

2017 年湖北省随州市中考数学试卷

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

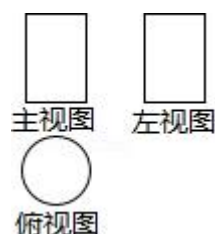
1. (3 分) -2 的绝对值是 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

2. (3 分) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^3+a^3=a^6$ B. $(a-b)^2=a^2-b^2$ C. $(-a^3)^2=a^6$ D. $a^{12}\div a^2=a^6$

3. (3 分) 如图是某几何体的三视图, 这个几何体是 ()



- A. 圆锥 B. 长方体 C. 圆柱 D. 三棱柱

4. (3 分) 一组数据 2, 3, 5, 4, 4 的中位数和平均数分别是 ()

- A. 4 和 3.5 B. 4 和 3.6 C. 5 和 3.5 D. 5 和 3.6

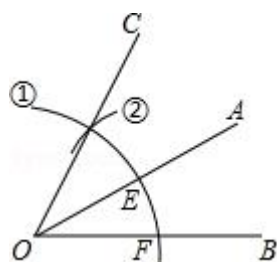
5. (3 分) 某同学用剪刀沿直线将一片平整的银杏叶减掉一部分 (如图), 发现剩下的银杏叶的周长比原银杏叶的周长要小, 能正确解释这一现象的数学知识是 ()



- A. 两点之间线段最短 B. 两点确定一条直线
C. 垂线段最短 D. 经过直线外一点, 有且只有一条直线与这条直线平行

6. (3 分) 如图, 用尺规作图作 $\angle AOC = \angle AOB$ 的第一步是以点 O 为圆心, 以任

意长为半径画弧①，分别交 OA、OB 于点 E、F，那么第二步的作图痕迹②的作法是（ ）

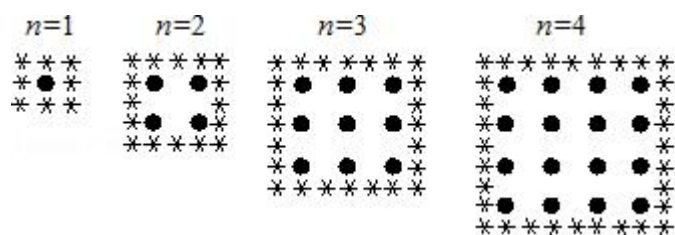


- A. 以点 F 为圆心，OE 长为半径画弧 B. 以点 F 为圆心，EF 长为半径画弧
C. 以点 E 为圆心，OE 长为半径画弧 D. 以点 E 为圆心，EF 长为半径画弧

7. (3 分) 小明到商店购买“五四青年节”活动奖品，购买 20 只铅笔和 10 本笔记本共需 110 元，但购买 30 支铅笔和 5 本笔记本只需 85 元，设每支铅笔 x 元，每本笔记本 y 元，则可列方程组（ ）

- A. $\begin{cases} 20x + 30y = 110 \\ 10x + 5y = 85 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 20x + 10y = 110 \\ 30x + 5y = 85 \end{cases}$
C. $\begin{cases} 20x + 5y = 110 \\ 30x + 10y = 85 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 5x + 20y = 110 \\ 10x + 30y = 85 \end{cases}$

8. (3 分) 在公园内，牡丹按正方形种植，在它的周围种植芍药，如图反映了牡丹的列数 (n) 和芍药的数量规律，那么当 $n=11$ 时，芍药的数量为（ ）



- A. 84 株 B. 88 株 C. 92 株 D. 121 株

9. (3 分) 对于二次函数 $y=x^2-2mx-3$ ，下列结论错误的是（ ）

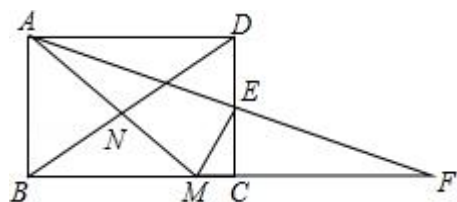
- A. 它的图象与 x 轴有两个交点
B. 方程 $x^2-2mx=3$ 的两根之积为 -3

C. 它的图象的对称轴在 y 轴的右侧

D. $x < m$ 时, y 随 x 的增大而减小

10. (3 分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB < BC$, E 为 CD 边的中点, 将 $\triangle ADE$ 绕点 E 顺时针旋转 180° , 点 D 的对应点为 C , 点 A 的对应点为 F , 过点 E 作 $ME \perp AF$ 交 BC 于点 M , 连接 AM 、 BD 交于点 N , 现有下列结论:

① $AM = AD + MC$; ② $AM = DE + BM$; ③ $DE^2 = AD \cdot CM$; ④ 点 N 为 $\triangle ABM$ 的外心. 其中正确的个数为 ()



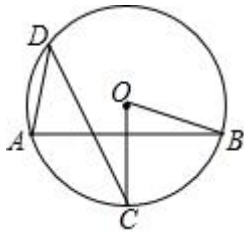
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题 (本小题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分, 只需要将结果直接填写在答题卡对应题号的横线上.)

11. (3 分) 根据中央“精准扶贫”规划, 每年要减贫约 11700000 人, 将数据 11700000 用科学记数法表示为_____.

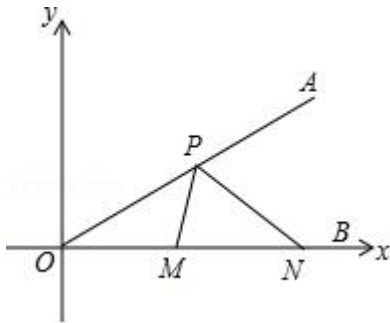
12. (3 分) “抛掷一枚质地均匀的硬币, 正面向上”是_____事件 (从“必然”、“随机”、“不可能”中选一个).

13. (3 分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的弦, 半径 OC 垂直 AB , 点 D 是 $\odot O$ 上一点, 且点 D 与点 C 位于弦 AB 两侧, 连接 AD 、 CD 、 OB , 若 $\angle BOC = 70^\circ$, 则 $\angle ADC =$ 度.



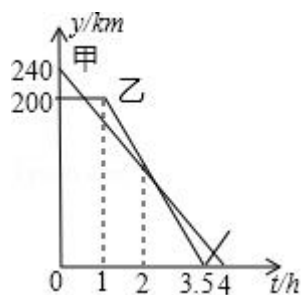
14. (3分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6$, $AC=5$, 点 D 在边 AB 上, 且 $AD=2$, 点 E 在边 AC 上, 当 $AE=$ _____时, 以 A 、 D 、 E 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似.

15. (3分) 如图, $\angle AOB$ 的边 OB 与 x 轴正半轴重合, 点 P 是 OA 上的一动点, 点 $N(3, 0)$ 是 OB 上的一定点, 点 M 是 ON 的中点, $\angle AOB=30^\circ$, 要使 $PM+PN$ 最小, 则点 P 的坐标为_____.



16. (3分) 在一条笔直的公路上有 A 、 B 、 C 三地, C 地位于 A 、 B 两地之间, 甲车从 A 地沿这条公路匀速驶向 C 地, 乙车从 B 地沿这条公路匀速驶向 A 地, 在甲车出发至甲车到达 C 地的过程中, 甲、乙两车各自与 C 地的距离 y (km) 与甲车行驶时间 t (h) 之间的函数关系如图所示. 下列结论:

- ①甲车出发 2h 时, 两车相遇;
- ②乙车出发 1.5h 时, 两车相距 170km;
- ③乙车出发 $2\frac{5}{7}$ h 时, 两车相遇;
- ④甲车到达 C 地时, 两车相距 40km. 其中正确的是_____ (填写所有正确结论的序号).



三、解答题（本题共 9 小题，共 72 分，解答应写出必要演算步骤、文字说明或证明过程.）

17. (5 分) 计算: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (2017 - \pi)^0 + \sqrt{(-3)^2} - |-2|$.

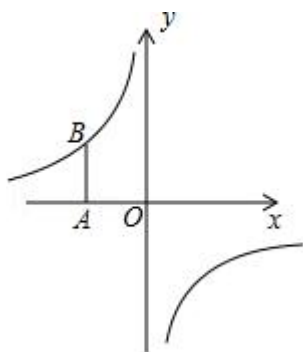
18. (6 分) 解分式方程: $\frac{3}{x^2-x} + 1 = \frac{x}{x-1}$.

19. (6 分) 如图，在平面直角坐标系中，将坐标原点 O 沿 x 轴向左平移 2 个单位长度得到点 A, 过点 A 作 y 轴的平行线交反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象于点 B, $AB = \frac{3}{2}$.

(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 若 P (x_1 , y_1)、Q (x_2 , y_2) 是该反比例函数图象上的两点, 且 $x_1 < x_2$ 时,

$y_1 > y_2$, 指出点 P、Q 各位于哪个象限? 并简要说明理由.



20. (7 分) 风电已成为我国继煤电、水电之后的第三大电源，风电机组主要由塔杆和叶片组成（如图 1），图 2 是从图 1 引出的平面图．假设你站在 A 处测得塔杆顶端 C 的仰角是 55° ，沿 HA 方向水平前进 43 米到达山底 G 处，在山顶 B 处发现正好一叶片到达最高位置，此时测得叶片的顶端 D（D、C、H 在同一直线上）的仰角是 45° ．已知叶片的长度为 35 米（塔杆与叶片连接处的长度忽略不计），山高 BG 为 10 米， $BG \perp HG$ ， $CH \perp AH$ ，求塔杆 CH 的高．（参考数据： $\tan 55^\circ \approx 1.4$ ， $\tan 35^\circ \approx 0.7$ ， $\sin 55^\circ \approx 0.8$ ， $\sin 35^\circ \approx 0.6$ ）



图1

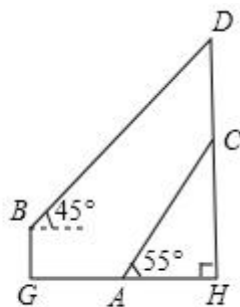
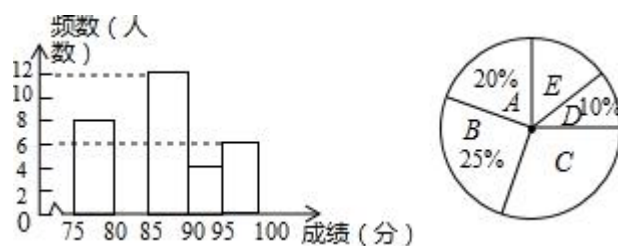


图2

21. (8分) 某校为组织代表队参加市“拜炎帝、诵经典”吟诵大赛，初赛后对选手成绩进行了整理，分成5个小组 (x 表示成绩，单位：分)，A组： $75 \leq x < 80$ ；B组： $80 \leq x < 85$ ；C组： $85 \leq x < 90$ ；D组： $90 \leq x < 95$ ；E组： $95 \leq x < 100$. 并绘制出如图两幅不完整的统计图.

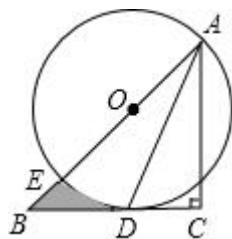


请根据图中信息，解答下列问题：

- (1) 参加初赛的选手共有_____名，请补全频数分布直方图；
- (2) 扇形统计图中，C组对应的圆心角是多少度？E组人数占参赛选手的百分比是多少？
- (3) 学校准备组成8人的代表队参加市级决赛，E组6名选手直接进入代表队，现要从D组中的两名男生和两名女生中，随机选取两名选手进入代表队，请用列表或画树状图的方法，求恰好选中一名男生和一名女生的概率.

22. (8 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=BC$, 点 O 在 AB 上, 经过点 A 的 $\odot O$ 与 BC 相切于点 D , 交 AB 于点 E .

- (1) 求证: AD 平分 $\angle BAC$;
- (2) 若 $CD=1$, 求图中阴影部分的面积 (结果保留 π).



23. (10 分) 某水果店在两周内, 将标价为 10 元/斤的某种水果, 经过两次降价后的价格为 8.1 元/斤, 并且两次降价的百分率相同.

- (1) 求该种水果每次降价的百分率;
- (2) 从第一次降价的第 1 天算起, 第 x 天 (x 为整数) 的售价、销量及储存和损耗费用的相关信息如表所示. 已知该种水果的进价为 4.1 元/斤, 设销售该水果第 x (天) 的利润为 y (元), 求 y 与 x ($1 \leq x < 15$) 之间的函数关系式, 并求出第几天时销售利润最大?

时间 x (天)	$1 \leq x < 9$	$9 \leq x < 15$	$x \geq 15$
售价 (元/斤)	第 1 次降价后的价格	第 2 次降价后的价格	
销量 (斤)	$80 - 3x$	$120 - x$	
储存和损耗费用 (元)	$40 + 3x$	$3x^2 - 64x + 400$	

(3) 在 (2) 的条件下, 若要使第 15 天的利润比 (2) 中最大利润最多少 127.5 元, 则第 15 天在第 14 天的价格基础上最多可降多少元?

24. (10 分) 如图, 分别是可活动的菱形和平行四边形学具, 已知平行四边形较短的边与菱形的边长相等.

(1) 在一次数学活动中, 某小组学生将菱形的一边与平行四边形较短边重合, 摆拼成如图 1 所示的图形, AF 经过点 C , 连接 DE 交 AF 于点 M , 观察发现: 点 M 是 DE 的中点.

下面是两位学生有代表性的证明思路:

思路 1: 不需作辅助线, 直接证三角形全等;

思路 2: 不证三角形全等, 连接 BD 交 AF 于点 H

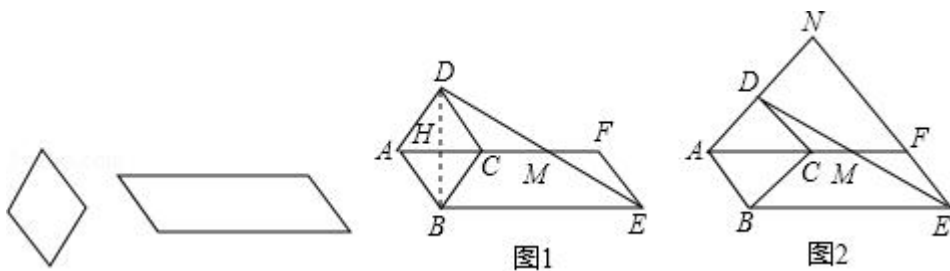
请参考上面的思路, 证明点 M 是 DE 的中点 (只需用一种方法证明);

(2) 如图 2, 在 (1) 的前提下, 当 $\angle ABE = 135^\circ$ 时, 延长 AD 、 EF 交于点 N ,

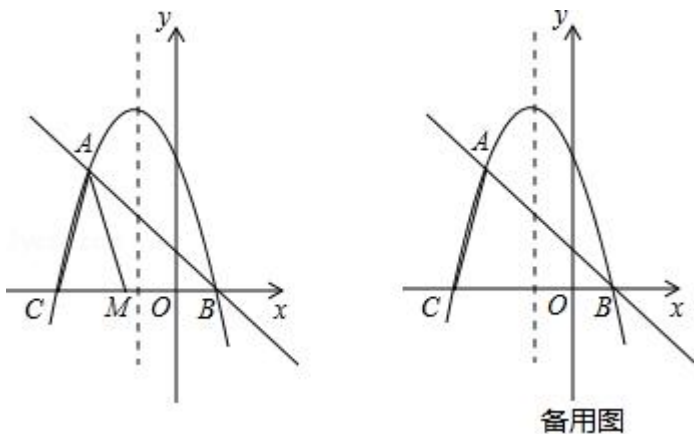
求 $\frac{AM}{NE}$ 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $\frac{AF}{AB} = k$ (k 为大于 $\sqrt{2}$ 的常数), 直接用含 k 的代数式

表示 $\frac{AM}{MF}$ 的值.



25. (12 分) 在平面直角坐标系中, 我们定义直线 $y=ax-a$ 为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 的“梦想直线”; 有一个顶点在抛物线上, 另有一个顶点在 y 轴上的三角形为其“梦想三角形”.



已知抛物线 $y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$ 与其“梦想直线”交于 A、B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 x 轴负半轴交于点 C.

- (1) 填空: 该抛物线的“梦想直线”的解析式为_____, 点 A 的坐标为_____, 点 B 的坐标为_____;

- (2) 如图, 点 M 为线段 CB 上一动点, 将 $\triangle ACM$ 以 AM 所在直线为对称轴翻折, 点 C 的对称点为 N , 若 $\triangle AMN$ 为该抛物线的“梦想三角形”, 求点 N 的坐标;
- (3) 当点 E 在抛物线的对称轴上运动时, 在该抛物线的“梦想直线”上, 是否存在点 F , 使得以点 A 、 C 、 E 、 F 为顶点的四边形为平行四边形? 若存在, 请直接写出点 E 、 F 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

2017 年湖北省随州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2017•随州) -2 的绝对值是 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【考点】15: 绝对值.

【分析】根据负数的绝对值等于它的相反数解答.

【解答】解: -2 的绝对值是 2,

即 $|-2|=2$.

故选: A.

【点评】本题考查了绝对值的性质: 正数的绝对值是它本身; 负数的绝对值是它的相反数; 0 的绝对值是 0.

2. (3 分) (2017•随州) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^3+a^3=a^6$ B. $(a-b)^2=a^2-b^2$ C. $(-a^3)^2=a^6$ D. $a^{12}\div a^2=a^6$

【考点】4I: 整式的混合运算.

【专题】512: 整式.

【分析】各项计算得到结果, 即可作出判断.

【解答】解: A、原式 $=2a^3$, 不符合题意;

B、原式 $=a^2-2ab+b^2$, 不符合题意;

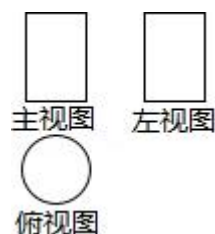
C、原式 $=a^6$, 符合题意;

D、原式 $=a^{10}$, 不符合题意,

故选 C

【点评】此题考查了整式的混合运算, 熟练掌握运算是解本题的关键.

3. (3 分) (2017•随州) 如图是某几何体的三视图, 这个几何体是 ()



- A. 圆锥 B. 长方体 C. 圆柱 D. 三棱柱

【考点】U3: 由三视图判断几何体.

【分析】主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看, 所得到的图形.

【解答】解: 这个几何体是圆柱体.

故选 C.

【点评】 本题考查由三视图想象立体图形. 做这类题时要借助三种视图表示物体的特点, 从主视图上弄清物体的上下和左右形状; 从俯视图上弄清物体的左右和前后形状; 从左视图上弄清楚物体的上下和前后形状, 综合分析, 合理猜想, 结合生活经验描绘出草图后, 再检验是否符合题意.

4. (3 分) (2017•随州) 一组数据 2, 3, 5, 4, 4 的中位数和平均数分别是 ()

A. 4 和 3.5 B. 4 和 3.6 C. 5 和 3.5 D. 5 和 3.6

【考点】 W4: 中位数; W1: 算术平均数.

【分析】 根据中位数的定义和平均数的求法计算即可, 中位数是将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

【解答】 解: 把这组数据按从大到小的顺序排列是: 2, 3, 4, 4, 5,
故这组数据的中位数是: 4.

平均数 = $(2+3+4+4+5) \div 5 = 3.6$.

故选 B.

【点评】 本题考查了中位数的定义和平均数的求法, 解题的关键是牢记定义, 此题比较简单, 易于掌握.

5. (3 分) (2017•随州) 某同学用剪刀沿直线将一片平整的银杏叶减掉一部分 (如图), 发现剩下的银杏叶的周长比原银杏叶的周长要小, 能正确解释这一现象的数学知识是 ()



A. 两点之间线段最短

B. 两点确定一条直线

C. 垂线段最短

D. 经过直线外一点, 有且只有一条直线与这条直线平行

【考点】 IC: 线段的性质: 两点之间线段最短.

【分析】 根据两点之间, 线段最短进行解答.

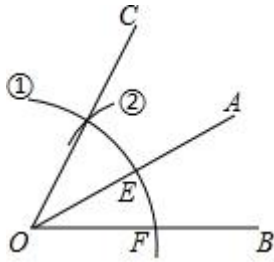
【解答】 解: 某同学用剪刀沿直线将一片平整的银杏叶减掉一部分 (如图), 发现剩下的银杏叶的周长比原银杏叶的周长要小, 能正确解释这一现象的数学知识是两点之间线段最短.

故选: A.

【点评】 此题主要考查了线段的性质, 关键是掌握两点之间, 线段最短.

6. (3 分) (2017•随州) 如图, 用尺规作图作 $\angle AOC = \angle AOB$ 的第一步是以点 O

为圆心，以任意长为半径画弧①，分别交 OA、OB 于点 E、F，那么第二步的作图痕迹②的作法是（ ）



- A. 以点 F 为圆心，OE 长为半径画弧
- B. 以点 F 为圆心，EF 长为半径画弧
- C. 以点 E 为圆心，OE 长为半径画弧
- D. 以点 E 为圆心，EF 长为半径画弧

【考点】 N2：作图—基本作图.

【分析】 根据作一个角等于一直角的作法即可得出结论.

【解答】 解：用尺规作图作 $\angle AOC = \angle AOB$ 的第一步是以点 O 为圆心，以任意长为半径画弧①，分别交 OA、OB 于点 E、F，第二步的作图痕迹②的作法是以点 E 为圆心，EF 长为半径画弧. 故选 D.

【点评】 本题考查的是作图 - 基本作图，熟知作一个角等于一直角的步骤是解答此题的关键.

7. (3 分) (2017•随州) 小明到商店购买“五四青年节”活动奖品，购买 20 只铅笔和 10 本笔记本共需 110 元，但购买 30 支铅笔和 5 本笔记本只需 85 元，设每支铅笔 x 元，每本笔记本 y 元，则可列方程组（ ）

- A. $\begin{cases} 20x + 30y = 110 \\ 10x + 5y = 85 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 20x + 10y = 110 \\ 30x + 5y = 85 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} 20x + 5y = 110 \\ 30x + 10y = 85 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 5x + 20y = 110 \\ 10x + 30y = 85 \end{cases}$

【考点】 99：由实际问题抽象出二元一次方程组.

【分析】 设每支铅笔 x 元，每本笔记本 y 元，根据购买 20 只铅笔和 10 本笔记本共需 110 元，但购买 30 支铅笔和 5 本笔记本只需 85 元可列出方程组.

【解答】 解：设每支铅笔 x 元，每本笔记本 y 元，

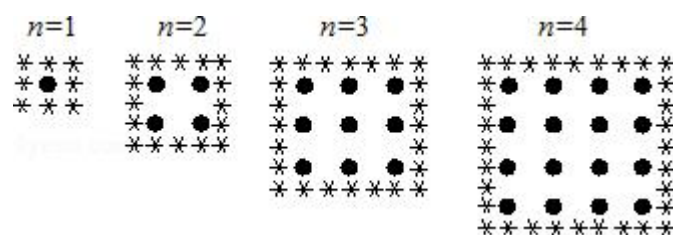
$$\text{根据题意得} \begin{cases} 20x + 10y = 110 \\ 30x + 5y = 85 \end{cases}.$$

故选 B.

【点评】 本题考查了由实际问题抽象出二元一次方程组，根据实际问题中的条件列方程组时，要注意抓住题目中的一些关键性词语，找出等量关系，列出方程组.

8. (3 分) (2017•随州) 在公园内，牡丹按正方形种植，在它的周围种植芍药，

如图反映了牡丹的列数 (n) 和芍药的数量规律, 那么当 $n=11$ 时, 芍药的数量为 ()



- A. 84 株 B. 88 株 C. 92 株 D. 121 株

【考点】 38: 规律型: 图形的变化类.

【分析】 根据题目中的图形, 可以发现其中的规律, 从而可以求得当 $n=11$ 时的芍药的数量.

【解答】 解: 由图可得,

芍药的数量为: $4 + (2n - 1) \times 4$,

$\therefore$ 当 $n=11$ 时, 芍药的数量为: $4 + (2 \times 11 - 1) \times 4 = 4 + (22 - 1) \times 4 = 4 + 21 \times 4 = 4 + 84 = 88$,

故选 B.

【点评】 本题考查规律型: 图形的变化类, 解答本题的关键是明确题意, 发现题目中图形的变化规律.

9. (3 分) (2017•随州) 对于二次函数 $y=x^2 - 2mx - 3$, 下列结论错误的是 ()

- A. 它的图象与 x 轴有两个交点
B. 方程 $x^2 - 2mx = 3$ 的两根之积为 -3
C. 它的图象的对称轴在 y 轴的右侧
D. $x < m$ 时, y 随 x 的增大而减小

【考点】 HA: 抛物线与 x 轴的交点; H3: 二次函数的性质.

【分析】 直接利用二次函数与 x 轴交点个数、二次函数的性质以及二次函数与方程之间关系分别分析得出答案.

【解答】 解: A、 $\because b^2 - 4ac = (2m)^2 + 12 = 4m^2 + 12 > 0$,

$\therefore$ 二次函数的图象与 x 轴有两个交点, 故此选项正确, 不合题意;

B、方程 $x^2 - 2mx = 3$ 的两根之积为: $\frac{c}{a} = -3$, 故此选项正确, 不合题意;

C、 m 的值不能确定, 故它的图象的对称轴位置无法确定, 故此选项错误, 符合题意;

D、 $\because a=1 > 0$, 对称轴 $x=m$,

$\therefore x < m$ 时, y 随 x 的增大而减小, 故此选项正确, 不合题意;

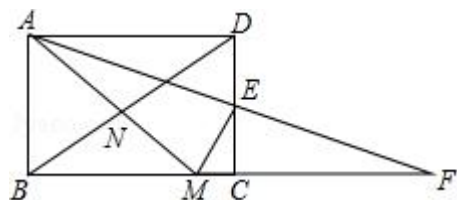
故选: C.

【点评】 此题主要考查了抛物线与 x 轴的交点以及二次函数的性质、根与系数的关系等知识, 正确掌握二次函数的性质是解题关键.

10. (3 分) (2017•随州) 如图, 在矩形 ABCD 中, $AB < BC$, E 为 CD 边的中点,

将 $\triangle ADE$ 绕点 E 顺时针旋转 180° ，点 D 的对应点为 C ，点 A 的对应点为 F ，过点 E 作 $ME \perp AF$ 交 BC 于点 M ，连接 AM 、 BD 交于点 N ，现有下列结论：

① $AM=AD+MC$ ；② $AM=DE+BM$ ；③ $DE^2=AD \cdot CM$ ；④点 N 为 $\triangle ABM$ 的外心．其中正确的个数为（ ）



A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【考点】 S9：相似三角形的判定与性质；KD：全等三角形的判定与性质；LB：矩形的性质；MA：三角形的外接圆与外心；R2：旋转的性质．

【分析】 根据全等三角形的性质以及线段垂直平分线的性质，即可得出 $AM=MC+AD$ ；根据当 $AB=BC$ 时，四边形 $ABCD$ 为正方形进行判断，即可得出当 $AB < BC$ 时， $AM=DE+BM$ 不成立；根据 $ME \perp FF$ ， $EC \perp MF$ ，运用射影定理即可得出 $EC^2=CM \times CF$ ，据此可得 $DE^2=AD \cdot CM$ 成立；根据 N 不是 AM 的中点，可得点 N 不是 $\triangle ABM$ 的外心．

【解答】 解： $\because E$ 为 CD 边的中点，

$$\therefore DE=CE,$$

$$\text{又} \because \angle D=\angle ECF=90^\circ, \angle AED=\angle FEC,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE,$$

$$\therefore AD=CF, AE=FE,$$

$$\text{又} \because ME \perp AF,$$

$$\therefore ME \text{ 垂直平分 } AF,$$

$$\therefore AM=MF=MC+CF,$$

$$\therefore AM=MC+AD, \text{ 故①正确;}$$

当 $AB=BC$ 时，即四边形 $ABCD$ 为正方形时，

设 $DE=EC=1$ ， $BM=a$ ，则 $AB=2$ ， $BF=4$ ， $AM=FM=4-a$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中， $2^2+a^2=(4-a)^2$ ，

解得 $a=1.5$ ，即 $BM=1.5$ ，

$$\therefore \text{由勾股定理可得 } AM=2.5,$$

$$\therefore DE+BM=2.5=AM,$$

又 $\because AB < BC$ ，

$\therefore AM=DE+BM$ 不成立，故②错误；

$$\because ME \perp FF, EC \perp MF,$$

$$\therefore EC^2=CM \times CF,$$

又 $\because EC=DE, AD=CF$ ，

$$\therefore DE^2=AD \cdot CM, \text{ 故③正确;}$$

$$\because \angle ABM=90^\circ,$$

$\therefore AM$ 是 $\triangle ABM$ 的外接圆的直径，

$$\because BM < AD,$$

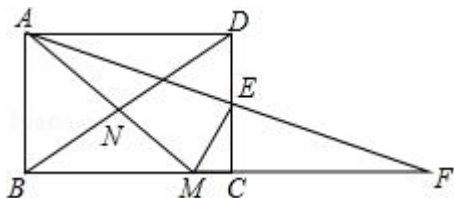
∴ 当 $BM \parallel AD$ 时, $\frac{MN}{AN} = \frac{BM}{AD} < 1$,

∴ N 不是 AM 的中点,

∴ 点 N 不是 $\triangle ABM$ 的外心, 故④错误.

综上所述, 正确的结论有 2 个,

故选: B.



【点评】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 矩形的性质以及旋转的性质的综合应用, 解决问题的关键是运用全等三角形的对应边相等以及相似三角形的对应边成比例, 解题时注意: 三角形外接圆的圆心是三角形三条边垂直平分线的交点, 叫做三角形的外心, 故外心到三角形三个顶点的距离相等.

二、填空题 (本小题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分, 只需要将结果直接填写在答题卡对应题号的横线上.)

11. (3 分) (2017•随州) 根据中央“精准扶贫”规划, 每年要减贫约 11700000 人, 将数据 11700000 用科学记数法表示为 1.17×10^7 .

【考点】 1I: 科学记数法—表示较大的数.

【专题】 17: 推理填空题.

【分析】 用科学记数法表示较大的数时, 一般形式为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 据此判断即可.

【解答】 解: $11700000 = 1.17 \times 10^7$.

故答案为: 1.17×10^7 .

【点评】 此题主要考查了用科学记数法表示较大的数, 一般形式为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, 确定 a 与 n 的值是解题的关键.

12. (3 分) (2017•随州) “抛掷一枚质地均匀的硬币, 正面向上”是 随机 事件 (从“必然”、“随机”、“不可能”中选一个).

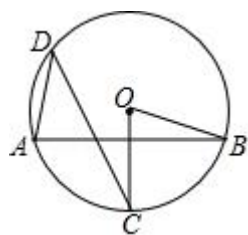
【考点】 X1: 随机事件.

【分析】 根据事件发生的可能性大小判断相应事件的类型即可.

【解答】 解: “抛掷一枚质地均匀的硬币, 正面向上”是 随机事件, 故答案为: 随机.

【点评】 本题考查了随机事件, 解决本题需要正确理解必然事件、不可能事件、随机事件的概念. 必然事件指在一定条件下, 一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下, 一定不发生的事件, 不确定事件即随机事件是指在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事件.

13. (3分) (2017•随州) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的弦, 半径 OC 垂直 AB , 点 D 是 $\odot O$ 上一点, 且点 D 与点 C 位于弦 AB 两侧, 连接 AD 、 CD 、 OB , 若 $\angle BOC=70^\circ$, 则 $\angle ADC=$ 35 度.



【考点】 M5: 圆周角定理; M2: 垂径定理.

【分析】 首先利用垂径定理证明, $\widehat{AC}=\widehat{BC}$, 推出 $\angle AOC=\angle COB=70^\circ$, 可得 $\angle ADC=\frac{1}{2}\angle AOC=35^\circ$.

【解答】 解: 如图, 连接 OA .

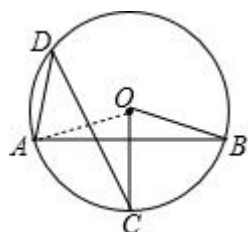
$\because OC \perp AB$,

$\therefore \widehat{AC}=\widehat{BC}$,

$\therefore \angle AOC=\angle COB=70^\circ$,

$\therefore \angle ADC=\frac{1}{2}\angle AOC=35^\circ$,

故答案为 35.



【点评】 本题考查圆周角定理、垂径定理等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 用转化的思想思考问题.

14. (3分) (2017•随州) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6$, $AC=5$, 点 D 在边 AB 上, 且 $AD=2$, 点 E 在边 AC 上, 当 $AE=$ $\frac{12}{5}$ 或 $\frac{5}{3}$ 时, 以 A 、 D 、 E 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似.

【考点】 S8: 相似三角形的判定.

【分析】 若 A 、 D 、 E 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似时, 则 $\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}$ 或 $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$,

分情况进行讨论后即可求出 AE 的长度.

【解答】 解: 当 $\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}$ 时,

$\because \angle A = \angle A$,
 $\therefore \triangle AED \sim \triangle ABC$,

$$\text{此时 } AE = \frac{AB \cdot AD}{AC} = \frac{6 \times 2}{5} = \frac{12}{5};$$

$$\text{当 } \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \text{ 时,}$$

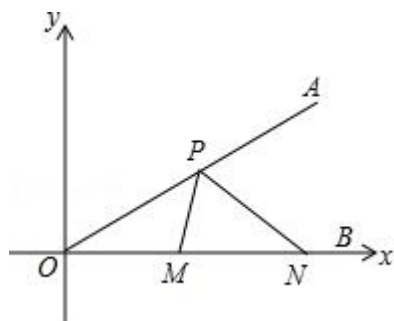
$\because \angle A = \angle A$,
 $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$,

$$\text{此时 } AE = \frac{AC \cdot AD}{AB} = \frac{5 \times 2}{6} = \frac{5}{3};$$

$$\text{故答案为: } \frac{12}{5} \text{ 或 } \frac{5}{3}.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定，熟练掌握相似三角形的判定方法，解题的关键是分两种情况进行讨论.

15. (3分) (2017•随州) 如图， $\angle AOB$ 的边 OB 与 x 轴正半轴重合，点 P 是 OA 上的一动点，点 $N(3, 0)$ 是 OB 上的一点，点 M 是 ON 的中点， $\angle AOB = 30^\circ$ ，要使 $PM + PN$ 最小，则点 P 的坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.



【考点】 PA: 轴对称 – 最短路线问题; D5: 坐标与图形性质.

【分析】 作 N 关于 OA 的对称点 N' ，连接 $N'M$ 交 OA 于 P ，则此时， $PM + PN$ 最小，由作图得到 $ON = ON'$ ， $\angle N'ON = 2\angle AON = 60^\circ$ ，求得 $\triangle NON'$ 是等边三角形，根据等边三角形的性质得到 $N'M \perp ON$ ，解直角三角形即可得到结论.

【解答】 解：作 N 关于 OA 的对称点 N' ，连接 $N'M$ 交 OA 于 P ，则此时， $PM + PN$ 最小，

$\because OA$ 垂直平分 NN' ，
 $\therefore ON = ON'$ ， $\angle N'ON = 2\angle AON = 60^\circ$ ，
 $\therefore \triangle NON'$ 是等边三角形，
 $\because$ 点 M 是 ON 的中点，
 $\therefore N'M \perp ON$ ，
 $\because$ 点 $N(3, 0)$ ，
 $\therefore ON = 3$ ，

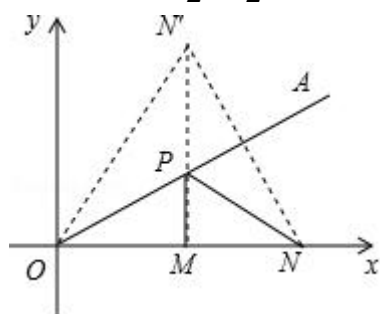
∵ 点 M 是 ON 的中点,

∴ OM=1.5,

∴ $PM = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

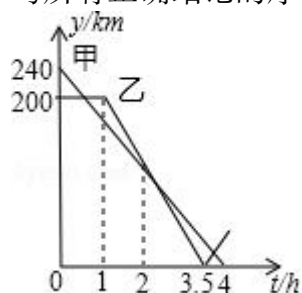
∴ $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

故答案为: $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



【点评】 本题考查了轴对称 – 最短路线问题, 等边三角形的判定和性质, 解直角三角形, 关键是确定 P 的位置.

16. (3 分) (2017•随州) 在一条笔直的公路上有 A、B、C 三地, C 地位于 A、B 两地之间, 甲车从 A 地沿这条公路匀速驶向 C 地, 乙车从 B 地沿这条公路匀速驶向 A 地, 在甲车出发至甲车到达 C 地的过程中, 甲、乙两车各自与 C 地的距离 y (km) 与甲车行驶时间 t (h) 之间的函数关系如图所示. 下列结论: ①甲车出发 2h 时, 两车相遇; ②乙车出发 1.5h 时, 两车相距 170km; ③乙车出发 $2\frac{5}{7}$ h 时, 两车相遇; ④甲车到达 C 地时, 两车相距 40km. 其中正确的是 ②③④ (填写所有正确结论的序号).



【考点】 FH: 一次函数的应用.

【分析】 ①观察函数图象可知, 当 $t=2$ 时, 两函数图象相交, 结合交点代表的意义, 即可得出结论①错误; ②根据速度=路程÷时间分别求出甲、乙两车的速度, 再根据时间=路程÷速度和可求出乙车出发 1.5h 时, 两车相距 170km, 结论②正

确; ③根据时间=路程÷速度和可求出乙车出发 $2\frac{5}{7}$ h 时, 两车相遇, 结论③正确;

④结合函数图象可知当甲到 C 地时, 乙车离开 C 地 0.5 小时, 根据路程=速度×时间, 即可得出结论④正确. 综上即可得出结论.

【解答】 解: ①观察函数图象可知, 当 $t=2$ 时, 两函数图象相交,

∵ C 地位于 A、B 两地之间，
∴ 交点代表了两车离 C 地的距离相等，并不是两车相遇，结论①错误；

②甲车的速度为 $240 \div 4 = 60$ (km/h)，

乙车的速度为 $200 \div (3.5 - 1) = 80$ (km/h)，

∴ $(240 + 200 - 60 - 170) \div (60 + 80) = 1.5$ (h)，

∴ 乙车出发 1.5h 时，两车相距 170km，结论②正确；

③ ∴ $(240 + 200 - 60) \div (60 + 80) = 2\frac{5}{7}$ (h)，

∴ 乙车出发 $2\frac{5}{7}$ h 时，两车相遇，结论③正确；

④ ∴ $80 \times (4 - 3.5) = 40$ (km)，

∴ 甲车到达 C 地时，两车相距 40km，结论④正确.

综上所述，正确的结论有：②③④.

故答案为：②③④.

【点评】 本题考查了一次函数的应用，根据函数图象逐一分析四条结论的正误是解题的关键.

三、解答题 (本题共 9 小题，共 72 分，解答应写出必要演算步骤、文字说明或证明过程.)

17. (5 分) (2017•随州) 计算： $(\frac{1}{3})^{-2} - (2017 - \pi)^0 + \sqrt{(-3)^2} - |-2|$.

【考点】 2C：实数的运算；6E：零指数幂；6F：负整数指数幂.

【专题】 11：计算题；511：实数.

【分析】 原式利用零指数幂、负整数指数幂法则，二次根式性质，以及绝对值的代数意义化简，即可得到结果.

【解答】 解：原式 $= 9 - 1 + 3 - 2 = 9$.

【点评】 此题考查了实数的运算，零指数幂、负整数指数幂，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

18. (6 分) (2017•随州) 解分式方程： $\frac{3}{x^2 - x} + 1 = \frac{x}{x - 1}$.

【考点】 B3：解分式方程.

【专题】 11：计算题；522：分式方程及应用.

【分析】 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【解答】 解：去分母得： $3 + x^2 - x = x^2$ ，

解得： $x = 3$ ，

经检验 $x = 3$ 是分式方程的解.

【点评】 此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验.

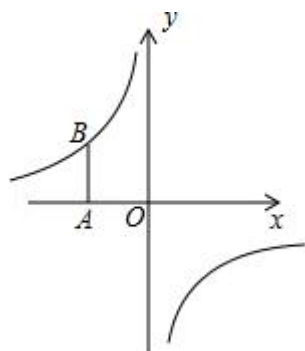
19. (6 分) (2017•随州) 如图，在平面直角坐标系中，将坐标原点 O 沿 x 轴向

左平移 2 个单位长度得到点 A, 过点 A 作 y 轴的平行线交反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象

于点 B, $AB = \frac{3}{2}$

(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 若 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$ 是该反比例函数图象上的两点, 且 $x_1 < x_2$ 时, $y_1 > y_2$, 指出点 P、Q 各位于哪个象限? 并简要说明理由.



【考点】 G7: 待定系数法求反比例函数解析式; G6: 反比例函数图象上点的坐标特征; Q3: 坐标与图形变化 - 平移.

【分析】 (1) 求出点 B 坐标即可解决问题;

(2) 结论: P 在第二象限, Q 在第三象限. 利用反比例函数的性质即可解决问题;

【解答】 解: (1) 由题意 $B(-2, \frac{3}{2})$,

把 $B(-2, \frac{3}{2})$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 中, 得到 $k = -3$,

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = -\frac{3}{x}$.

(2) 结论: P 在第二象限, Q 在第三象限.

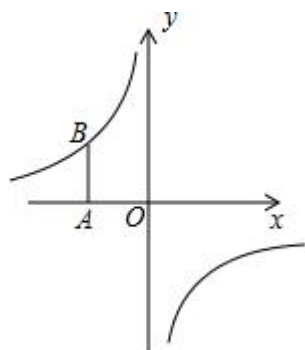
理由: $\because k = -3 < 0$,

$\therefore$ 反比例函数 y 在每个象限 y 随 x 的增大而增大,

$\because P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$ 是该反比例函数图象上的两点, 且 $x_1 < x_2$ 时, $y_1 > y_2$,

$\therefore$ P、Q 在不同的象限,

$\therefore$ P 在第二象限, Q 在第三象限.



【点评】此题考查待定系数法、反比例函数的性质、坐标与图形的变化等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

20. (7 分) (2017•随州) 风电已成为我国继煤电、水电之后的第三大电源，风电机组主要由塔杆和叶片组成 (如图 1)，图 2 是从图 1 引出的平面图. 假设你站在 A 处测得塔杆顶端 C 的仰角是 55° ，沿 HA 方向水平前进 43 米到达山底 G 处，在山顶 B 处发现正好一叶片到达最高位置，此时测得叶片的顶端 D (D、C、H 在同一直线上) 的仰角是 45° . 已知叶片的长度为 35 米 (塔杆与叶片连接处的长度忽略不计)，山高 BG 为 10 米， $BG \perp HG$ ， $CH \perp AH$ ，求塔杆 CH 的高. (参考数据: $\tan 55^\circ \approx 1.4$, $\tan 35^\circ \approx 0.7$, $\sin 55^\circ \approx 0.8$, $\sin 35^\circ \approx 0.6$)



图1

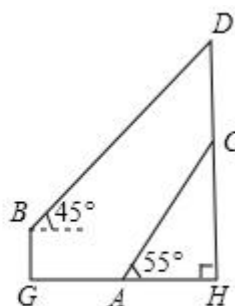
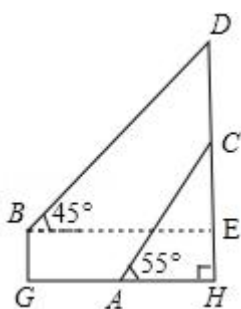


图2

【考点】TA: 解直角三角形的应用 – 仰角俯角问题.

【分析】作 $BE \perp DH$ ，知 $GH=BE$ 、 $BG=EH=10$ ，设 $AH=x$ ，则 $BE=GH=43+x$ ，由 $CH=AH \tan \angle CAH = \tan 55^\circ \cdot x$ 知 $CE=CH - EH = \tan 55^\circ \cdot x - 10$ ，根据 $BE=DE$ 可得关于 x 的方程，解之可得.

【解答】解: 如图，作 $BE \perp DH$ 于点 E，



则 $GH=BE$ 、 $BG=EH=10$ ，

设 $AH=x$ ，则 $BE=GH=GA+AH=43+x$ ，

在 $Rt\triangle ACH$ 中， $CH=AH \tan \angle CAH = \tan 55^\circ \cdot x$ ，

$$\therefore CE=CH - EH = \tan 55^\circ \cdot x - 10,$$

$$\therefore \angle DBE = 45^\circ,$$

$$\therefore BE=DE=CE+DC, \text{ 即 } 43+x = \tan 55^\circ \cdot x - 10 + 35,$$

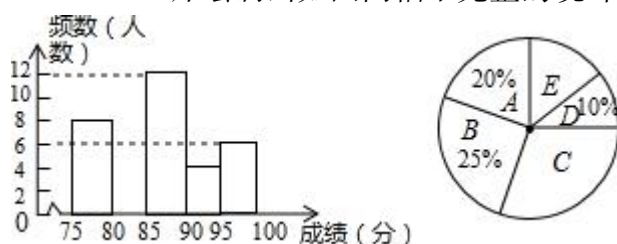
解得: $x \approx 45$,

$$\therefore CH = \tan 55^\circ \cdot x = 1.4 \times 45 = 63,$$

答：塔杆 CH 的高为 63 米.

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用，解答本题要求学生能借助仰角构造直角三角形并解直角三角形.

21. (8 分) (2017•随州) 某校为组织代表队参加市“拜炎帝、诵经典”吟诵大赛，初赛对选手成绩进行了整理，分成 5 个小组 (x 表示成绩，单位：分)，A 组： $75 \leq x < 80$ ；B 组： $80 \leq x < 85$ ；C 组： $85 \leq x < 90$ ；D 组： $90 \leq x < 95$ ；E 组： $95 \leq x < 100$. 并绘制出如图两幅不完整的统计图.



请根据图中信息，解答下列问题：

(1) 参加初赛的选手共有 40 名，请补全频数分布直方图；

(2) 扇形统计图中，C 组对应的圆心角是多少度？E 组人数占参赛选手的百分比是多少？

(3) 学校准备组成 8 人的代表队参加市级决赛，E 组 6 名选手直接进入代表队，现要从 D 组中的两名男生和两名女生中，随机选取两名选手进入代表队，请用列表或画树状图的方法，求恰好选中一名男生和一名女生的概率.

【考点】 X6：列表法与树状图法；V8：频数（率）分布直方图；VB：扇形统计图.

【分析】 (1) 用 A 组人数除以 A 组所占百分比得到参加初赛的选手总人数，用总人数乘以 B 组所占百分比得到 B 组人数，从而补全频数分布直方图；

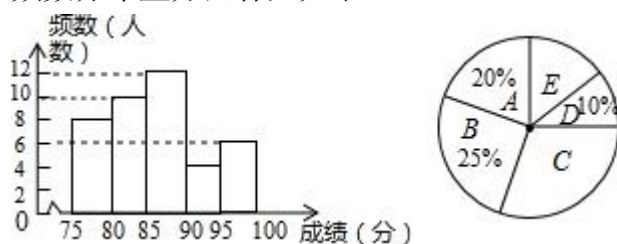
(2) 用 360 度乘以 C 组所占百分比得到 C 组对应的圆心角度数，用 E 组人数除以总人数得到 E 组人数占参赛选手的百分比；

(3) 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与恰好抽到一男生和一女生的情况，再利用概率公式即可求得答案.

【解答】 解：(1) 参加初赛的选手共有： $8 \div 20\% = 40$ (人)，

B 组有： $40 \times 25\% = 10$ (人).

频数分布直方图补充如下：



故答案为 40；

(2) C 组对应的圆心角度数是: $360^{\circ} \times \frac{12}{40} = 108^{\circ}$,

E 组人数占参赛选手的百分比是: $\frac{6}{40} \times 100\% = 15\%$;

(3) 画树状图得:



$\therefore$ 共有 12 种等可能的结果, 抽取的两人恰好是一男生和一女生的有 8 种结果,

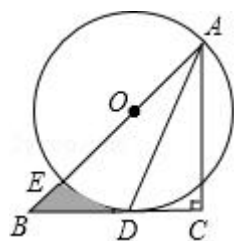
$\therefore$ 抽取的两人恰好是一男生和一女生的概率为 $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

【点评】 此题考查了树状图法与列表法求概率以及频率分布直方图. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

22. (8 分) (2017•随州) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^{\circ}$, $AC=BC$, 点 O 在 AB 上, 经过点 A 的 $\odot O$ 与 BC 相切于点 D , 交 AB 于点 E .

(1) 求证: AD 平分 $\angle BAC$;

(2) 若 $CD=1$, 求图中阴影部分的面积 (结果保留 π).



【考点】 MC: 切线的性质; KF: 角平分线的性质; KW: 等腰直角三角形; MO: 扇形面积的计算.

【分析】 (1) 连接 DE , OD . 利用弦切角定理, 直径所对的圆周角是直角, 等角的余角相等证明 $\angle DAO = \angle CAD$, 进而得出结论;

(2) 根据等腰三角形的性质得到 $\angle B = \angle BAC = 45^{\circ}$, 由 BC 相切 $\odot O$ 于点 D , 得到 $\angle ODB = 90^{\circ}$, 求得 $OD = BD$, $\angle BOD = 45^{\circ}$, 设 $BD = x$, 则 $OD = OA = x$, $OB = \sqrt{2}x$,

根据勾股定理得到 $BD = OD = \sqrt{2}$, 于是得出结论.

【解答】 (1) 证明: 连接 DE , OD .

$\because BC$ 相切 $\odot O$ 于点 D ,

$\therefore \angle CDA = \angle AED$,

$\because AE$ 为直径,

$\therefore \angle ADE = 90^{\circ}$,

$\because AC \perp BC$,

$\therefore \angle ACD = 90^{\circ}$,

∴ ∠DAO = ∠CAD,
 ∴ AD 平分 ∠BAC;

(2) ∵ 在 Rt△ABC 中, ∠C = 90°, AC = BC,
 ∴ ∠B = ∠BAC = 45°,
 ∵ BC 相切 ⊙O 于点 D,
 ∴ ∠ODB = 90°,
 ∴ OD = BD, ∴ ∠BOD = 45°,

设 BD = x, 则 OD = OA = x, OB = $\sqrt{2}x$,

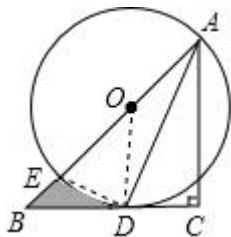
∴ BC = AC = x + 1,
 ∴ AC² + BC² = AB²,

$$\therefore 2(x+1)^2 = (\sqrt{2}x+x)^2,$$

$$\therefore x = \sqrt{2},$$

$$\therefore BD = OD = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{图中阴影部分的面积} = S_{\triangle BOD} - S_{\text{扇形 } DOE} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \frac{45 \cdot \pi \times (\sqrt{2})^2}{360} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$



【点评】 本题主要考查了切线的性质, 角平分线的定义, 扇形面积的计算和勾股定理. 熟练掌握切线的性质是解题的关键.

23. (10 分) (2017•随州) 某水果店在两周内, 将标价为 10 元/斤的某种水果, 经过两次降价后的价格为 8.1 元/斤, 并且两次降价的百分率相同.

(1) 求该种水果每次降价的百分率;

(2) 从第一次降价的第 1 天算起, 第 x 天 (x 为整数) 的售价、销量及储存和损耗费用的相关信息如表所示. 已知该种水果的进价为 4.1 元/斤, 设销售该水果第 x (天) 的利润为 y (元), 求 y 与 x (1 ≤ x < 15) 之间的函数关系式, 并求出第几天时销售利润最大?

时间 x (天)	1 ≤ x < 9	9 ≤ x < 15	x ≥ 15
售价 (元/斤)	第 1 次降价后的价格	第 2 次降价后的价格	
销量 (斤)	80 - 3x	120 - x	
储存和损耗费用 (元)	40 + 3x	3x ² - 64x + 400	

(3) 在 (2) 的条件下, 若要使第 15 天的利润比 (2) 中最大利润最多少 127.5 元, 则第 15 天在第 14 天的价格基础上最多可降多少元?

【考点】 HE: 二次函数的应用; AD: 一元二次方程的应用.

【分析】 (1) 设这个百分率是 x , 根据某商品原价为 10 元, 由于各种原因连续两次降价, 降价后的价格为 8.1 元, 可列方程求解;

(2) 根据两个取值先计算: 当 $1 \leq x < 9$ 时和 $9 \leq x < 15$ 时销售单价, 由利润 = (售价 - 进价) $\times$ 销量 - 费用列函数关系式, 并根据增减性求最大值, 作对比;

(3) 设第 15 天在第 14 天的价格基础上最多可降 a 元, 根据第 15 天的利润比 (2) 中最大利润最多少 127.5 元, 列不等式可得结论.

【解答】 解: (1) 设该种水果每次降价的百分率是 x ,

$$10(1-x)^2=8.1,$$

$$x=10\% \text{ 或 } x=190\% \text{ (舍去)},$$

答: 该种水果每次降价的百分率是 10%;

(2) 当 $1 \leq x < 9$ 时, 第 1 次降价后的价格: $10 \times (1-10\%) = 9$,

$$\therefore y = (9-4.1)(80-3x) - (40+3x) = -17.7x+352,$$

$$\therefore -17.7 < 0,$$

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, y 有最大值,

$$y_{\text{大}} = -17.7 \times 1 + 352 = 334.3 \text{ (元)},$$

当 $9 \leq x < 15$ 时, 第 2 次降价后的价格: 8.1 元,

$$\therefore y = (8.1-4.1)(120-x) - (3x^2-64x+400) = -3x^2+60x+80 = -3(x-10)^2+380,$$

$$\therefore -3 < 0,$$

$\therefore$ 当 $9 \leq x \leq 10$ 时, y 随 x 的增大而增大,

当 $10 < x < 15$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x=10$ 时, y 有最大值,

$$y_{\text{大}} = 380 \text{ (元)},$$

综上所述, y 与 x ($1 \leq x < 15$) 之间的函数关系式为:

$$y = \begin{cases} -17.7x + 352 & (1 \leq x < 9) \\ -3x^2 + 60x + 80 & (9 \leq x < 15) \end{cases}$$

第 10 天时销售利润最大;

(3) 设第 15 天在第 14 天的价格基础上最多可降 a 元,

$$\text{由题意得: } 380 - 127.5 \leq (4-a)(120-15) - (3 \times 15^2 - 64 \times 15 + 400),$$

$$252.5 \leq 105(4-a) - 115,$$

$$a \leq 0.5,$$

答: 第 15 天在第 14 天的价格基础上最多可降 0.5 元.

【点评】 本题考查了一元二次方程的应用及二次函数的有关知识, 解题的关键是正确的找到题目中的等量关系且利用其列出方程, 注意第 2 问中 x 的取值, 两个取值中的最大值才是最大利润.

24. (10 分) (2017•随州) 如图, 分别是可活动的菱形和平行四边形学具, 已知平行四边形较短的边与菱形的边长相等.

(1) 在一次数学活动中, 某小组学生将菱形的一边与平行四边形较短边重合,

摆拼成如图 1 所示的图形，AF 经过点 C，连接 DE 交 AF 于点 M，观察发现：点 M 是 DE 的中点。

下面是两位学生有代表性的证明思路：

思路 1：不需作辅助线，直接证三角形全等；

思路 2：不证三角形全等，连接 BD 交 AF 于点 H. …

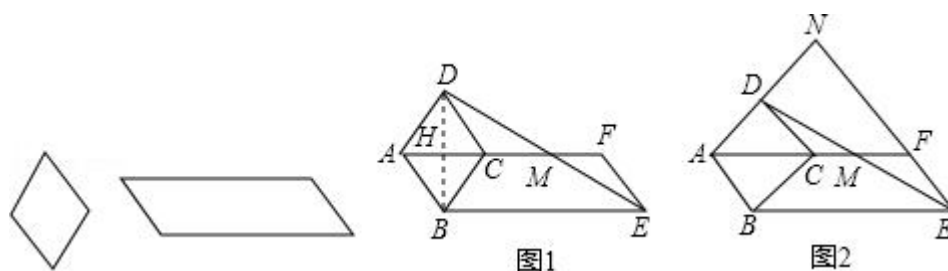
请参考上面的思路，证明点 M 是 DE 的中点（只需用一种方法证明）；

(2) 如图 2，在 (1) 的前提下，当 $\angle ABE=135^\circ$ 时，延长 AD、EF 交于点 N，

求 $\frac{AM}{NE}$ 的值；

(3) 在 (2) 的条件下，若 $\frac{AF}{AB}=k$ (k 为大于 $\sqrt{2}$ 的常数)，直接用含 k 的代数式

表示 $\frac{AM}{MF}$ 的值.



【考点】SO：相似形综合题.

【专题】15：综合题.

【分析】(1) 证法一，利用菱形性质得 $AB=CD$ ， $AB\parallel CD$ ，利用平行四边形的性质得 $AB=EF$ ， $AB\parallel EF$ ，则 $CD=EF$ ， $CD\parallel EF$ ，再根据平行线的性质得 $\angle CDM=\angle FEM$ ，则可根据“AAS”判断 $\triangle CDM\cong\triangle FEM$ ，所以 $DM=EM$ ；

证法二，利用菱形性质得 $DH=BH$ ，利用平行四边形的性质得 $AF\parallel BE$ ，再根据

平行线分线段成比例定理得到 $\frac{DH}{BH}=\frac{DM}{EM}=1$ ，所以 $DM=EM$ ；

(2) 由 $\triangle CDM\cong\triangle FEM$ 得到 $CM=FM$ ，设 $AD=a$ ， $CM=b$ ，则 $FM=b$ ， $EF=AB=a$ ，再证明四边形 ABCD 为正方形得到 $AC=\sqrt{2}a$ ，接着证明 $\triangle ANF$ 为等腰直角三角形

得到 $NF=a+\sqrt{2}b$ ，则 $NE=NF+EF=2a+\sqrt{2}b$ ，然后计算 $\frac{AM}{NE}$ 的值；

(4) 由于 $\frac{AM}{AB}=\frac{\sqrt{2}a+b}{a}=\sqrt{2}+\frac{b}{a}=k$ ，则 $\frac{a}{b}=\frac{1}{k-\sqrt{2}}$ ，然后表示出 $\frac{AM}{FM}=\frac{\sqrt{2}a+b}{b}=\sqrt{2}\cdot\frac{a}{b}+1$ ，

再把 $\frac{a}{b}=\frac{1}{k-\sqrt{2}}$ 代入计算即可.

【解答】解：(1) 如图 1,

证法一：∵ 四边形 ABCD 为菱形,

$$\therefore AB=CD, AB \parallel CD,$$

∵ 四边形 ABEF 为平行四边形,

$$\therefore AB=EF, AB \parallel EF,$$

$$\therefore CD=EF, CD \parallel EF,$$

$$\therefore \angle CDM = \angle FEM,$$

在 $\triangle CDM$ 和 $\triangle FEM$ 中

$$\begin{cases} \angle CMD = \angle FME \\ \angle CDM = \angle FEM, \\ CD = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CDM \cong \triangle FEM,$$

$$\therefore DM=EM,$$

即点 M 是 DE 的中点;

证法二：∵ 四边形 ABCD 为菱形,

$$\therefore DH=BH,$$

∵ 四边形 ABEF 为平行四边形,

$$\therefore AF \parallel BE,$$

$$\therefore HM \parallel BE,$$

$$\therefore \frac{DH}{BH} = \frac{DM}{EM} = 1,$$

$$\therefore DM=EM,$$

即点 M 是 DE 的中点;

$$(2) \because \triangle CDM \cong \triangle FEM,$$

$$\therefore CM=FM,$$

设 $AD=a$, $CM=b$,

$$\therefore \angle ABE = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = 45^\circ,$$

∵ 四边形 ABCD 为菱形,

$$\therefore \angle NAF = 45^\circ,$$

∴ 四边形 ABCD 为正方形,

$$\therefore AC = \sqrt{2}AD = \sqrt{2}a,$$

$$\therefore AB \parallel EF,$$

$$\therefore \angle AFN = \angle BAF = 45^\circ,$$

∴ $\triangle ANF$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore NF = \frac{\sqrt{2}}{2}AF = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}a+b+b) = a+\sqrt{2}b,$$

$$\therefore NE = NF + EF = a + \sqrt{2}b + a = 2a + \sqrt{2}b,$$

$$\therefore \frac{AM}{NE} = \frac{\sqrt{2}a+b}{2a+\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}a+b}{\sqrt{2}(\sqrt{2}a+b)} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$(4) \because \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{2}a+b}{a} = \sqrt{2} + \frac{b}{a} = k,$$

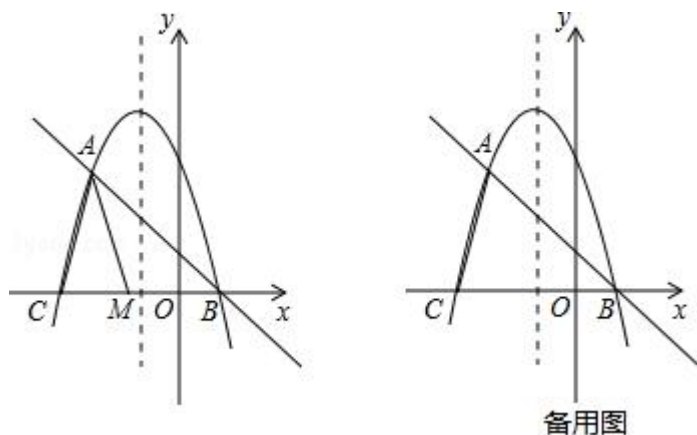
$$\therefore \frac{b}{a} = k - \sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{k - \sqrt{2}},$$

$$\therefore \frac{AM}{FM} = \frac{\sqrt{2}a+b}{b} = \sqrt{2} \cdot \frac{a}{b} + 1 = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{k - \sqrt{2}} + 1 = \frac{k}{k - \sqrt{2}}.$$

【点评】 本题考查了相似形的综合题：熟练掌握平行线分线段成比例定理、平行四边形和菱形的性质；灵活利用全等三角形的知识解决线段相等的问题；会利用代数法表示线段之间的关系.

25. (12分) (2017•随州) 在平面直角坐标系中，我们定义直线 $y=ax-a$ 为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 的“梦想直线”；有一个顶点在抛物线上，另有一个顶点在 y 轴上的三角形为其“梦想三角形”.



已知抛物线 $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$ 与其“梦想直线”交于 A、B 两点 (点 A 在点 B 的左侧)，与 x 轴负半轴交于点 C.

(1) 填空：该抛物线的“梦想直线”的解析式为 $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，点 A 的坐标为 $(-2, 2\sqrt{3})$ ，点 B 的坐标为 $(1, 0)$ ；

(2) 如图，点 M 为线段 CB 上一动点，将 $\triangle ACM$ 以 AM 所在直线为对称轴翻折，点 C 的对称点为 N，若 $\triangle AMN$ 为该抛物线的“梦想三角形”，求点 N 的坐标；

(3) 当点 E 在抛物线的对称轴上运动时，在该抛物线的“梦想直线”上，是否存在点 F，使得以点 A、C、E、F 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，请直接写出点 E、F 的坐标；若不存在，请说明理由.

【考点】 HF：二次函数综合题.

【分析】(1) 由梦想直线的定义可求得其解析式，联立梦想直线与抛物线解析式可求得 A、B 的坐标；

(2) 过 A 作 $AD \perp y$ 轴于点 D，则可知 $AN=AC$ ，结合 A 点坐标，则可求得 ON 的长，可求得 N 点坐标；

(3) 当 AC 为平行四边形的一边时，过 F 作对称轴的垂线 FH，过 A 作 $AK \perp x$ 轴于点 K，可证 $\triangle EFH \cong \triangle ACK$ ，可求得 DF 的长，则可求得 F 点的横坐标，从而可求得 F 点坐标，由 HE 的长可求得 E 点坐标；当 AC 为平行四边形的对角线时，设 E $(-1, t)$ ，由 A、C 的坐标可表示出 AC 中点，从而可表示出 F 点的坐标，代入直线 AB 的解析式可求得 t 的值，可求得 E、F 的坐标。

【解答】解：

$$(1) \because \text{抛物线 } y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{其梦想直线的解析式为 } y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{联立梦想直线与抛物线解析式可得 } \begin{cases} y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases},$$

$$\therefore A(-2, 2\sqrt{3}), B(1, 0),$$

$$\text{故答案为: } y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}; (-2, 2\sqrt{3}); (1, 0);$$

(2) 如图 1，过 A 作 $AD \perp y$ 轴于点 D，

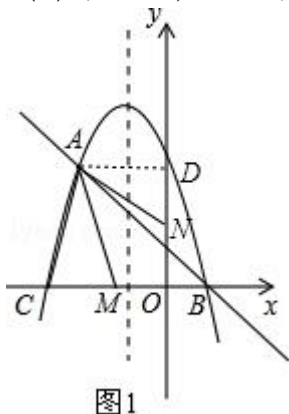


图1

$$\text{在 } y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} \text{ 中, 令 } y=0 \text{ 可求得 } x=-3 \text{ 或 } x=1,$$

$$\therefore C(-3, 0), \text{ 且 } A(-2, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore AC = \sqrt{(-2+3)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13},$$

由翻折的性质可知 $AN=AC=\sqrt{13}$,

∵ $\triangle AMN$ 为梦想三角形,
 ∴ N 点在 y 轴上, 且 $AD=2$,

在 $\text{Rt}\triangle AND$ 中, 由勾股定理可得 $DN=\sqrt{AN^2-AD^2}=\sqrt{13-4}=3$,

∴ $OD=2\sqrt{3}$,

∴ $ON=2\sqrt{3}-3$ 或 $ON=2\sqrt{3}+3$,

∴ N 点坐标为 $(0, 2\sqrt{3}-3)$ 或 $(0, 2\sqrt{3}+3)$;

(3) ①当 AC 为平行四边形的边时, 如图 2, 过 F 作对称轴的垂线 FH , 过 A 作 $AK \perp x$ 轴于点 K ,

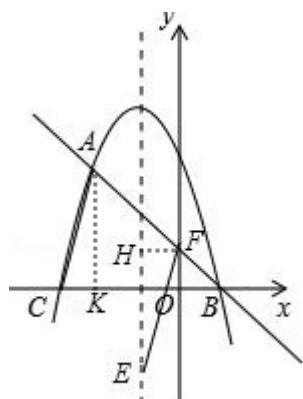


图2

则有 $AC \parallel EF$ 且 $AC=EF$,

∴ $\angle ACK = \angle EFH$,

在 $\triangle ACK$ 和 $\triangle EFH$ 中

$$\begin{cases} \angle ACK = \angle EFH \\ \angle AKC = \angle EHF \\ AC = EF \end{cases}$$

∴ $\triangle ACK \cong \triangle EFH$ (AAS),

∴ $FH=CK=1$, $HE=AK=2\sqrt{3}$,

∵ 抛物线对称轴为 $x=-1$,

∴ F 点的横坐标为 0 或 -2 ,

∵ 点 F 在直线 AB 上,

∴ 当 F 点横坐标为 0 时, 则 $F(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, 此时点 E 在直线 AB 下方,

∴ E 到 y 轴的距离为 $EH-OF=2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 即 E 点纵坐标为 $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

∴ $E(-1, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$;

当 F 点的横坐标为 -2 时, 则 F 与 A 重合, 不合题意, 舍去;

②当 AC 为平行四边形的对角线时,

$\therefore C(-3, 0)$, 且 $A(-2, 2\sqrt{3})$,

$\therefore$ 线段 AC 的中点坐标为 $(-2.5, \sqrt{3})$,

设 $E(-1, t)$, $F(x, y)$,

则 $x-1=2 \times (-2.5)$, $y+t=2\sqrt{3}$,

$\therefore x=-4$, $y=2\sqrt{3}-t$,

代入直线 AB 解析式可得 $2\sqrt{3}-t=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \times (-4) + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 解得 $t=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore E(-1, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$, $F(-4, \frac{10\sqrt{3}}{3})$;

综上可知存在满足条件的点 F , 此时 $E(-1, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$ 、 $F(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ 或 $E(-1, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$ 、 $F(-4, \frac{10\sqrt{3}}{3})$.

【点评】 本题为二次函数的综合应用, 涉及函数图象的交点、勾股定理、轴对称的性质、平行四边形的性质、方程思想及分类讨论思想等知识. 在 (1) 中理解题目中梦想直线的定义是解题的关键, 在 (2) 中确定出 N 点的位置, 求得 ON 的长是解题的关键, 在 (3) 中确定出 E 、 F 的位置是解题的关键, 注意分两种情况. 本题考查知识点较多, 综合性较强, 难度较大.