

湖北省宜昌市 2018 年中考数学真题试题

一、选择题

1. (2018 年湖北省宜昌市) -2018 的绝对值是 ()

- A. 2018 B. -2018 C. $\frac{1}{2018}$ D. $-\frac{1}{2018}$

【分析】根据绝对值的定义即可求得.

【解答】解: -2018 的绝对值是 2018.

故选: A.

【点评】本题主要考查的是绝对值的定义, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

2. (2018 年湖北省宜昌市) 如下字体的四个汉字中, 是轴对称图形的是 ()



【分析】根据轴对称图形的定义逐个判断即可.

【解答】解: A、不是轴对称图形, 故本选项不符合题意;

B、不是轴对称图形, 故本选项不符合题意;

C、不是轴对称图形, 故本选项不符合题意;

D、是轴对称图形, 故本选项符合题意;

故选: D.

【点评】本题考查了轴对称图形的定义, 能够正确观察图形和理解轴对称图形的定义是解此题的关键.

3. (2018 年湖北省宜昌市) 工信部发布《中国数字经济发展与就业白皮书 (2018) 》) 显示, 2017 年湖北数字经济总量 1.21 万亿元, 列全国第七位、中部第一位. “1.21 万” 用科学记数法表示为 ()

- A. 1.21×10^3 B. 12.1×10^3 C. 1.21×10^4 D. 0.121×10^5

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】解：1.21 万= 1.21×10^4 ,

故选：C.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. (2018 年湖北省宜昌市) 计算 $4 + (-2)^2 \times 5 = (\quad)$

A. -16 B. 16 C. 20 D. 24

【分析】根据有理数的乘方、乘法和加法可以解答本题.

【解答】解： $4 + (-2)^2 \times 5$

$$= 4 + 4 \times 5$$

$$= 4 + 20$$

$$= 24,$$

故选：D.

【点评】本题考查有理数的混合运算，解答本题的关键是明确有理数的混合运算的计算方法.

5. (2018 年湖北省宜昌市) 在“绿水青山就是金山银山”这句话中任选一个汉字，这个字是“绿”的概率为 ()

A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{8}$

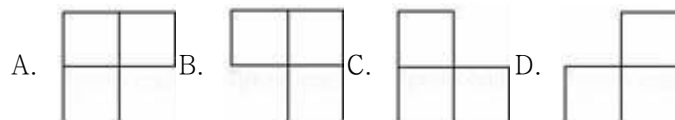
【分析】直接利用概率公式求解.

【解答】解：这句话中任选一个汉字，这个字是“绿”的概率= $\frac{1}{10}$.

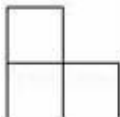
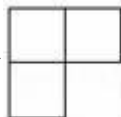
故选：B.

【点评】本题考查了概率公式：随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 A 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$.

6. (2018 年湖北省宜昌市) 如图，是由四个相同的小正方体组合而成的几何体，它的左视图是 ()



【分析】左视图是从左边看得出的图形，结合所给图形及选项即可得出答案.

【解答】解：该几何体的主视图为：；左视图为：；俯视图为：；

故选：C.

【点评】此题考查了简单几何体的三视图，属于基础题，解答本题的关键是掌握左视图的观察位置.

7. (2018 年湖北省宜昌市) 下列运算正确的是 ()

A. $x^2+x^2=x^4$ B. $x^3 \cdot x^2=x^6$ C. $2x^4 \div x^2=2x^2$ D. $(3x)^2=6x^2$

【分析】根据整式运算法则，分别求出四个选项中算式的值，比较后即可得出结论.

【解答】解：A、 $x^2+x^2=2x^2$ ，选项 A 错误；

B、 $x^3 \cdot x^2=x^{3+2}=x^5$ ，选项 B 错误；

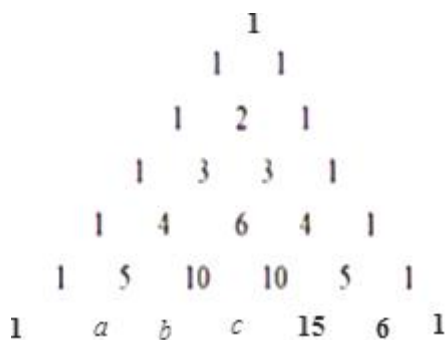
C、 $2x^4 \div x^2=2x^{4-2}=2x^2$ ，选项 C 正确；

D、 $(3x)^2=3^2 \cdot x^2=9x^2$ ，选项 D 错误.

故选：C.

【点评】本题考查了整式的混合运算，牢记整式混合运算的运算法则是解题的关键.

8. (2018 年湖北省宜昌市) 1261 年，我国南宋数学家杨辉用图中的三角形解释二项和的乘方规律，比欧洲的同发现要早三百多年，我们把这个三角形称为“杨辉三角”，请观察图中的数字排列规律，则 a, b, c 的值分别为 ()



A. $a=1$, $b=6$, $c=15$ B. $a=6$, $b=15$, $c=20$

C. $a=15$, $b=20$, $c=15$ D. $a=20$, $b=15$, $c=6$

【分析】根据图形中数字规模：每个数字等于上一行的左右两个数字之和，可得 a 、 b 、 c 的值.

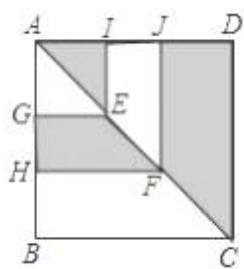
【解答】解：根据图形得：每个数字等于上一行的左右两个数字之和，

$$\therefore a=1+5=6, b=5+10=15, c=10+10=20,$$

故选：B.

【点评】本题是一道找规律的题目，这类题型在中考中经常出现. 对于找规律的题目首先应找出哪些部分发生了变化，是按照什么规律变化的.

9. (2018 年湖北省宜昌市) 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 E 、 F 分别是对角线 AC 上的两点， $EG \perp AB$ ， $EI \perp AD$ ， $FH \perp AB$ ， $FJ \perp AD$ ，垂足分别为 G ， I ， H ， J . 则图中阴影部分的面积等于 ()



A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

【分析】根据轴对称图形的性质，解决问题即可；

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore$ 直线 AC 是正方形 $ABCD$ 的对称轴，

$\because EG \perp AB$ ， $EI \perp AD$ ， $FH \perp AB$ ， $FJ \perp AD$ ，垂足分别为 G ， I ， H ， J .

$\therefore$ 根据对称性可知：四边形 $EFHG$ 的面积与四边形 $EFJI$ 的面积相等，

$$\therefore S_{\text{阴}} = \frac{1}{2} S_{\text{正方形 ABCD}} = \frac{1}{2},$$

故选：B.

【点评】本题考查正方形的性质，解题的关键是利用轴对称的性质解决问题，属于中考常考题型.

10. (2018 年湖北省宜昌市) 为参加学校举办的“诗意校园·致远方”朗诵艺术大赛，八年级“屈原读书社”组织了五次选拔赛，这五次选拔赛中，小明五次成绩的平均数是 90，方差是 2；小强五次成绩的平均数也是 90，方差是 14.8. 下列说法正确的是 ()

- A. 小明的成绩比小强稳定
- B. 小明、小强两人成绩一样稳定
- C. 小强的成绩比小明稳定
- D. 无法确定小明、小强的成绩谁更稳定

【分析】方差是反映一组数据的波动大小的一个量. 方差越大，则平均值的离散程度越大，稳定性也越小；反之，则它与其平均值的离散程度越小，稳定性越好.

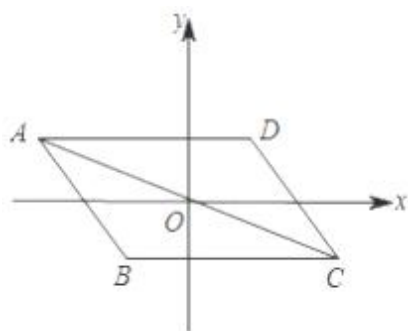
【解答】解：∵小明五次成绩的平均数是 90，方差是 2；小强五次成绩的平均数也是 90，方差是 14.8.

平均成绩一样，小明的方差小，成绩稳定，

故选：A.

【点评】本题考查方差、平均数的定义，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考基础题.

11. (2018 年湖北省宜昌市) 如图，在平面直角坐标系中，把 $\triangle ABC$ 绕原点 O 旋转 180° 得到 $\triangle CDA$ ，点 A ， B ， C 的坐标分别为 $(-5, 2)$ ， $(-2, -2)$ ， $(5, -2)$ ，则点 D 的坐标为 ()



- A. $(2, 2)$
- B. $(2, -2)$
- C. $(2, 5)$
- D. $(-2, 5)$

【分析】依据四边形 ABCD 是平行四边形，即可得到 BD 经过点 O，依据 B 的坐标为 $(-2, -2)$ ，即可得出 D 的坐标为 $(2, 2)$ 。

【解答】解：∵点 A，C 的坐标分别为 $(-5, 2)$ ， $(5, -2)$ ，

∴点 O 是 AC 的中点，

∵ $AB=CD$ ， $AD=BC$ ，

∴四边形 ABCD 是平行四边形，

∴BD 经过点 O，

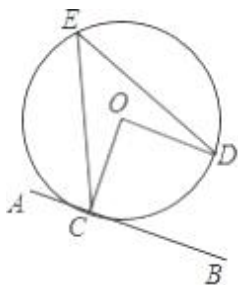
∵B 的坐标为 $(-2, -2)$ ，

∴D 的坐标为 $(2, 2)$ ，

故选：A.

【点评】本题主要考查了坐标与图形变化，图形或点旋转之后要结合旋转的角度和图形的特殊性质来求出旋转后的点的坐标.

12. (2018 年湖北省宜昌市) 如图，直线 AB 是 $\odot O$ 的切线，C 为切点， $OD \parallel AB$ 交 $\odot O$ 于点 D，点 E 在 $\odot O$ 上，连接 OC，EC，ED，则 $\angle CED$ 的度数为 ()



A. 30° B. 35° C. 40° D. 45°

【分析】由切线的性质知 $\angle OCB=90^\circ$ ，再根据平行线的性质得 $\angle COD=90^\circ$ ，最后由圆周角定理可得答案.

【解答】解：∵直线 AB 是 $\odot O$ 的切线，C 为切点，

∴ $\angle OCB=90^\circ$ ，

∵ $OD \parallel AB$ ，

∴ $\angle COD=90^\circ$ ，

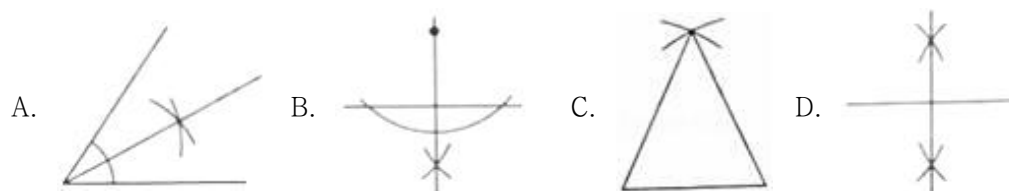
∴ $\angle CED=\frac{1}{2}\angle COD=45^\circ$ ，

故选：D.

【点评】本题主要考查切线的性质，解题的关键是掌握圆的切线垂直于经过切点的半径及圆

周角定理.

13. (2018 年湖北省宜昌市) 尺规作图: 经过已知直线外一点作这条直线的垂线, 下列作图中正确的是 ()



【分析】根据过直线外一点向直线作垂线即可.

【解答】已知: 直线 AB 和 AB 外一点 C.

求作: AB 的垂线, 使它经过点 C.

作法: (1) 任意取一点 K, 使 K 和 C 在 AB 的两旁.

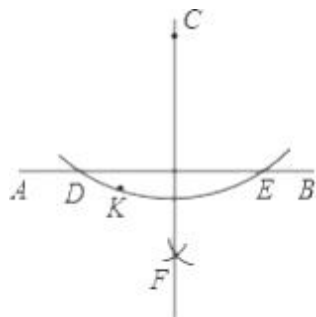
(2) 以 C 为圆心, CK 的长为半径作弧, 交 AB 于点 D 和 E.

(3) 分别以 D 和 E 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧, 两弧交于点 F,

(4) 作直线 CF.

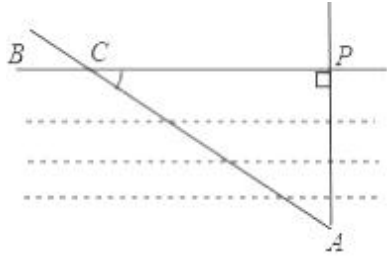
直线 CF 就是所求的垂线.

故选: B.



【点评】此题主要考查了过一点作直线的垂线, 熟练掌握基本作图方法是解决问题的关键.

14. (2018 年湖北省宜昌市) 如图, 要测量小河两岸相对的两点 P, A 的距离, 可以在小河边取 PA 的垂线 PB 上的一点 C, 测得 PC=100 米, $\angle PCA=35^\circ$, 则小河宽 PA 等于 ()



A. $100\sin 35^\circ$ 米 B. $100\sin 55^\circ$ 米 C. $100\tan 35^\circ$ 米 D. $100\tan 55^\circ$ 米

【分析】根据正切函数可求小河宽 PA 的长度.

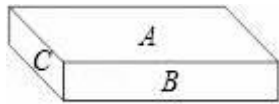
【解答】解: $\because PA \perp PB$, $PC=100$ 米, $\angle PCA=35^\circ$,

$\therefore$ 小河宽 $PA=PC \tan \angle PCA=100 \tan 35^\circ$ 米.

故选: C.

【点评】考查了解直角三角形的应用, 解直角三角形的一般过程是: ①将实际问题抽象为数学问题 (画出平面图形, 构造出直角三角形转化为解直角三角形问题). ②根据题目已知特点选用适当锐角三角函数或边角关系去解直角三角形, 得到数学问题的答案, 再转化得到实际问题的答案.

15. (2018 年湖北省宜昌市) 如图, 一块砖的 A, B, C 三个面的面积比是 4: 2: 1. 如果 A, B, C 面分别向下放在地上, 地面所受压强为 p_1 , p_2 , p_3 , 压强的计算公式为 $p=\frac{F}{S}$, 其中 P 是压强, F 是压力, S 是受力面积, 则 p_1 , p_2 , p_3 的大小关系正确的是 ()



A. $p_1 > p_2 > p_3$ B. $p_1 > p_3 > p_2$ C. $p_2 > p_1 > p_3$ D. $p_3 > p_2 > p_1$

【分析】直接利用反比例函数的性质进而分析得出答案.

【解答】解: $\because p=\frac{F}{S}$, $F > 0$,

$\therefore p$ 随 S 的增大而减小,

$\because$ A, B, C 三个面的面积比是 4: 2: 1,

$\therefore p_1$, p_2 , p_3 的大小关系是: $p_3 > p_2 > p_1$.

故选: D.

【点评】此题主要考查了反比例函数的性质, 正确把握反比例函数的性质是解题关键.

二、解答题（本题共 9 题，75 分）

16. （2018 年湖北省宜昌市）先化简，再求值： $x(x+1) + (2+x)(2-x)$ ，其中 $x=\sqrt{6}-4$.

【分析】根据单项式乘多项式、平方差公式可以化简题目中的式子，然后将 x 的值代入化简后的式子即可解答本题.

【解答】解： $x(x+1) + (2+x)(2-x)$

$$=x^2+x+4-x^2$$

$$=x+4,$$

$$\text{当 } x=\sqrt{6}-4 \text{ 时, 原式}=\sqrt{6}-4+4=\sqrt{6}.$$

【点评】本题考查整式的混合运算—化简求值，解答本题的关键是明确整式的化简求值的计算方法.

17. （2018 年湖北省宜昌市）解不等式组 $\begin{cases} \frac{10-x}{3} \leq 2x+1 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ ，并把它的解集在数轴上表示出来.

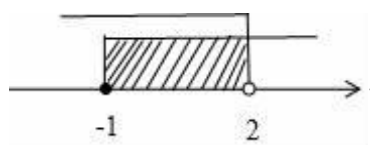
【分析】解一元一次不等式组的方法与步骤：①求不等式组中每个不等式的解集；②利用数轴求公共部分；并把它的解集在数轴上表示出来即可.

【解答】解： $\begin{cases} \frac{10-x}{3} \leq 2x+1 \text{ ①} \\ x-2 < 0 \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①，得： $x \geq 1$;

解不等式②，得： $x < 2$;

$\therefore$ 原不等式组的解集是 $1 \leq x < 2$.

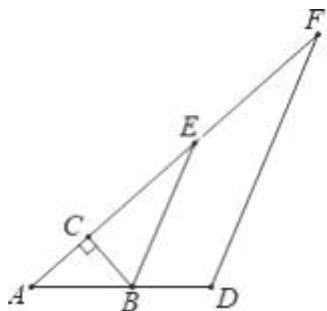


【点评】此题主要考查了解一元一次不等式组的方法，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确方法与步骤：①求不等式组中每个不等式的解集；②利用数轴求公共部分.

18. （2018 年湖北省宜昌市）如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle A=40^\circ$ ， $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CBD$ 的平分线 BE 交 AC 的延长线于点 E .

(1) 求 $\angle CBE$ 的度数;

(2) 过点 D 作 $DF \parallel BE$, 交 AC 的延长线于点 F, 求 $\angle F$ 的度数.



【分析】 (1) 先根据直角三角形两锐角互余求出 $\angle ABC = 90^\circ - \angle A = 50^\circ$, 由邻补角定义得出 $\angle CBD = 130^\circ$. 再根据角平分线定义即可求出 $\angle CBE = \frac{1}{2} \angle CBD = 65^\circ$;

(2) 先根据三角形外角的性质得出 $\angle CEB = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$, 再根据平行线的性质即可求出 $\angle F = \angle CEB = 25^\circ$.

【解答】解: (1) $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 40^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle A = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = 130^\circ.$$

$\because BE$ 是 $\angle CBD$ 的平分线,

$$\therefore \angle CBE = \frac{1}{2} \angle CBD = 65^\circ;$$

$$(2) \because \angle ACB = 90^\circ, \angle CBE = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle CEB = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ.$$

$\because DF \parallel BE$,

$$\therefore \angle F = \angle CEB = 25^\circ.$$

【点评】 本题考查了三角形内角和定理, 三角形外角的性质, 平行线的性质, 邻补角定义, 角平分线定义. 掌握各定义与性质是解题的关键.

19. (2018 年湖北省宜昌市) 我国古代数学著作《九章算术》中有这样一题, 原文是: “今有大器五小器一容三斛, 大器一小器五容二斛, 问大小器各容几何.” 意思是: 有大小两种盛酒的桶, 已知 5 个大桶加上 1 个小桶可以盛酒 3 斛 (斛, 是古代的一种容量单位), 1 个大桶加上 5 个小桶可以盛酒 2 斛. 1 个大桶、1 个小桶分别可以盛酒多少斛? 请解答.

【分析】 直接利用 5 个大桶加上 1 个小桶可以盛酒 3 斛, 1 个大桶加上 5 个小桶可以盛酒 2

斛，分别得出等式组成方程组求出答案.

【解答】解：设 1 个大桶可以盛酒 x 斛，1 个小桶可以盛酒 y 斛，

$$\text{则} \begin{cases} 5x+y=3 \\ x+5y=2 \end{cases},$$

$$\text{解得:} \begin{cases} x=\frac{13}{24} \\ y=\frac{7}{24} \end{cases},$$

答：1 个大桶可以盛酒 $\frac{13}{24}$ 斛，1 个小桶可以盛酒 $\frac{7}{24}$ 斛.

【点评】此题主要考查了二元一次方程组的应用，正确得出等量关系是解题关键.

20. (2018 年湖北省宜昌市) 某校创建“环保示范学校”，为了解全校学生参加环保类社团的意愿，在全校随机抽取了 50 名学生进行问卷调查，问卷给出了五个社团供学生选择 (学生可根据自己的爱好选择一个社团，也可以不选)，对选择了社团的学生的问卷情况进行了统计，如表：

社团名称	A. 酵素制作社团	B. 回收材料小制作社团	C. 垃圾分类社团	D. 环保义工社团	E. 绿植养护社团
人数	10	15	5	10	5

(1) 填空：在统计表中，这 5 个数的中位数是 10；

(2) 根据以上信息，补全扇形图 (图 1) 和条形图 (图 2)；

(3) 该校有 1400 名学生，根据调查统计情况，请估计全校有多少学生愿意参加环保义工社团；

(4) 若小诗和小雨两名同学在酵素制作社团或绿植养护社团中任意选择一个参加，请用树状图或列表法求出这两名同学同时选择绿植养护社团的概率.

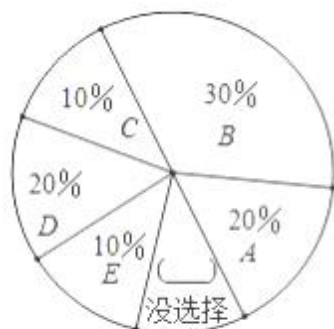


图1

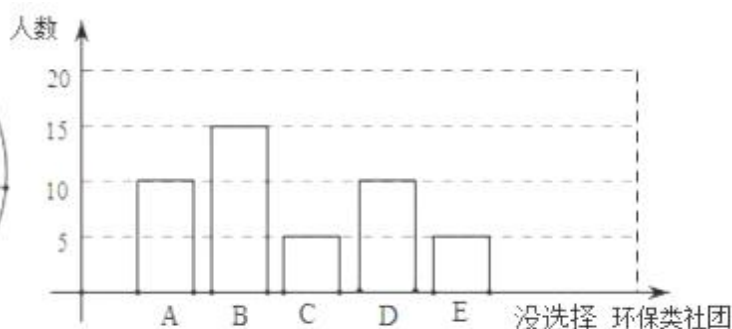


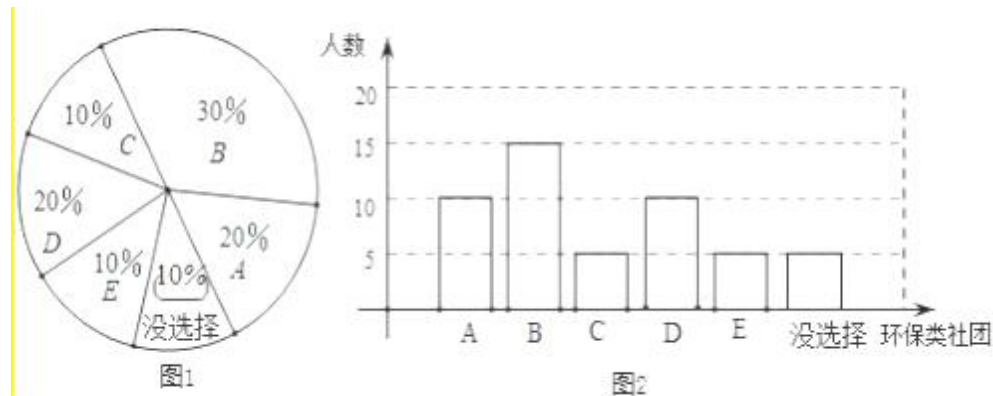
图2

【分析】(1) 根据中位数的定义即可判断；

- (2) 求出没有选择的百分比，高度和 E 相同，即可画出图形；
- (3) 利用样本估计总体的思想解决问题即可；
- (4) 画出树状图即可解决问题；

【解答】解：（1）这 5 个数从小到大排列：5，5，10，10，15，故中位数为 10，故答案为 10.

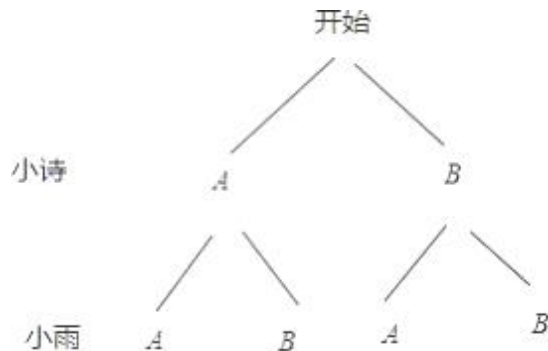
(2) 没有选择的占 $1 - 10\% - 30\% - 20\% - 10\% - 20\% = 10\%$ ，条形图的高度和 E 相同；如图所示：



(3) $1400 \times 20\% = 280$ (名)

答：估计全校有多少学生愿意参加环保义工社团有 280 名；

(4) 酵素制作社团、绿植养护社团分别用 A、B 表示：树状图如图所示，



共有 4 种可能，两人同时选择绿植养护社团只有一种情形，

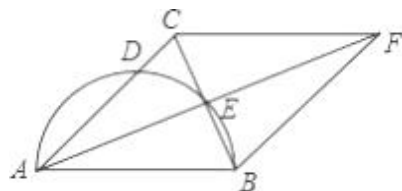
$\therefore$ 这两名同学同时选择绿植养护社团的概率 $= \frac{1}{4}$.

【点评】此题考查了扇形统计图，条形统计图，列表法与树状图法，用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比.

21. (2018 年湖北省宜昌市) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 以 AB 为直径的圆交 AC 于点 D , 交 BC 于点 E , 延长 AE 至点 F , 使 $EF=AE$, 连接 FB , FC .

(1) 求证: 四边形 $ABFC$ 是菱形;

(2) 若 $AD=7$, $BE=2$, 求半圆和菱形 $ABFC$ 的面积.



【分析】(1) 根据对角线相互平分的四边形是平行四边形, 证明是平行四边形, 再根据邻边相等的平行四边形是菱形即可证明;

(2) 设 $CD=x$, 连接 BD . 利用勾股定理构建方程即可解决问题;

【解答】(1) 证明: $\because AB$ 是直径,

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp BC,$$

$$\because AB=AC,$$

$$\therefore BE=CE,$$

$$\because AE=EF,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABFC \text{ 是平行四边形},$$

$$\because AC=AB,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABFC \text{ 是菱形}.$$

(2) 设 $CD=x$. 连接 BD .

$$\because AB \text{ 是直径},$$

$$\therefore \angle ADB = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2,$$

$$\therefore (7+x)^2 - 7^2 = 4^2 - x^2,$$

解得 $x=1$ 或 -8 (舍弃)

$$\therefore AC=8, \quad BD=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15},$$

$$\therefore S_{\text{菱形 } ABFC} = 8\sqrt{15}.$$

(2) 由题意可得: $40+40(1+m)+40(1+m)^2=190$,

解得: $m_1=\frac{1}{2}$, $m_2=-\frac{7}{2}$ (舍去),

$\therefore$ 第二年用乙方案新治理的工厂数量为: $40(1+m)=40(1+50\%)=60$ (家),

(3) 设第一年用乙方案治理降低了 $100n=100\times 0.3=30$,

则 $(30-a)+2a=39.5$,

解得: $a=9.5$,

则 $Q=20.5$.

设第一年用甲方案整理降低的 Q 值为 x ,

第二年 Q 值因乙方案治理降低了 $100n=100\times 0.3=30$,

解法一: $(30-a)+2a=39.5$

$a=9.5$

$x=20.5$

解法二:
$$\begin{cases} x+a=30 \\ x+2a=39.5 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} x=20.5 \\ a=9.5 \end{cases}$$

【点评】考查了一元二次方程和一元一次方程的应用. 解题关键是要读懂题目的意思, 根据题目给出的条件, 找出合适的等量关系, 列出方程, 再求解.

23. (2018 年湖北省宜昌市) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=12$, P 是边 AB 上一点, 把 $\triangle PBC$ 沿直线 PC 折叠, 顶点 B 的对应点是点 G , 过点 B 作 $BE \perp CG$, 垂足为 E 且在 AD 上, BE 交 PC 于点 F .

(1) 如图 1, 若点 E 是 AD 的中点, 求证: $\triangle AEB \cong \triangle DEC$;

(2) 如图 2, ①求证: $BP=BF$;

②当 $AD=25$, 且 $AE < DE$ 时, 求 $\cos \angle PCB$ 的值;

③当 $BP=9$ 时, 求 $BE \cdot EF$ 的值.

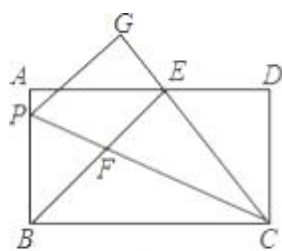


图1

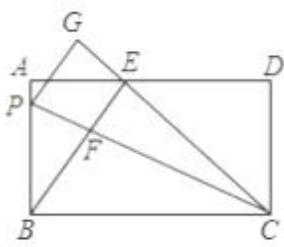


图2

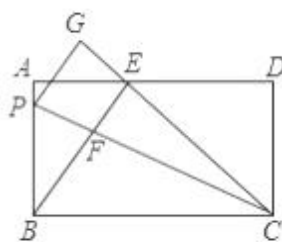


图2备用图

【分析】 (1) 先判断出 $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AB = DC$ 再判断出 $AE = DE$, 即可得出结论;

(2) ①利用折叠的性质, 得出 $\angle PGC = \angle PBC = 90^\circ$, $\angle BPC = \angle GPC$, 进而判断出 $\angle GPF = \angle PFB$ 即可得出结论;

②判断出 $\triangle ABE \sim \triangle DEC$, 得出比例式建立方程求解即可得出 $AE = 9$, $DE = 16$, 再判断出 $\triangle ECF \sim \triangle GCP$, 进而求出 PC , 即可得出结论;

③判断出 $\triangle GEF \sim \triangle EAB$, 即可得出结论.

【解答】解: (1) 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AB = DC$,

$\because E$ 是 AD 中点,

$\therefore AE = DE$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCE$ 中, $\begin{cases} AB = DC \\ \angle A = \angle D = 90^\circ \\ AE = DE \end{cases}$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCE$ (SAS);

(2) ①在矩形 $ABCD$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\because \triangle BPC$ 沿 PC 折叠得到 $\triangle GPC$,

$\therefore \angle PGC = \angle PBC = 90^\circ$, $\angle BPC = \angle GPC$,

$\because BE \perp CG$,

$\therefore BE \parallel PG$,

$\therefore \angle GPF = \angle PFB$,

$\therefore \angle BPF = \angle BFP$,

$\therefore BP = BF$;

②当 $AD = 25$ 时,

$\because \angle BEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle AEB + \angle CED = 90^\circ$,

$\because \angle AEB + \angle ABE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CED = \angle ABE,$$

$$\because \angle A = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DEC,$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{DE}{CD},$$

设 $AE = x$,

$$\therefore DE = 25 - x,$$

$$\therefore \frac{12}{x} = \frac{25-x}{12},$$

$$\therefore x = 9 \text{ 或 } x = 16,$$

$$\because AE < DE,$$

$$\therefore AE = 9, DE = 16,$$

$$\therefore CE = 20, BE = 15,$$

由折叠得, $BP = PG$,

$$\therefore BP = BF = PG,$$

$$\because BE \parallel PG,$$

$$\therefore \triangle ECF \sim \triangle GCP,$$

$$\therefore \frac{EF}{PG} = \frac{CE}{CG},$$

设 $BP = BF = PG = y$,

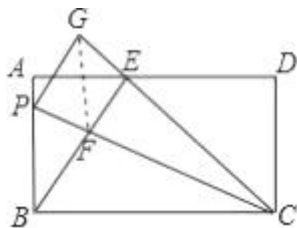
$$\therefore \frac{15-y}{y} = \frac{20}{25},$$

$$\therefore y = \frac{25}{3},$$

$$\therefore BP = \frac{25}{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle PBC \text{ 中, } PC = \frac{25\sqrt{10}}{3}, \cos \angle PCB = \frac{BC}{PC} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

③如图, 连接 FG ,



$$\because \angle GEF = \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\because BF \parallel PG, BF = PG,$$

$\therefore \square BPGF$ 是菱形,

$$\therefore BP \parallel GF,$$

$$\therefore \angle GFE = \angle ABE,$$

$$\therefore \triangle GEF \sim \triangle EAB,$$

$$\therefore \frac{EF}{GF} = \frac{AB}{BE},$$

$$\therefore BE \cdot EF = AB \cdot GF = 12 \times 9 = 108.$$

【点评】此题是四边形综合题，主要考查了矩形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，折叠的性质，利用方程的思想解决问题是解本题的关键.

24. (2018 年湖北省宜昌市) 如图，在平面直角坐标系中，矩形 OADB 的顶点 A, B 的坐标分别为 A (-6, 0), B (0, 4). 过点 C (-6, 1) 的双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 与矩形 OADB 的边 BD 交于点 E.

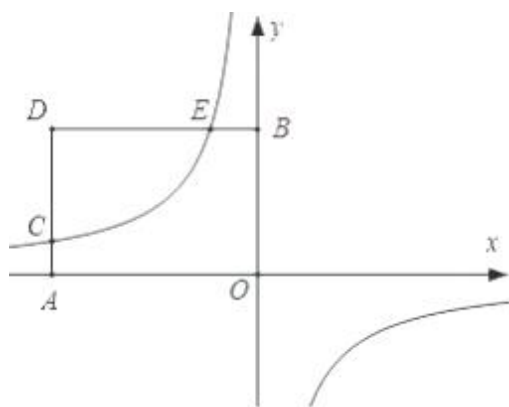
(1) 填空: $OA = \underline{6}$, $k = \underline{-6}$, 点 E 的坐标为 $\underline{(-\frac{3}{2}, 4)}$;

(2) 当 $1 \leq t \leq 6$ 时，经过点 M ($t-1$, $-\frac{1}{2}t^2+5t-\frac{3}{2}$) 与点 N ($-t-3$, $-\frac{1}{2}t^2+3t-\frac{7}{2}$) 的直线交 y 轴于点 F, 点 P 是过 M, N 两点的抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 的顶点.

①当点 P 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上时，求证: 直线 MN 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 没有公共点;

②当抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与矩形 OADB 有且只有三个公共点，求 t 的值;

③当点 F 和点 P 随着 t 的变化同时向上运动时，求 t 的取值范围，并求在运动过程中直线 MN 在四边形 OAEB 中扫过的面积.



【分析】（1）根据题意将先关数据带入

（2）①用 t 表示直线 MN 解析式，及 b, c ，得到 P 点坐标带入双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 解析式，证明关于 t 的方程无解即可；

②根据抛物线开口和对称轴，分别讨论抛物线过点 B 和在 BD 上时的情况；

③由②中部分结果，用 t 表示 F、P 点的纵坐标，求出 t 的取值范围及直线 MN 在四边形 OAEB 中所过的面积.

【解答】解：（1） $\because$ A 点坐标为 $(-6, 0)$

$$\therefore OA=6$$

$\because$ 过点 C $(-6, 1)$ 的双曲线 $y = \frac{k}{x}$

$$\therefore k = -6$$

$$y=4 \text{ 时, } x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{点 E 的坐标为 } \left(-\frac{3}{2}, 4\right)$$

故答案为：6， -6， $\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$

（2）①设直线 MN 解析式为： $y_1 = k_1 x + b_1$

$$\text{由题意得: } \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + 5t - \frac{3}{2} = k_1(t-1) + b_1 \\ -\frac{1}{2}t^2 + 3t - \frac{7}{2} = k_1(-t-3) + b_1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k_1 = 1 \\ b = -\frac{1}{2}t^2 + 4t - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 过点 M、N

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2+5t-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(t-1)^2+b(t-1)+c \\ -\frac{1}{2}t^2+3t-\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}(-t-3)^2+b(-t-3)+c \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b=-1 \\ c=5t-2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为: } y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 5t - 2$$

$$\therefore \text{顶点 P 坐标为 } (-1, 5t - \frac{3}{2})$$

$$\because \text{P 在双曲线 } y = -\frac{6}{x} \text{ 上}$$

$$\therefore (5t - \frac{3}{2}) \times (-1) = -6$$

$$\therefore t = \frac{3}{2}$$

此时直线 MN 解析式为:

$$\text{联立} \begin{cases} y = x + \frac{35}{8} \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}$$

$$\therefore 8x^2 + 35x + 49 = 0$$

$$\because \Delta = 35^2 - 4 \times 8 \times 49 = 1225 - 1536 < 0$$

$$\therefore \text{直线 MN 与双曲线 } y = -\frac{6}{x} \text{ 没有公共点.}$$

②当抛物线过点 B, 此时抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与矩形 OADB 有且只有三个公共点

$$\therefore 4 = 5t - 2, \text{ 得 } t = \frac{6}{5}$$

当抛物线在线段 DB 上, 此时抛物线与矩形 OADB 有且只有三个公共点

$$\therefore \frac{10t-3}{2} = 4, \text{ 得 } t = \frac{11}{10}$$

$$\therefore t = \frac{6}{5} \text{ 或 } t = \frac{11}{10}$$

③ $\because$ 点 P 的坐标为 $(-1, 5t - \frac{3}{2})$

$$\therefore y_P = 5t - \frac{3}{2}$$

当 $1 \leq t \leq 6$ 时, y_P 随 t 的增大而增大

此时, 点 P 在直线 $x = -1$ 上向上运动

$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(0, -\frac{1}{2}t^2+4t-\frac{1}{2})$

$$\therefore y_F = -\frac{1}{2}(t-4)^2 + \frac{15}{2}$$

$\therefore$ 当 $1 \leq t \leq 4$ 时, 随者 y_F 随 t 的增大而增大

此时, 随着 t 的增大, 点 F 在 y 轴上向上运动

$$\therefore 1 \leq t \leq 4$$

当 $t=1$ 时, 直线 MN: $y=x+3$ 与 x 轴交于点 G $(-3, 0)$, 与 y 轴交于点 H $(0, 3)$

当 $t=4-\sqrt{3}$ 时, 直线 MN 过点 A.

当 $1 \leq t \leq 4$ 时, 直线 MN 在四边形 AEBO 中扫过的面积为

$$S = \frac{1}{2} \times (\frac{3}{2} + 6) \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{21}{2}$$

【点评】 本题为二次函数与反比例函数综合题, 考查了数形结合思想和分类讨论的数学思想. 解题过程中, 应注意充分利用字母 t 表示相关点坐标.