

湖北省咸宁市 2018 年中考数学真题试题

一、选择题（每题只有一个正确选项，本题共 8 小题，每题 3 分，共 24 分）

1. 咸宁冬季里某一天的气温为 $-3^{\circ}\text{C} \sim 2^{\circ}\text{C}$ ，则这一天的温差是（ ）

- A. 1°C B. -1°C C. 5°C D. -5°C

【答案】C

【解析】【分析】根据题意列出算式，再利用减法法则计算即可得.

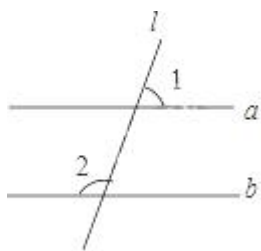
【详解】由题意知这一天的最高气温是 2°C ，最低气温是 -3°C ，3

所以这一天的温差是 $2 - (-3) = 2 + 3 = 5 (^{\circ}\text{C})$ ，

故选 C.

【点睛】本题考查了有理数减法的应用，根据题意列出算式，熟练应用减法法则是解题的关键.

2. 如图，已知 $a \parallel b$ ， l 与 a 、 b 相交，若 $\angle 1 = 70^{\circ}$ ，则 $\angle 2$ 的度数等于（ ）



- A. 120° B. 110° C. 100° D. 70°

【答案】B

【解析】【分析】先求出 $\angle 1$ 的邻补角的度数，再根据两直线平行，同位角相等即可求出 $\angle 2$ 的度数.

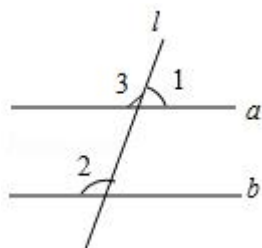
【详解】如图， $\because \angle 1 = 70^{\circ}$ ，

$$\therefore \angle 3 = 180^{\circ} - \angle 1 = 180^{\circ} - 70^{\circ} = 110^{\circ}，$$

$$\because a \parallel b，$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 110^{\circ}，$$

故选 B.



【点睛】本题考查了平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

平行线的性质：两直线平行，同位角相等；两直线平行，内错角相等；两直线平行，同旁内角互

补.

3. 2017 年, 咸宁市经济运行总体保持平稳较快增长, 全年 GDP 约 123500000000 元, 增速在全省 17 个市州中排名第三, 将 123500000000 用科学记数法表示为 ()

- A. 123.5×10^9 B. 12.35×10^{10} C. 1.235×10^8 D. 1.235×10^{11}

【答案】D

【解析】【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

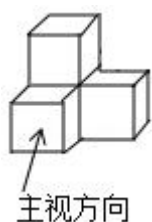
【详解】123500000000 的小数点向左移动 11 位得到 1.235,

所以 123500000000 用科学记数法表示为 1.235×10^{11} ,

故选 D.

【点睛】本题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. 用 4 个完全相同的小正方体搭成如图所示的几何体, 该几何体的 ()

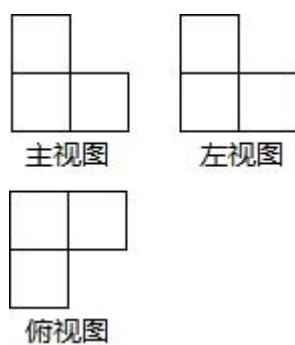


- A. 主视图和左视图相同 B. 主视图和俯视图相同
C. 左视图和俯视图相同 D. 三种视图都相同

【答案】A

【解析】【分析】分别画出该几何体的三视图进而得出答案.

【详解】如图所示:



故该几何体的主视图和左视图相同,

故选 A.

【点睛】本题考查了三视图，解题的关键是得出该几何体的三视图.

5. 下列计算正确的是 ()

A. $a^3 \cdot a^3 = 2a^3$ B. $a^2 + a^2 = a^4$ C. $a^6 \div a^2 = a^3$ D. $(-2a^2)^3 = -8a^6$

【答案】D

【解析】【分析】根据同底数幂的乘法、合并同类项法则及同底数幂的除法、积的乘方与幂的乘方的运算法则逐一计算可得.

【详解】A、 $a^3 \cdot a^3 = a^6$ ，故 A 选项错误；

B、 $a^2 + a^2 = 2a^2$ ，故 B 选项错误；

C、 $a^6 \div a^2 = a^4$ ，故 C 选项错误；

D、 $(-2a^2)^3 = -8a^6$ ，故 D 选项正确，

故选 D.

【点睛】本题考查了同底数幂的乘除法、合并同类项、积的乘方等运算，熟练掌握各运算的运算法则是解题的关键.

6. 已知一元二次方程 $2x^2 + 2x - 1 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，下列结论正确的是 ()

A. $x_1 + x_2 = 1$ B. $x_1 \cdot x_2 = -1$ C. $|x_1| < |x_2|$ D. $x_1^2 + x_1 = \frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】【分析】直接利用根与系数的关系对 A、B 进行判断；由于 $x_1 + x_2 < 0$ ， $x_1 x_2 < 0$ ，则利用有理数的性质得到 x_1, x_2 异号，且负数的绝对值大，则可对 C 进行判断；利用一元二次方程解的定义对 D 进行判断.

【详解】根据题意得 $x_1 + x_2 = -\frac{2}{2} = -1$ ， $x_1 x_2 = -\frac{1}{2}$ ，故 A、B 选项错误；

$$\because x_1 + x_2 < 0, \quad x_1 x_2 < 0,$$

$\therefore x_1, x_2$ 异号，且负数的绝对值大，故 C 选项错误；

$\because x_1$ 为一元二次方程 $2x^2 + 2x - 1 = 0$ 的根，

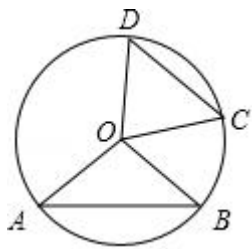
$$\therefore 2x_1^2 + 2x_1 - 1 = 0,$$

$$\therefore x_1^2 + x_1 = \frac{1}{2}, \text{ 故 D 选项正确,}$$

故选 D.

【点睛】本题考查了一元二次方程的解、一元二次方程根与系数的关系，熟练掌握相关内容是解题的关键.

7. 如图, 已知 $\odot O$ 的半径为5, 弦AB, CD所对的圆心角分别是 $\angle AOB$, $\angle COD$, 若 $\angle AOB$ 与 $\angle COD$ 互补, 弦 $CD=6$, 则弦AB的长为 ()

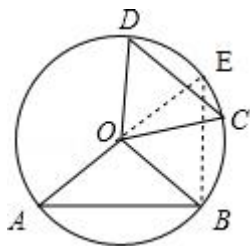


- A. 6 B. 8 C. $5\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】 **【分析】** 延长AO交 $\odot O$ 于点E, 连接BE, 由 $\angle AOB + \angle BOE = \angle AOB + \angle COD$ 知 $\angle BOE = \angle COD$, 据此可得 $BE = CD = 6$, 在 $Rt\triangle ABE$ 中利用勾股定理求解可得.

【详解】 如图, 延长AO交 $\odot O$ 于点E, 连接BE,



则 $\angle AOB + \angle BOE = 180^\circ$,

又 $\because \angle AOB + \angle COD = 180^\circ$,

$\therefore \angle BOE = \angle COD$,

$\therefore BE = CD = 6$,

$\because AE$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ABE = 90^\circ$,

$\therefore AB = \sqrt{AE^2 - BE^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$,

故选B.

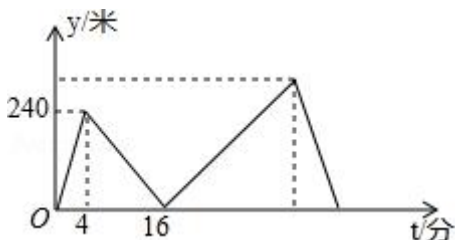
【点睛】 本题考查了弧、弦、圆心角的关系, 圆周角定理等, 正确添加辅助线以及熟练应用相关的性质与定理是解题的关键.

8. 甲、乙两人在笔直的湖边公路上同起点、同终点、同方向匀速步行2400米, 先到终点的人原地休息. 已知甲先出发4分钟, 在整个步行过程中, 甲、乙两人的距离 y (米)与甲出发的时间 t (分)之间的关系如图所示, 下列结论:

①甲步行的速度为60米/分;

- ②乙走完全程用了 32 分钟；
 ③乙用 16 分钟追上甲；
 ④乙到达终点时，甲离终点还有 300 米

其中正确的结论有 ()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】 A

【解析】 **【分析】** 根据题意和函数图象中的数据可以判断各个小题中的结论是否正确，从而可以解答本题.

【详解】 由图可得，

甲步行的速度为： $240 \div 4 = 60$ 米/分，故①正确，

乙走完全程用的时间为： $2400 \div (16 \times 60 \div 12) = 30$ (分钟)，故②错误，

乙追上甲用的时间为： $16 - 4 = 12$ (分钟)，故③错误，

乙到达终点时，甲离终点距离是： $2400 - (4 + 30) \times 60 = 360$ 米，故④错误，

故选 A.

【点睛】 本题考查了函数图象，弄清题意，读懂图象，从中找到必要的信息是解题的关键.

二、细心填一填 (本大题共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分)

9. 如果分式 $\frac{1}{x-2}$ 有意义，那么实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq 2$

【解析】 分析： 根据分式有意义，分母不等于 0 列式计算即可得解.

详解： 由题意得， $x - 2 \neq 0$,

解得 $x \neq 2$.

故答案为： $x \neq 2$.

点睛： 此题考查了分式有意义的条件： 分式有意义的条件是分母不等于 0， 分式无意义的条件是分母等于 0.

10. 因式分解： $ab^2 - a =$ _____.

【答案】 $a(b+1)(b-1)$

【解析】分析：首先提取公因式，再用公式法分解因式即可.

详解：原式 $= a(b^2-1) = a(b+1)(b-1)$.

故答案为： $a(b+1)(b-1)$.

点睛：考查因式分解，本题是提取公因式法和公式法相结合.注意分解一定要彻底.

11. 写出一个比 2 大比 3 小的无理数（用含根号的式子表示）_____.

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】【分析】先利用 $4 < 5 < 9$ ，再根据算术平方根的定义有 $2 < \sqrt{5} < 3$ ，这样就可得到满足条件的无理数.

【详解】 $\because 4 < 5 < 9$,

$$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3,$$

即 $\sqrt{5}$ 为比 2 大比 3 小的无理数.

故答案为： $\sqrt{5}$.

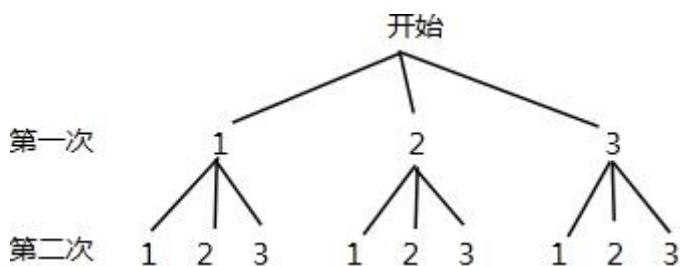
【点睛】 本题考查了估算无理数的大小，熟练掌握利用完全平方数和算术平方根对无理数的大小进行估算是解题的关键.

12. 一个不透明的口袋中有三个完全相同的小球，把它们分别标号为 1，2，3. 随机摸出一个小球然后放回，再随机摸出一个小球，则两次摸出的小球标号相同的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】分析：首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与两次摸出的小球标号相同的情况，再利用概率公式即可求得答案.

详解：根据题意，画树状图如下：



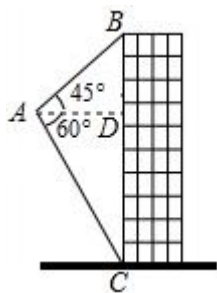
共有 9 种等可能结果，其中两次摸出的小球标号相同的有 3 种结果，

所以两次摸出的小球标号相同的概率是 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$,

故答案为： $\frac{1}{3}$.

点睛：此题考查了树状图法与列表法求概率.用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

13. 如图，航拍无人机从 A 处测得一幢建筑物顶部 B 的仰角为 45° ，测得底部 C 的俯角为 60° ，此时航拍无人机与该建筑物的水平距离 AD 为 110m，那么该建筑物的高度 BC 约为_____m (结果保留整数, $\sqrt{3} \approx 1.73$) .



【答案】 300

【解析】【分析】在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，根据正切函数求得 $BD=AD \cdot \tan \angle BAD$ ，在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，求得 $CD=AD \cdot \tan \angle CAD$ ，再根据 $BC=BD+CD$ ，代入数据计算即可.

【详解】如图， $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AD=110$ ， $\angle BAD=45^\circ$ ，

$$\therefore BD=AD \cdot \tan 45^\circ = 110 \text{ (m)},$$

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $\angle CAD=60^\circ$ ，

$$\therefore CD=AD \cdot \tan 60^\circ = 110 \times \sqrt{3} \approx 190 \text{ (m)},$$

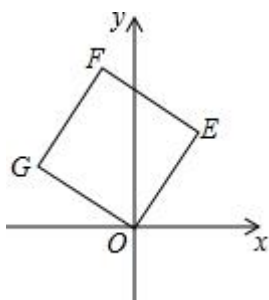
$$\therefore BC=BD+CD=110+190=300 \text{ (m)},$$

即该建筑物的高度 BC 约为 300 米，

故答案为：300.

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题，熟练应用锐角三角函数关系是解题关键.

14. 如图，将正方形 OEFG 放在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，点 E 的坐标为 (2, 3)，则点 F 的坐标为_____.



【答案】 (-1, 5)

【解析】【分析】结合全等三角形的性质可以求得点 G 的坐标，再由正方形的中心对称的性质求得点 F 的坐标.

【详解】如图，过点 E 作 x 轴的垂线 EH，垂足为 H. 过点 G 作 x 轴的垂线 EG，垂足为 G，连接 GE、FO 交于点 O'，

∴ 四边形 OEFH 是正方形,

∴ $OG=EO$, $\angle GOM=\angle OEH$, $\angle OGM=\angle EOH$,

在 $\triangle OGM$ 与 $\triangle EOH$ 中,

$$\begin{cases} \angle OGM = \angle EOH \\ OG = OE \\ \angle GOM = \angle OEH \end{cases},$$

∴ $\triangle OGM \cong \triangle EOH$ (ASA),

∴ $GM=OH=2$, $OM=EH=3$,

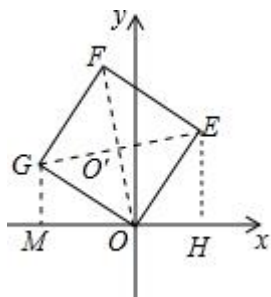
∴ $G(-3, 2)$,

∴ $O'(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$,

∴ 点 F 与点 O 关于点 O' 对称,

∴ 点 F 的坐标为 $(-1, 5)$,

故答案是: $(-1, 5)$.



【点睛】本题考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质、中点坐标公式等, 正确添加辅助线以及熟练掌握和运用相关内容是解题的关键.

15. 按一定顺序排列的一列数叫做数列, 如数列: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \dots$, 则这个数列前 2018 个数的和为_____.

【答案】 $\frac{2018}{2019}$

【解析】【分析】根据数列得出第 n 个数为 $\frac{1}{n(n+1)}$, 据此可得前 2018 个数的和为

$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{2018 \times 2019}$, 再用裂项求和计算可得.

【详解】由数列知第 n 个数为 $\frac{1}{n(n+1)}$,

则前 2018 个数的和为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2018 \times 2019}$

$= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{2018 \times 2019}$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \\
&= 1 - \frac{1}{2019} \\
&= \frac{2018}{2019},
\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{2018}{2019}$.

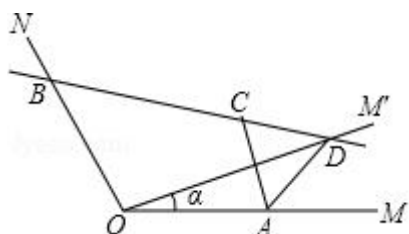
【点睛】 本题考查了规律题、有理数的加减混合运算等，熟练掌握有理数混合运算的法则以及得

出第 n 个数为 $\frac{1}{n(n+1)}$ 是解题的关键.

16. 如图，已知 $\angle MON = 120^\circ$ ，点 A, B 分别在 OM, ON 上，且 $OA = OB = a$ ，将射线 OM 绕点 O 逆时针旋转得到 OM' ，旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 120^\circ$ 且 $\alpha \neq 60^\circ$)，作点 A 关于直线 OM' 的对称点 C ，画直线 BC 交 OM' 于点 D ，连接 AC, AD ，有下列结论：

- ① $AD = CD$;
- ② $\angle ACD$ 的大小随着 α 的变化而变化;
- ③ 当 $\alpha = 30^\circ$ 时，四边形 $OADC$ 为菱形;
- ④ $\triangle ACD$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}a^2$;

其中正确的是_____。(把你认为正确结论的序号都填上).



【答案】 ①③④

【解析】 【分析】 ①根据对称的性质：对称点的连线被对称轴垂直平分可得： OM' 是 AC 的垂直平分线，再由垂直平分线的性质可作判断；

②以 O 为圆心，以 OA 为半径作 $\odot O$ ，交 AO 的延长线于 E ，连接 BE ，则 A, B, C 都在 $\odot O$ 上，根据四点共圆的性质得： $\angle ACD = \angle E = 60^\circ$ ，说明 $\angle ACD$ 是定值，不会随着 α 的变化而变化；

③当 $\alpha = 30^\circ$ 时，即 $\angle AOD = \angle COD = 30^\circ$ ，证明 $\triangle AOC$ 是等边三角形和 $\triangle ACD$ 是等边三角形，得 $OC = OA = AD = CD$ ，可作判断；

④先证明 $\triangle ACD$ 是等边三角形，当 AC 最大时， $\triangle ACD$ 的面积最大，当 AC 为直径时最大，根据面积公式计算后可作判断.

【详解】①∵A、C关于直线OM'对称，

∴OM'是AC的垂直平分线，

∴CD=AD，故①正确；

②连接OC，

由①知：OM'是AC的垂直平分线，∴OC=OA，

∴OA=OB=OC，

以O为圆心，以OA为半径作⊙O，交AO的延长线于E，连接BE，

则A、B、C都在⊙O上，

∵∠MON=120°，

∴∠BOE=60°，

∵OB=OE，

∴△OBE是等边三角形，

∴∠E=60°，

∴A、C、B、E四点共圆，

∴∠ACD=∠E=60°，故②不正确；

③当 $\alpha=30^\circ$ 时，即 $\angle AOD=\angle COD=30^\circ$ ，

∴∠AOC=60°，

∴△AOC是等边三角形，

∴∠OAC=60°，OC=OA=AC，

由①得：CD=AD，

∴∠CAD=∠ACD=∠CDA=60°，

∴△ACD是等边三角形，

∴AC=AD=CD，

∴OC=OA=AD=CD，

∴四边形OADC为菱形，故③正确；

④∵CD=AD，∠ACD=60°，

∴△ACD是等边三角形，

当AC最大时，△ACD的面积最大，

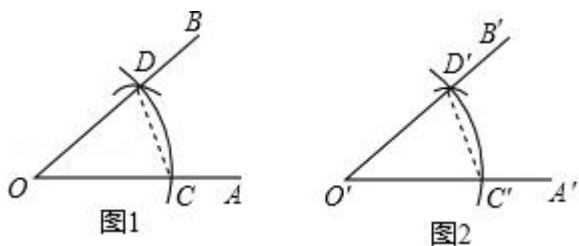
∵AC是⊙O的弦，即当AC为直径时最大，此时 $AC=2OA=2a$ ， $\alpha=90^\circ$ ，

18. 已知: $\angle AOB$.

求作: $\angle A'O'B'$, 使 $\angle A'O'B' = \angle AOB$

- (1) 如图 1, 以点 O 为圆心, 任意长为半径画弧, 分别交 OA , OB 于点 C 、 D ;
- (2) 如图 2, 画一条射线 $O'A'$, 以点 O' 为圆心, OC 长为半径画弧, 交 $O'A'$ 于点 C' ;
- (3) 以点 C' 为圆心, CD 长为半径画弧, 与第 2 步中所画的弧交于点 D' ;
- (4) 过点 D' 画射线 $O'B'$, 则 $\angle A'O'B' = \angle AOB$.

根据以上作图步骤, 请你证明 $\angle A'O'B' = \angle AOB$.



【答案】证明见解析.

【解析】【分析】由基本作图得到 $OD=OC=O'D'=O'C'$, $CD=C'D'$, 则根据“SSS”可证明 $\triangle OCD \cong \triangle O'C'D'$, 然后利用全等三角形的性质可得到 $\angle A'O'B' = \angle AOB$.

【详解】由作法得 $OD=OC=O'D'=O'C'$, $CD=C'D'$,

在 $\triangle OCD$ 和 $\triangle O'C'D'$ 中

$$\begin{cases} OC = O'C' \\ OD = O'D' \\ CD = C'D' \end{cases},$$

$$\therefore \triangle OCD \cong \triangle O'C'D',$$

$$\therefore \angle COD = \angle C'O'D',$$

$$\text{即 } \angle A'O'B' = \angle AOB.$$

【点睛】本题考查了基本作图——作一个角等于已知角, 全等三角形的判定与性质, 熟练掌握基本作图的基本方法以及利用 SSS 判定三角形全等的方法是解题的关键.

19. 近年来, 共享单车逐渐成为高校学生喜爱的“绿色出行”方式之一, 自 2016 年国庆后, 许多高校均投放了使用手机支付就可随取随用的共享单车. 某高校为了了解本校学生出行使用共享单车的情况, 随机调查了某天部分出行学生使用共享单车的情况, 并整理成如下统计表.

使用次数	0	1	2	3	4	5
人数	11	15	23	28	18	5

- (1) 这天部分出行学生使用共享单车次数的中位数是_____, 众数是_____, 该中位数的意义是_____;
- (2) 这天部分出行学生平均每人使用共享单车约多少次? (结果保留整数)
- (3) 若该校某天有 1500 名学生出行, 请你估计这天使用共享单车次数在 3 次以上 (含 3 次) 的学生有多少人?

【答案】 (1) 3、3、表示这部分出行学生这天约有一半使用共享单车的次数在 3 次以上 (或 3 次); (2) 这天部分出行学生平均每人使用共享单车约 2 次; (3) 估计这天使用共享单车次数在 3 次以上 (含 3 次) 的学生有 765 人.

【解析】 **【分析】** (1) 根据中位数和众数的定义进行求解即可;

(2) 根据加权平均数的公式列式计算即可;

(3) 用总人数乘以样本中使用共享单车次数在 3 次以上 (含 3 次) 的学生所占比例即可得.

【详解】 (1) $\because$ 总人数为 $11+15+23+28+18+5=100$,

$\therefore$ 中位数为第 50、51 个数据的平均数, 即中位数为 $\frac{3+3}{2}=3$ 次, 众数为 3 次,

其中中位数表示这部分出行学生这天约有一半使用共享单车的次数在 3 次以上 (或 3 次),

故答案为: 3、3、表示这部分出行学生这天约有一半使用共享单车的次数在 3 次以上 (或 3 次);

$$(2) \bar{x} = \frac{0 \times 11 + 1 \times 15 + 2 \times 23 + 3 \times 28 + 4 \times 18 + 5 \times 5}{100} \approx 2 \text{ (次)},$$

答: 这天部分出行学生平均每人使用共享单车约 2 次;

$$(3) 1500 \times \frac{28 + 18 + 5}{100} = 765 \text{ (人)},$$

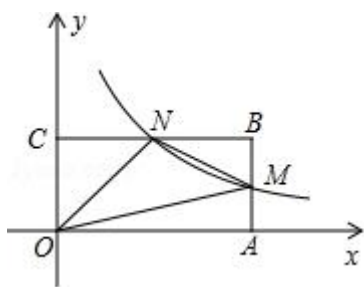
答: 估计这天使用共享单车次数在 3 次以上 (含 3 次) 的学生有 765 人.

【点睛】 本题考查了中位数、众数、平均数、用样本估计总体等, 熟练掌握中位数、众数、平均数的定义以及求解方法是解题的关键.

20. 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 OABC 的顶点 B 的坐标为 (4, 2), 直线 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ 与边 AB, BC 分别相交于点 M, N, 函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象过点 M.

(1) 试说明点 N 也在函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象上;

(2) 将直线 MN 沿 y 轴的负方向平移得到直线 M'N', 当直线 M'N' 与函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象仅有一个交点时, 求直线 M'N' 的解析式.



【答案】(1) 说明见解析；(2) 直线 $M'N'$ 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

【解析】【分析】(1) 根据矩形 OABC 的顶点 B 的坐标为 (4, 2)，可得点 M 的横坐标为 4，点 N 的纵坐标为 2，把 $x=4$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ，得 $y = \frac{1}{2}$ ，可求点 M 的坐标为 $(4, \frac{1}{2})$ ，把 $y=2$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ，得 $x=1$ ，可求点 N 的坐标为 (1, 2)，由函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象过点 M，根据待定系数法可求出函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的解析式，把 N (1, 2) 代入 $y = \frac{k}{x}$ ，即可作出判断；

(2) 设直线 $M'N'$ 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + b$ ，由 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + b \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$ 得 $x^2 - 2bx + 4 = 0$ ，再根据判别式即可求解.

【详解】(1) $\because$ 矩形 OABC 的顶点 B 的坐标为 (4, 2)，

$\therefore$ 点 M 的横坐标为 4，点 N 的纵坐标为 2，

把 $x=4$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ，得 $y = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(4, \frac{1}{2})$ ，

把 $y=2$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ，得 $x=1$ ，

$\therefore$ 点 N 的坐标为 (1, 2)，

$\because$ 函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象过点 M，

$\therefore k = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ ，

$\therefore y = \frac{2}{x}$ ($x > 0$)，

把 N (1, 2) 代入 $y = \frac{2}{x}$ ，得 $2=2$ ，

$\therefore$ 点 N 也在函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象上；

(2) 设直线 $M'N'$ 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + b$ ，

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + b \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \text{得 } x^2 - 2bx + 4 = 0,$$

$\therefore$ 直线 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 与函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象仅有一个交点,

$$\therefore \Delta = (-2b)^2 - 4 \times 4 = 0,$$

解得 $b = 2$, $b_2 = -2$ (舍去),

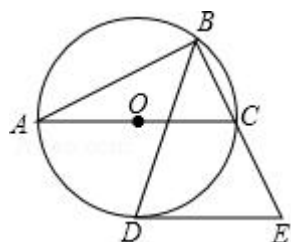
$\therefore$ 直线 $M'N'$ 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

【点睛】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 矩形的性质, 直线与双曲线的交点等, 综合性较强, 弄清题意熟练掌握和灵活运用反比例函数的相关知识进行解题是关键.

21. 如图, 以 $\triangle ABC$ 的边 AC 为直径的 $\odot O$ 恰为 $\triangle ABC$ 的外接圆, $\angle ABC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D , 过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 的延长线于点 E .

(1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $AB = 25$, $BC = \sqrt{5}$, 求 DE 的长.



【答案】 (1) 证明见解析; (2) $DE = \frac{15}{4}$.

【解析】 **【分析】** (1) 直接利用圆周角定理以及结合切线的判定方法得出 DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 首先过点 C 作 $CG \perp DE$, 垂足为 G , 则四边形 $ODGC$ 为正方形, 得出 $\tan \angle CEG = \tan \angle ACB$,

$$\frac{CG}{GE} = \frac{AB}{BC}, \text{ 即可求出答案.}$$

【详解】 (1) 如图, 连接 OD ,

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ,$$

$\therefore DE \parallel AC$,

$$\therefore \angle ODE = \angle AOD = 90^\circ,$$

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线;

$$(2) \text{ 在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } AB=2\sqrt{5}, BC=\sqrt{5},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5,$$

$$\therefore OD = \frac{5}{2},$$

过点 C 作 $CG \perp DE$, 垂足为 G ,

则四边形 $ODGC$ 为正方形,

$$\therefore DG = CG = OD = \frac{5}{2},$$

$$\therefore DE \parallel AC,$$

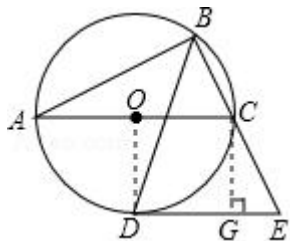
$$\therefore \angle CEG = \angle ACB,$$

$$\therefore \tan \angle CEG = \tan \angle ACB,$$

$$\therefore \frac{CG}{GE} = \frac{AB}{BC}, \text{ 即 } \frac{\frac{5}{2}}{GE} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}},$$

$$\text{解得: } GE = \frac{5}{4},$$

$$\therefore DE = DG + GE = \frac{15}{4}.$$



【点睛】本题考查了切线的判定、正方形的判定与性质、解直角三角形的应用等，正确添加辅助线、熟练掌握和应用切线的判定、三角函数的应用等是解题的关键.

22. 为拓宽学生视野，引导学生主动适应社会，促进书本知识和生活经验的深度融合，我市某中学决定组织部分班级去赤壁开展研学旅行活动，在参加此次活动的师生中，若每位老师带 17 个学生，还剩 12 个学生没人带；若每位老师带 18 个学生，就有一位老师少带 4 个学生. 现有甲、乙两种大客车，它们的载客量和租金如表所示.

	甲种客车	乙种客车
--	------	------

载客量/ (人/辆)	30	42
租金/ (元/辆)	300	400

学校计划此次研学旅行活动的租车总费用不超过 3100 元，为了安全，每辆客车上至少要有 2 名老师.

- (1) 参加此次研学旅行活动的老师和学生各有多少人？
- (2) 既要保证所有师生都有车坐，又要保证每辆客车上至少要有 2 名老师，可知租用客车总数为_____辆；
- (3) 你能得出哪几种不同的租车方案？其中哪种租车方案最省钱？请说明理由.

【答案】 (1) 老师有 16 名，学生有 284 名； (2) 8； (3) 共有 3 种租车方案，最节省费用的租车方案是：租用甲种客车 3 辆，乙种客车 5 辆.

【解析】【分析】 (1) 设老师有 x 名，学生有 y 名，根据等量关系：若每位老师带 17 个学生，还剩 12 个学生没人带；若每位老师带 18 个学生，就有一位老师少带 4 个学生，列出二元一次方程组，解出即可；

(2) 由 (1) 中得出的教师人数可以确定出最多需要几辆汽车，再根据总人数以及汽车最多的是 42 座的可以确定出汽车总数不能小于 $\frac{300}{42} = \frac{50}{7}$ (取整为 8) 辆，由此即可求出；

(3) 设租用 x 辆乙种客车，则甲种客车数为： $(8 - x)$ 辆，由题意得出 $400x + 300(8 - x) \leq 3100$ ，得出 x 取值范围，分析得出即可.

【详解】 (1) 设老师有 x 名，学生有 y 名，

依题意，列方程组为 $\begin{cases} 17x = y - 12 \\ 18x = y + 4 \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} x = 16 \\ y = 284 \end{cases}$ ，

答：老师有 16 名，学生有 284 名；

(2) $\because$ 每辆客车上至少要有 2 名老师，

$\therefore$ 汽车总数不能大于 8 辆；

又要保证 300 名师生有车坐，汽车总数不能小于 $\frac{300}{42} = \frac{50}{7}$ (取整为 8) 辆，

综合起来可知汽车总数为 8 辆，

故答案为：8；

(3) 设租用 x 辆乙种客车，则甲种客车数为： $(8 - x)$ 辆，

$\because$ 车总费用不超过 3100 元，

$\therefore 400x + 300(8 - x) \leq 3100$ ，

解得: $x \leq 7$,

为使 300 名师生都有座,

$$\therefore 42x + 30(8 - x) \geq 300,$$

解得: $x \geq 5$,

$$\therefore 5 \leq x \leq 7 \text{ (} x \text{ 为整数),}$$

$\therefore$ 共有 3 种租车方案:

方案一: 租用甲种客车 3 辆, 乙种客车 5 辆, 租车费用为 2900 元;

方案二: 租用甲种客车 2 辆, 乙种客车 6 辆, 租车费用为 3000 元;

方案三: 租用甲种客车 1 辆, 乙种客车 7 辆, 租车费用为 3100 元;

故最节省费用的租车方案是: 租用甲种客车 3 辆, 乙种客车 5 辆.

【点睛】 本题考查了二元一次方程组的应用, 一元一次不等式组的应用, 弄清题意找准等量关系列出方程组、找准不等关系列出不等式组是解题的关键.

23. 定义:

我们知道, 四边形的一条对角线把这个四边形分成了两个三角形, 如果这两个三角形相似 (不全等), 我们就把这条对角线叫做这个四边形的“相似对角线”.

理解:

(1) 如图 1, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 在正方形网格中, 请你只用无刻度的直尺在网格中找到一点 D, 使四边形 ABCD 是以 AC 为“相似对角线”的四边形 (保留画图痕迹, 找出 3 个即可);

(2) 如图 2, 在四边形 ABCD 中, $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle ADC = 140^\circ$, 对角线 BD 平分 $\angle ABC$.

求证: BD 是四边形 ABCD 的“相似对角线”;

(3) 如图 3, 已知 FH 是四边形 EFCH 的“相似对角线”, $\angle EFH = \angle HFG = 30^\circ$, 连接 EG, 若 $\triangle EFG$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求 FH 的长.

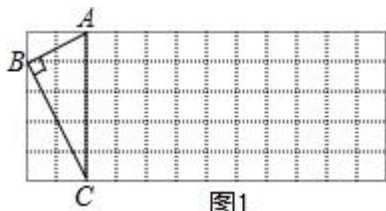


图1

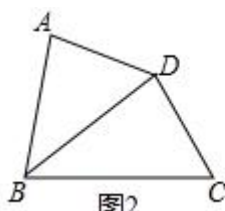


图2

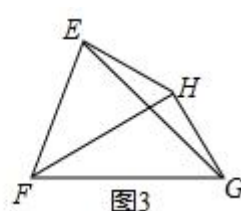


图3

【答案】 (1) 见解析; (2) 证明见解析; (3) $FH = 2\sqrt{2}$.

【解析】 **【分析】** (1) 先求出 AB, BC, AC, 再分情况求出 CD 或 AD, 即可画出图形;

(2) 先判断出 $\angle A + \angle ADB = 140^\circ = \angle ADC$, 即可得出结论;

(3) 先判断出 $\triangle FEH \sim \triangle FHG$, 得出 $FH^2 = FE \cdot FG$, 再判断出 $EQ = \frac{\sqrt{3}}{2}FE$, 继而求出 $FG \cdot FE = 8$, 即可得出结论.

【详解】(1) 由图 1 知, $AB = \sqrt{5}$, $BC = 2\sqrt{5}$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = 5$,

$\therefore$ 四边形 ABCD 是以 AC 为“相似对角线”的四边形,

当 $\angle ACD = 90^\circ$ 时, $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ 或 $\triangle ACD \sim \triangle CBA$,

$$\therefore \frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AB} = 2,$$

$$\therefore CD = 10 \text{ 或 } CD = 2.5$$

同理: 当 $\angle CAD = 90^\circ$ 时, $AD = 2.5$ 或 $AD = 10$,

(2) $\because \angle ABC = 80^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ADB = 140^\circ$$

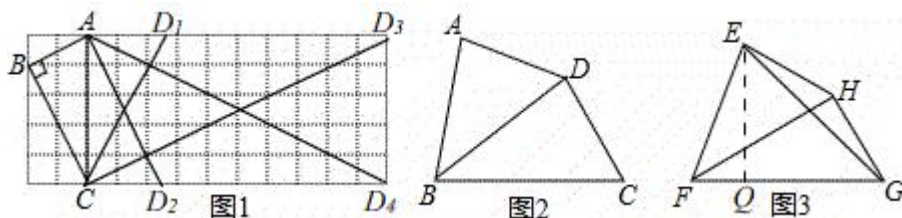
$$\therefore \angle ADC = 140^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC + \angle ADB = 140^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle BDC,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BDC,$$

$\therefore$ BD 是四边形 ABCD 的“相似对角线”;



(3) 如图 3,

$\therefore$ FH 是四边形 EFGH 的“相似对角线”,

$\therefore \triangle EFG$ 与 $\triangle HFG$ 相似,

$$\therefore \angle EFH = \angle HFG,$$

$$\therefore \triangle FEH \sim \triangle FHG,$$

$$\therefore \frac{FE}{FH} = \frac{FH}{FG},$$

$$\therefore FH^2 = FE \cdot FG,$$

过点 E 作 $EQ \perp FG$ 于 Q,

$$\therefore EQ = FE \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} FE,$$

$$\therefore \frac{1}{2} FG \times EQ = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{1}{2} FG \times \frac{\sqrt{3}}{2} FE = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore FG \cdot FE = 8,$$

$$\therefore FH^2 = FE \cdot FG = 8,$$

$$\therefore FH = 2\sqrt{2}.$$

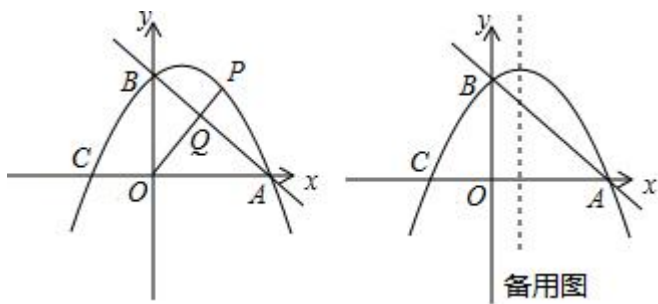
【点睛】本题考查了相似三角形的综合题，涉及到新概念、相似三角形的判定与性质等，正确理解新概念，熟练应用相似三角形的相关知识是解题的关键.

24. 如图，直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B . 抛物线 $y = -\frac{3}{8}x^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点，与 x 轴的另一个交点为 C .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 P 是第一象限抛物线上的点，连接 OP 交直线 AB 于点 Q . 设点 P 的横坐标为 m , PQ 与 OQ 的比值为 y , 求 y 与 m 的数关系式，并求出 PQ 与 OQ 的比值的最大值;

(3) 点 D 是抛物线对称轴上的一动点，连接 OD 、 CD ，设 $\triangle ODC$ 外接圆的圆心为 M ，当 $\sin \angle ODC$ 的值最大时，求点 M 的坐标.



【答案】(1) 抛物线解析式为 $y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$; (2) $y = -\frac{1}{8}m^2 + \frac{1}{2}m$, PQ 与 OQ 的比值的最大值为 $\frac{1}{2}$; (3) 点 M 的坐标为 $(-1, \sqrt{3})$ 或 $(-1, -\sqrt{3})$.

【解析】【分析】(1) 根据直线解析式求得点 A 、 B 的坐标，将两点的坐标代入抛物线解析式求解可得;

(2) 过点 P 作 y 轴的平行线交 AB 于点 E , 据此知 $\triangle PEQ \sim \triangle OBQ$, 根据对应边成比例得 $y = \frac{1}{3}PE$, 由 $P(m, -\frac{3}{8}m^2 + \frac{3}{4}m + 3)$ 、 $E(m, -\frac{3}{4}m + 3)$ 得 $PE = -\frac{3}{8}m^2 + \frac{3}{2}m$, 结合 $y = \frac{1}{3}PE$ 可得函数解析式, 利用二次函数性质得其最大值;

(3) 设 CO 的垂直平分线与 CO 交于点 N, 知点 M 在 CO 的垂直平分线上, 连接 OM、CM、DM, 根据 $\angle ODC = \frac{1}{2} \angle CMO = \angle OMN$ 、 $MC=MO=MD$ 知 $\sin \angle ODC = \sin \angle OMN = \frac{NO}{MO} = \frac{1}{MO}$, 当 MD 取最小值时, $\sin \angle ODC$ 最大, 据此进一步求解可得.

【详解】(1) 在 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 中, 令 $y=0$ 得 $x=4$, 令 $x=0$ 得 $y=3$,

$\therefore$ 点 A (4, 0)、B (0, 3),

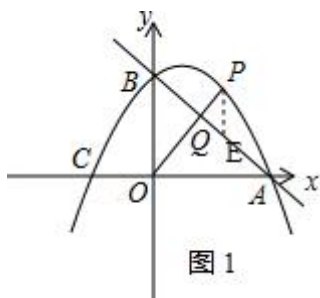
把 A (4, 0)、B (0, 3) 代入 $y = -\frac{3}{8}x^2 + bx + c$, 得:

$$\begin{cases} -\frac{3}{8} \times 4^2 + 4b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = \frac{3}{4} \\ c = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$;

(2) 如图 1, 过点 P 作 y 轴的平行线交 AB 于点 E,



则 $\triangle PEQ \sim \triangle OBQ$,

$$\therefore \frac{PQ}{OQ} = \frac{PE}{OB},$$

$$\therefore \frac{PQ}{OQ} = y, \quad OB=3,$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}PE,$$

$$\therefore P \left(m, -\frac{3}{8}m^2 + \frac{3}{4}m + 3 \right), \quad E \left(m, -\frac{3}{4}m + 3 \right),$$

$$\text{则 } PE = \left(-\frac{3}{8}m^2 + \frac{3}{4}m + 3 \right) - \left(-\frac{3}{4}m + 3 \right) = -\frac{3}{8}m^2 + \frac{3}{2}m,$$

$$\therefore y = \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{8}m^2 + \frac{3}{2}m \right) = -\frac{1}{8}m^2 + \frac{1}{2}m = -\frac{1}{8}(m-2)^2 + \frac{1}{2},$$

$$\therefore 0 < m < 3,$$

$$\therefore \text{当 } m=2 \text{ 时, } y_{\text{最大值}} = \frac{1}{2},$$

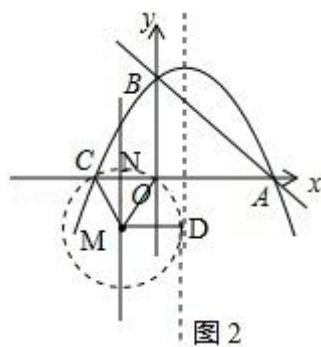
∴ PQ 与 OQ 的比值的最大值为 $\frac{1}{2}$;

(3) 如图, 由抛物线 $y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$ 易求 C (-2, 0), 对称轴为直线 $x=1$,

∴ △ODC 的外心为点 M,

∴ 点 M 在 CO 的垂直平分线上,

设 CO 的垂直平分线与 CO 交于点 N, 连接 OM、CM、DM,



则 $\angle ODC = \frac{1}{2} \angle CMO = \angle OMN$, $MC = MO = MD$,

$$\therefore \sin \angle ODC = \sin \angle OMN = \frac{NO}{MO} = \frac{1}{MO},$$

又 $MO = MD$,

∴ 当 MD 取最小值时, $\sin \angle ODC$ 最大,

此时 ⊙M 与直线 $x=1$ 相切, $MD=2$,

$$MN = \sqrt{OM^2 - ON^2} = \sqrt{3},$$

∴ 点 M (-1, $-\sqrt{3}$),

根据对称性, 另一点 (-1, $\sqrt{3}$) 也符合题意;

综上所述, 点 M 的坐标为 (-1, $\sqrt{3}$) 或 (-1, $-\sqrt{3}$).

【点睛】 本题考查了函数与几何综合题, 涉及到待定系数法、相似三角形的判定与性质、解直角三角形的应用、最值问题等, 综合性质较强, 有一定的难度, 正确添加辅助线, 利用数形结合思想、灵活应用相关知识是解题的关键.