 3$.

①当 $a = 1$ 时, 函数解析式为 $y = \frac{3}{x}$, 由正方形 ABCD 的对称中心在坐标原点, 得

B 点的横坐标等于纵坐标, $x = y = \sqrt{3}$,

四边形 DEBF 的面积是 $2x \cdot y = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$

②当 $a = -1$ 时, 函数解析式为 $y = \frac{1}{x}$, 由正方形 ABCD 的对称中心在坐标原点, 得

B 点的横坐标等于纵坐标, $x = y = 1$,

四边形 DEBF 的面积是 $2x \cdot y = 2 \times 1 \times 1 = 2$;

③当 $a = 3$ 时, 函数解析式为 $y = \frac{5}{x}$, 由正方形 ABCD 的对称中心在坐标原点, 得

B 点的横坐标等于纵坐标, $x = y = \sqrt{5}$,

四边形 DEBF 的面积是 $2x \cdot y = 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 10$,

故答案为: 6 或 2 或 10.

【点评】本题考查了反比例函数的意义，利用乘方的意义得出 a 的值是解题关键，又利用了中心对称的正方形，平行四边形的面积.

三、解答题（本大题共 7 小题，共 66 分）

19. (10.00 分) (1) 求不等式组 $\begin{cases} 2x-1 \geq x-2 \textcircled{1} \\ x+\frac{1}{2} > 2(x-\frac{1}{4}) \textcircled{2} \end{cases}$ 的整数解；

(2) 先化简，后求值 $(1 - \frac{a}{a+1}) \div \frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$ ，其中 $a=\sqrt{2}+1$.

【分析】(1) 分别解每个不等式，再根据“大小小大中间找”确定不等式组的解集，从而得出答案；

(2) 先根据分式混合运算顺序和运算法则化简原式，再将 a 的值代入计算可得.

【解答】解：(1) 解不等式①，得： $x \geq -1$ ，

解不等式②，得： $x < 1$ ，

则不等式组的解集为 $-1 \leq x < 1$ ，

$\therefore$ 不等式组的整数解为 $-1, 0$ ；

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \left(\frac{a+1}{a+1} - \frac{a}{a+1} \right) \div \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)^2} \\ &= \frac{1}{a+1} \cdot \frac{a+1}{a-1} \\ &= \frac{1}{a-1}, \\ \text{当 } a=\sqrt{2}+1 \text{ 时, 原式} &= \frac{1}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

【点评】本题主要考查分式的化简求值与解一元一次不等式组，解题的关键是熟练掌握分式的混合运算顺序和运算法则及解不等式的能力.

20. (8.00 分) 为了参加“荆州市中小学生首届诗词大会”，某校八年级的两班学生进行了预选，其中班上前 5 名学生的成绩（百分制）分别为：八（1）班 86，85，77，92，85；八（2）班 79，85，92，85，89. 通过数据分析，列表如下：

班级	平均分	中位数	众数	方差
八（1）	85	b	c	22.8

八 (2)	a	85	85	19.2
-------	---	----	----	------

(1) 直接写出表中 a, b, c 的值;

(2) 根据以上数据分析, 你认为哪个班前 5 名同学的成绩较好? 说明理由.

【分析】(1) 根据平均数、中位数、众数的概念解答即可;

(2) 根据它们的方差, 从而可以解答本题.

【解答】解: (1) $a = \frac{79+85+92+85+89}{5} = 86$, $b=85$, $c=85$,

(2) $\because 22.8 > 19.2$,

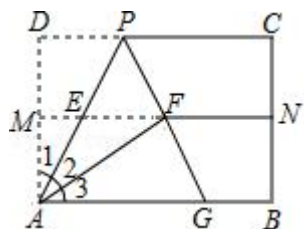
$\therefore$ 八 (2) 班前 5 名同学的成绩较好,

【点评】本题考查平均数、众数、中位数、方差, 解题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件.

21. (8.00 分) 如图, 对折矩形纸片 ABCD, 使 AB 与 DC 重合, 得到折痕 MN, 将纸片展平; 再一次折叠, 使点 D 落到 MN 上的点 F 处, 折痕 AP 交 MN 于 E; 延长 PF 交 AB 于 G. 求证:

(1) $\triangle AFG \cong \triangle AFP$;

(2) $\triangle APG$ 为等边三角形.



【分析】(1) 由折叠的性质得到 M、N 分别为 AD、BC 的中点, 利用平行线分线段成比例得到 F 为 PG 的中点, 再由折叠的性质得到 AF 垂直于 PG, 利用 SAS 即可得证;

(2) 由 (1) 的全等三角形, 得到对应边相等, 利用三线合一得到 $\angle 2 = \angle 3$, 由折叠的性质及等量代换得到 $\angle PAG$ 为 60° , 根据 $AP = AG$ 且有一个角为 60° 即可得证.

【解答】证明: (1) 由折叠可得: M、N 分别为 AD、BC 的中点,

$\therefore DC \parallel MN \parallel AB$,

$\therefore$ F 为 PG 的中点, 即 $PF = GF$,

由折叠可得: $\angle PFA = \angle D = 90^\circ$, $\angle 1 = \angle 2$,

在 $\triangle AFP$ 和 $\triangle AFG$ 中,

$$\begin{cases} PF=GF \\ \angle AFP=\angle AFG, \\ AF=AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFP \cong \triangle AFG$ (SAS);

(2) $\because \triangle AFP \cong \triangle AFG$,

$\therefore AP=AG$,

$\because AF \perp PG$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$,

$\because \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 30^\circ$,

$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 60^\circ$, 即 $\angle PAG = 60^\circ$,

$\therefore \triangle APG$ 为等边三角形.

【点评】 此题考查了翻折变换 (折叠问题), 全等三角形的判定与性质, 等边三角形的判定, 以及矩形的性质, 熟练掌握折叠的性质是解本题的关键.

22. (8.00 分) 探究函数 $y=x+\frac{1}{x}$ ($x>0$) 与 $y=x+\frac{a}{x}$ ($x>0$, $a>0$) 的相关性质.

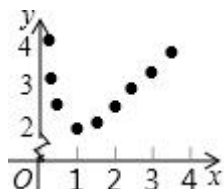
(1) 小聪同学对函数 $y=x+\frac{1}{x}$ ($x>0$) 进行了如下列表、描点, 请你帮他完成连线的步骤;

观察图象可得它的最小值为 2, 它的另一条性质为 当 $x>1$ 时, y 随 x 的增大而增大;

x	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	...
y	...	$\frac{17}{4}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{13}{6}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{29}{10}$	$\frac{10}{3}$	...

(2) 请用配方法求函数 $y=x+\frac{1}{x}$ ($x>0$) 的最小值;

(3) 猜想函数 $y=x+\frac{a}{x}$ ($x>0$, $a>0$) 的最小值为 $2\sqrt{a}$.



【分析】 (1) 根据函数图象可以得到函数 $y=x+\frac{1}{x}$ ($x>0$) 的最小值, 然后根据函数图象,

可以写出该函数的一条性质, 注意函数的性质不唯一, 写的只要复合函数即可;

(2) 根据配方法可以求得函数 $y=x+\frac{1}{x}$ ($x>0$) 的最小值;

(3) 根据配方法可以求得函数 $y=x+\frac{a}{x}$ ($x>0$, $a>0$) 的最小值.

【解答】解: (1) 由图象可得,

函数 $y=x+\frac{1}{x}$ ($x>0$) 的最小值是 2, 它的另一条性质是: 当 $x>1$ 时, y 随 x 的增大而增大,

故答案为: 2, 当 $x>1$ 时, y 随 x 的增大而增大;

$$(2) \because y=x+\frac{1}{x} \quad (x>0),$$

$$\therefore y=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2,$$

$$\therefore \text{当 } \sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ 时, } y \text{ 取得最小值, 此时 } x=1, y=2,$$

即函数 $y=x+\frac{1}{x}$ ($x>0$) 的最小值是 2;

$$(3) \because y=x+\frac{a}{x} \quad (x>0, a>0)$$

$$\therefore y=\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^2+2\sqrt{a},$$

$$\therefore \text{当 } \sqrt{x}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \text{ 时, } y \text{ 取得最小值, 此时 } y=2\sqrt{a}.$$

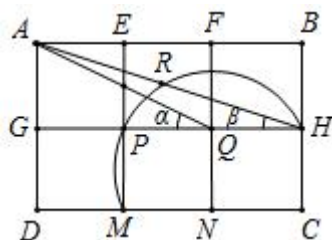
故答案为: $2\sqrt{a}$.

【点评】本题考查正比例函数的图象和性质、反比例函数的图象和性质, 解答本题的关键是明确题意, 利用数形结合的思想解答.

23. (10.00 分) 问题: 已知 α 、 β 均为锐角, $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = \frac{1}{3}$, 求 $\alpha + \beta$ 的度数.

探究: (1) 用 6 个小正方形构造如图所示的网格图 (每个小正方形的边长均为 1), 请借助这个网格图求出 $\alpha + \beta$ 的度数;

延伸: (2) 设经过图中 M、P、H 三点的圆弧与 AH 交于 R, 求 $\widehat{MR}$ 的弧长.

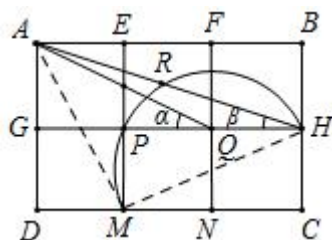


【分析】(1) 连结 AM、MH, 则 $\angle MHP = \angle \alpha$, 然后再证明 $\triangle AMH$ 为等腰直角三角形即可;

(2) 先求得 MH 的长, 然后再求得弧 MR 所对圆心角的度数, 最后, 再依据弧长公式求解

即可.

【解答】解: (1) 连结 AM、MH, 则 $\angle MHP = \angle \alpha$.



$\because AD=MC, \angle D=\angle C, MD=HC,$

$\therefore \triangle ADM \cong \triangle MCH.$

$\therefore AM=MH, \angle DAM=\angle HMC.$

$\because \angle AMD+\angle DAM=90^\circ,$

$\therefore \angle AMD+\angle HMC=90^\circ,$

$\therefore \angle AMH=90^\circ,$

$\therefore \angle MHA=45^\circ,$ 即 $\alpha+\beta=45^\circ.$

(2) 由勾股定理可知 $MH=\sqrt{HC^2+MC^2}=\sqrt{5}.$

$\because \angle MHR=45^\circ,$

$$\therefore \widehat{MR} = \frac{90 \times \frac{\sqrt{5}}{2} \pi}{180} = \frac{\sqrt{5} \pi}{4}.$$

【点评】本题主要考查的是弧长的计算、等腰直角三角形的判定, 锐角三角函数的性质, 掌握本题的辅助线的作法是解题的关键.

24. (10.00 分) 为响应荆州市“创建全国文明城市”号召, 某单位不断美化环境, 拟在一块矩形空地上修建绿色植物园, 其中一边靠墙, 可利用的墙长不超过 18m, 另外三边由 36m 长的栅栏围成. 设矩形 ABCD 空地中, 垂直于墙的边 $AB=xm$, 面积为 ym^2 (如图).

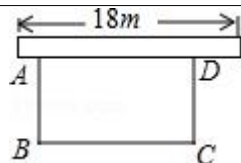
(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;

(2) 若矩形空地的面积为 $160m^2$, 求 x 的值;

(3) 若该单位用 8600 元购买了甲、乙、丙三种绿色植物共 400 棵 (每种植物的单价和每棵栽种的合理用地面积如下表). 问丙种植物最多可以购买多少棵? 此时, 这批植物可以全部栽种到这块空地上吗? 请说明理由.

	甲	乙	丙
--	---	---	---

单价 (元/棵)	14	16	28
合理用地 ($\text{m}^2/\text{棵}$)	0.4	1	0.4



【分析】(1) 根据矩形的面积公式计算即可；

(2) 构建方程即可解决问题，注意检验是否符合题意；

(3) 利用二次函数的性质求出 y 的最大值，设购买了乙种绿色植物 a 棵，购买了丙种绿色植物 b 棵，由题意： $14(400 - a - b) + 16a + 28b = 8600$ ，可得 $a + 7b = 1500$ ，推出 b 的最大值为 214，此时 $a = 2$ ，再求出实际植物面积即可判断；

【解答】解：(1) $y = x(36 - 2x) = -2x^2 + 36x$.

(2) 由题意： $-2x^2 + 36x = 160$,

解得 $x = 10$ 或 8 .

$\because x = 8$ 时， $36 - 16 = 20 < 18$ ，不符合题意，

$\therefore x$ 的值为 10.

(3) $\because y = -2x^2 + 36x = -2(x - 9)^2 + 162$,

$\therefore x = 9$ 时， y 有最大值 162，

设购买了乙种绿色植物 a 棵，购买了丙种绿色植物 b 棵，

由题意： $14(400 - a - b) + 16a + 28b = 8600$,

$\therefore a + 7b = 1500$,

$\therefore b$ 的最大值为 214，此时 $a = 2$ ，

需要种植的面积 $= 0.4 \times (400 - 214 - 2) + 1 \times 2 + 0.4 \times 214 = 162.8 > 162$,

$\therefore$ 这批植物不可以全部栽种到这块空地上.

【点评】本题考查二次函数的应用，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

25. (12.00 分) 阅读理解：在平面直角坐标系中，若两点 P 、 Q 的坐标分别是 $P(x_1, y_1)$ 、

Q (x_2, y_2), 则 P、Q 这两点间的距离为 $|PQ| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. 如 P (1, 2), Q

$$(3, 4), \text{ 则 } |PQ| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}.$$

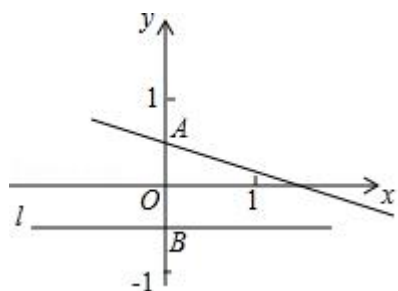
对于某种几何图形给出如下定义: 符合一定条件的动点形成的图形, 叫做符合这个条件的点的轨迹. 如平面内到线段两个端点距离相等的点的轨迹是这条线段的垂直平分线.

解决问题: 如图, 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = kx + \frac{1}{2}$ 交 y 轴于点 A, 点 A 关于 x 轴的对称点为点 B, 过点 B 作直线 l 平行于 x 轴.

(1) 到点 A 的距离等于线段 AB 长度的点的轨迹是 $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$;

(2) 若动点 C (x, y) 满足到直线 l 的距离等于线段 CA 的长度, 求动点 C 轨迹的函数表达式;

问题拓展: (3) 若 (2) 中的动点 C 的轨迹与直线 $y = kx + \frac{1}{2}$ 交于 E、F 两点, 分别过 E、F 作直线 l 的垂线, 垂足分别是 M、N, 求证: ① EF 是 $\triangle AMN$ 外接圆的切线; ② $\frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}$ 为定值.



【分析】 (1) 利用两点间的距离公式即可得出结论;

(2) 利用两点间的距离公式即可得出结论;

(3) ①先确定出 $m+n=2k$, $mn=-1$, 再确定出 $M(m, -\frac{1}{2})$, $N(n, -\frac{1}{2})$, 进而判断出 $\triangle AMN$ 是直角三角形, 再求出直线 AQ 的解析式为 $y = -\frac{1}{k}x + \frac{1}{2}$, 即可得出结论;
②先确定出 $a = mk + \frac{1}{2}$, $b = nk + \frac{1}{2}$, 再求出 $AE = ME = a + \frac{1}{2} = mk + 1$, $AF = NF = b + \frac{1}{2} = nk + 1$, 即可得出结论.

【解答】 解: (1) 设到点 A 的距离等于线段 AB 长度的点 D 坐标为 (x, y),

$$\therefore AD^2 = x^2 + (y - \frac{1}{2})^2,$$

$$\because \text{直线 } y = kx + \frac{1}{2} \text{ 交 } y \text{ 轴于点 A,}$$

$$\therefore A(0, \frac{1}{2}),$$

∵点 A 关于 x 轴的对称点为点 B,

$$\therefore B \left(0, -\frac{1}{2} \right),$$

$$\therefore AB=1,$$

∵点 D 到点 A 的距离等于线段 AB 长度,

$$\therefore x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = 1,$$

$$\text{故答案为: } x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = 1;$$

(2) ∵过点 B 作直线 l 平行于 x 轴,

$$\therefore \text{直线 l 的解析式为 } y = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore C(x, y), A \left(0, \frac{1}{2} \right),$$

$$\therefore AC^2 = x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2, \text{ 点 C 到直线 l 的距离为: } \left(y + \frac{1}{2} \right),$$

∵动点 C(x, y) 满足到直线 l 的距离等于线段 CA 的长度,

$$\therefore x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \left(y + \frac{1}{2} \right)^2,$$

$$\therefore \text{动点 C 轨迹的函数表达式 } y = \frac{1}{2}x^2,$$

(3) ①如图,

设点 E(m, a) 点 F(n, b),

∵动点 C 的轨迹与直线 $y = kx + \frac{1}{2}$ 交于 E、F 两点,

$$\therefore \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = kx + \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore x^2 - 2kx - 1 = 0,$$

$$\therefore m+n=2k, mn=-1,$$

∵过 E、F 作直线 l 的垂线, 垂足分别是 M、N,

$$\therefore M \left(m, -\frac{1}{2} \right), N \left(n, -\frac{1}{2} \right),$$

$$\therefore A \left(0, \frac{1}{2} \right),$$

$$\therefore AM^2 + AN^2 = m^2 + 1 + n^2 + 1 = m^2 + n^2 + 2 = (m+n)^2 - 2mn + 2 = 4k^2 + 4,$$

$$MN^2 = (m - n)^2 = (m + n)^2 - 4mn = 4k^2 + 4,$$

$$\therefore AM^2 + AN^2 = MN^2.$$

$\therefore \triangle AMN$ 是直角三角形, MN 为斜边,

取 MN 的中点 Q,

$\therefore$ 点 Q 是 $\triangle AMN$ 的外接圆的圆心.

$$\therefore Q(k, -\frac{1}{2}),$$

$$\therefore A = (0, \frac{1}{2}),$$

$\therefore$ 直线 AQ 的解析式为 $y = -\frac{1}{k}x + \frac{1}{2}$,

∴ 直线 EF 的解析式为 $y=kx+\frac{1}{2}$,

$$\therefore AQ \perp EF,$$

$\therefore EF$ 是 $\triangle AMN$ 外接圆的切线;

②证明: $\because$ 点 E (m, a) 点 F (n, b) 在直线 $y=kx+\frac{1}{2}$ 上,

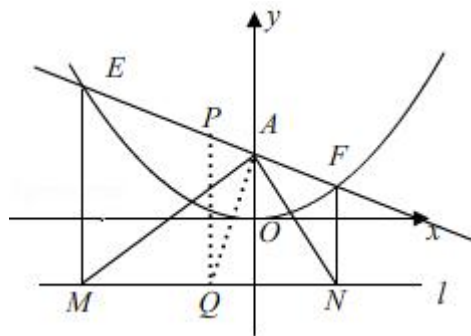
$$\therefore a = mk + \frac{1}{2}, \quad b = nk + \frac{1}{2},$$

$\therefore$ ME, NF, EF 是 $\triangle AMN$ 的外接圆的切线,

$$\therefore AE=ME=a+\frac{1}{2}=mk+1, \quad AF=NF=b+\frac{1}{2}=nk+1,$$

$$\therefore \frac{1}{AE} + \frac{1}{AF} = \frac{1}{mk+1} + \frac{1}{nk+1} = \frac{(m+n)k+2}{mnk^2+(m+n)k+1} = \frac{2k^2+2}{-k^2+2k \cdot k+1} = \frac{2(k^2+1)}{k^2+1} = 2,$$

即: $\frac{1}{\Delta E} + \frac{1}{\Delta F}$ 为定值, 定值为 2.



【点评】此题是圆的综合题，主要考查了待定系数法，两点间的距离公式，直角三角形的判

定和性质，根与系数的关系，圆的切线的判定和性质，利用根与系数的确定出 $m+n=2k$ ， $mn=-1$ 是解本题是关键.