

2017 年湖北省恩施州中考数学试卷

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (3 分) 7 的绝对值是 ()

- A. -7 B. 7 C. $\frac{1}{7}$ D. $-\frac{1}{7}$

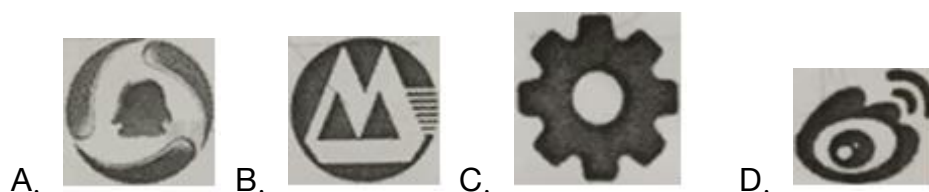
2. (3 分) 大美山水“硒都·恩施”是一张亮丽的名片，八方游客慕名而来，今年“五一”期间，恩施州共接待游客 1450000 人，将 1450000 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.145×10^6 B. 14.5×10^5 C. 1.45×10^5 D. 1.45×10^6

3. (3 分) 下列计算正确的是 ()

- A. $a(a-1) = a^2 - a$ B. $(a^4)^3 = a^7$ C. $a^4 + a^3 = a^7$ D. $2a^5 \div a^3 = a^2$

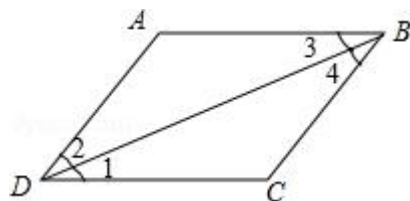
4. (3 分) 下列图标是轴对称图形的是 ()



5. (3 分) 小明和他的爸爸妈妈共 3 人站成一排拍照，他的爸爸妈妈相邻的概率是 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

6. (3 分) 如图，若 $\angle A + \angle ABC = 180^\circ$ ，则下列结论正确的是 ()



- A. $\angle 1 = \angle 2$ B. $\angle 2 = \angle 3$ C. $\angle 1 = \angle 3$ D. $\angle 2 = \angle 4$

7. (3分) 函数 $y = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x-1}$ 的自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \geq 1$ B. $x \geq 1$ 且 $x \neq 3$ C. $x \neq 3$ D. $1 \leq x \leq 3$

8. (3分) 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x - m < 0 \\ 3x - 1 > 2(x - 1) \end{cases}$ 无解, 那么 m 的取值范围为 ()

- A. $m \leq -1$ B. $m < -1$ C. $-1 < m \leq 0$ D. $-1 \leq m < 0$

9. (3分) 中国讲究五谷丰登, 六畜兴旺, 如图是一个正方体展开图, 图中的六个正方形内分别标有六畜: “猪”、“牛”、“羊”、“马”、“鸡”、“狗”. 将其围成一个正方体后, 则与“牛”相对的是 ()

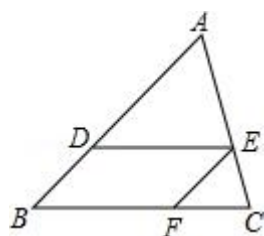


- A. 羊 B. 马 C. 鸡 D. 狗

10. (3分) 某服装进货价 80 元/件, 标价为 200 元/件, 商店将此服装打 x 折销售后仍获利 50%, 则 x 为 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

11. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $\angle ADE = \angle EFC$, $AD:BD = 5:3$, $CF = 6$, 则 DE 的长为 ()



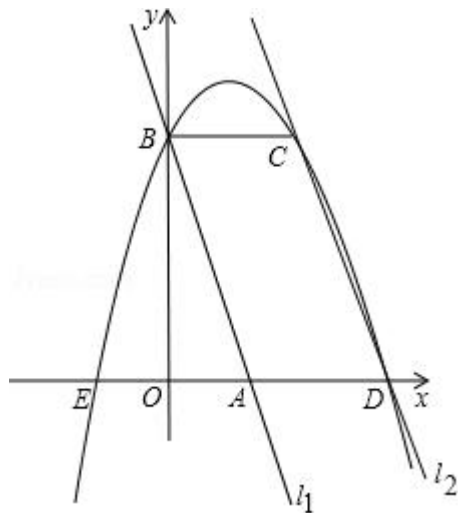
- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

12. (3分) 如图, 在平面直角坐标系中 2 条直线为 $l_1: y = -3x + 3$, $l_2: y = -3x + 9$, 直线 l_1 交 x 轴于点 A, 交 y 轴于点 B, 直线 l_2 交 x 轴于点 D, 过点 B 作 x 轴的平

行线交 l_2 于点 C, 点 A、E 关于 y 轴对称, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 E、B、C 三点, 下列判断中:

- ① $a-b+c=0$; ② $2a+b+c=5$; ③ 抛物线关于直线 $x=1$ 对称; ④ 抛物线过点 (b, c) ; ⑤ $S_{\text{四边形}ABCD}=5$,

其中正确的个数有 ()



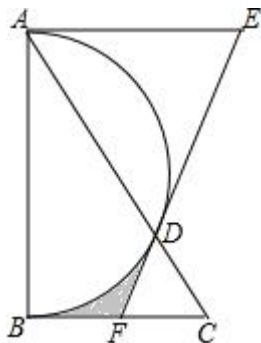
- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

二、填空题 (每题 3 分, 满分 12 分, 将答案填在答题纸上)

13. (3 分) 16 的平方根是_____.

14. (3 分) 分解因式: $3ax^2 - 6axy + 3ay^2 =$ _____.

15. (3 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=30^\circ$, 以直角边 AB 为直径作半圆交 AC 于点 D, 以 AD 为边作等边 $\triangle ADE$, 延长 ED 交 BC 于点 F, $BC=2\sqrt{3}$, 则图中阴影部分的面积为_____. (结果不取近似值)



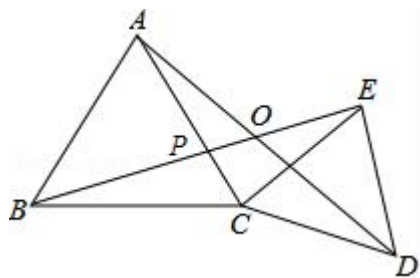
16. (3分) 如图，在 6×6 的网格内填入 1 至 6 的数字后，使每行、每列、每个小粗线宫中的数字不重复，则 $a \times c =$ _____.

1			3		
5		3		2	
			4		
		2			
	3		6	c	5
		5	a	b	3

三、解答题 (本大题共 8 小题，共 72 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (8分) 先化简，再求值： $\frac{x-2}{x^2+2x} \div \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} - \frac{1}{2x}$ ，其中 $x=\sqrt{3}$.

18. (8分) 如图， $\triangle ABC$ 、 $\triangle CDE$ 均为等边三角形，连接 BD 、 AE 交于点 O ， BC 与 AE 交于点 P . 求证： $\angle AOB=60^\circ$.

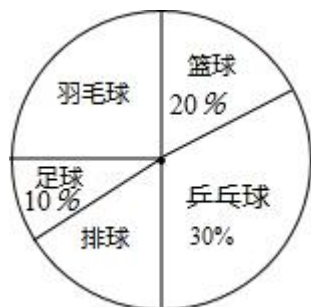


19. (8分) 某校决定加强羽毛球、篮球、乒乓球、排球、足球五项球类运动,每位同学必须且只能选择一项球类运动,对该校学生随机抽取 10%进行调查,根据调查结果绘制了如下不完整的频数分布表和扇形统计图:

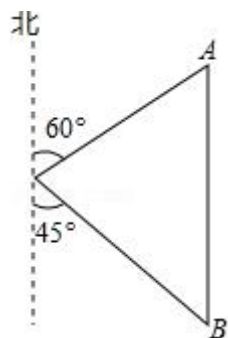
运动项目	频数 (人数)
羽毛球	30
篮球	a
乒乓球	36
排球	b
足球	12

请根据以上图表信息解答下列问题:

- (1) 频数分布表中的 $a=$ _____, $b=$ _____;
- (2) 在扇形统计图中,“排球”所在的扇形的圆心角为_____度;
- (3) 全校有多少名学生选择参加乒乓球运动?



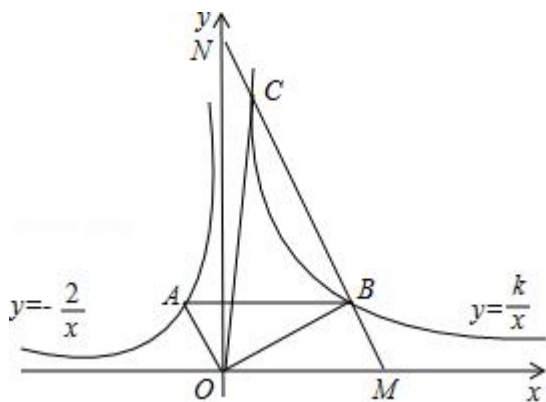
20. (8分) 如图, 小明家在学校 O 的北偏东 60° 方向, 距离学校 80 米的 A 处, 小华家在学校 O 的南偏东 45° 方向的 B 处, 小华家在小明家的正南方向, 求小华家到学校的距离. (结果精确到 1 米, 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$, $\sqrt{6} \approx 2.45$)



21. (8分) 如图, $\angle AOB = 90^\circ$, 反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ ($x < 0$) 的图象过点 A ($-1, a$), 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0, x > 0$) 的图象过点 B, 且 $AB \parallel x$ 轴.

(1) 求 a 和 k 的值;

- (2) 过点 B 作 $MN \parallel OA$, 交 x 轴于点 M, 交 y 轴于点 N, 交双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 于另一点, 求 $\triangle OBC$ 的面积.



22. (10 分) 为积极响应政府提出的“绿色发展·低碳出行”号召，某社区决定购置一批共享单车. 经市场调查得知，购买 3 辆男式单车与 4 辆女式单车费用相同，购买 5 辆男式单车与 4 辆女式单车共需 16000 元.

(1) 求男式单车和女式单车的单价；

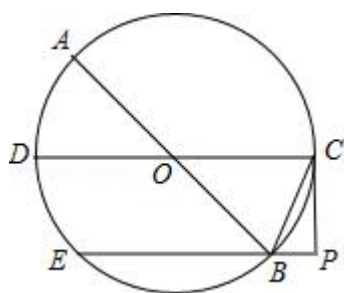
(2) 该社区要求男式单比女式单车多 4 辆，两种单车至少需要 22 辆，购置两种单车的费用不超过 50000 元，该社区有几种购置方案？怎样购置才能使所需总费用最低，最低费用是多少？

23. (10 分) 如图，AB、CD 是 $\odot O$ 的直径，BE 是 $\odot O$ 的弦，且 $BE \parallel CD$ ，过点 C 的切线与 EB 的延长线交于点 P，连接 BC.

(1) 求证：BC 平分 $\angle ABP$ ；

(2) 求证： $PC^2 = PB \cdot PE$ ；

(3) 若 $BE - BP = PC = 4$ ，求 $\odot O$ 的半径.



24. (12 分) 如图, 已知抛物线 $y=ax^2+c$ 过点 $(-2, 2)$, $(4, 5)$, 过定点 $F(0, 2)$ 的直线 $l: y=kx+2$ 与抛物线交于 A 、 B 两点, 点 B 在点 A 的右侧, 过点 B 作 x 轴的垂线, 垂足为 C .

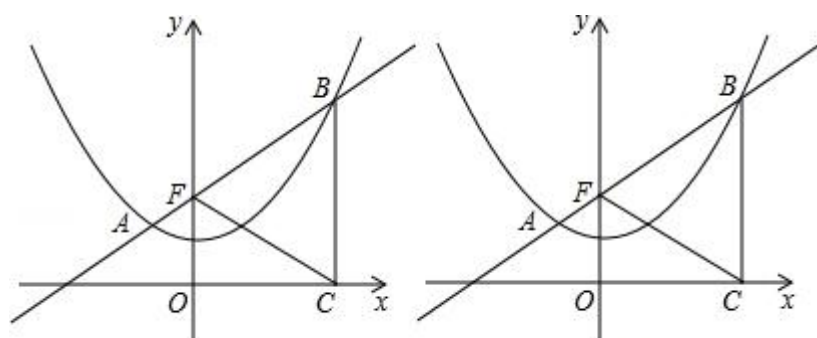
(1) 求抛物线的解析式;

(2) 当点 B 在抛物线上运动时, 判断线段 BF 与 BC 的数量关系 ($>$ 、 $<$ 、 $=$), 并证明你的判断;

(3) P 为 y 轴上一点, 以 B 、 C 、 F 、 P 为顶点的四边形是菱形, 设点 $P(0, m)$, 求自然数 m 的值;

(4) 若 $k=1$, 在直线 l 下方的抛物线上是否存在点 Q , 使得 $\triangle QBF$ 的面积最大?

若存在, 求出点 Q 的坐标及 $\triangle QBF$ 的最大面积; 若不存在, 请说明理由.



备用图

2017 年湖北省恩施州中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (3 分) (2017•恩施州) 7 的绝对值是 ()

A. -7 B. 7 C. $\frac{1}{7}$ D. $-\frac{1}{7}$

【考点】15: 绝对值.

【分析】根据绝对值的定义即可解题.

【解答】解: $\because$ 正数的绝对值是其本身,

$\therefore |7|=7$,

故选 B.

【点评】本题考查了绝对值的定义, 熟练掌握是解题的关键.

2. (3 分) (2017•恩施州) 大美山水“硒都•恩施”是一张亮丽的名片, 八方游客慕名而来, 今年“五•一”期间, 恩施州共接待游客 1450000 人, 将 1450000 用科学记数法表示为 ()

A. 0.145×10^6 B. 14.5×10^5 C. 1.45×10^5 D. 1.45×10^6

【考点】11: 科学记数法—表示较大的数.

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】解: 将 1450000 用科学记数法表示为 1.45×10^6 .

故选: D.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3 分) (2017•恩施州) 下列计算正确的是 ()

A. $a(a-1)=a^2-a$ B. $(a^4)^3=a^7$ C. $a^4+a^3=a^7$ D. $2a^5 \div a^3=a^2$

【考点】4I: 整式的混合运算.

【专题】11 : 计算题; 512: 整式.

【分析】原式各项计算得到结果, 即可作出判断.

【解答】解: A、原式= a^2-a , 符合题意;

B、原式= a^{12} , 不符合题意;

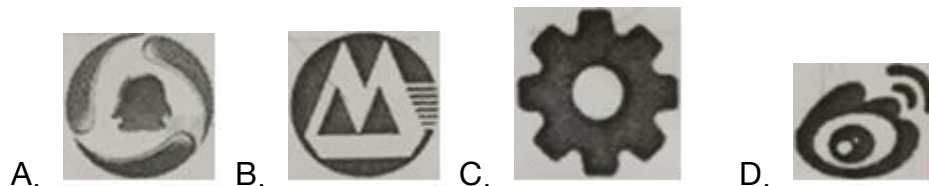
C、原式不能合并, 不符合题意;

D、原式= $2a^2$, 不符合题意,

故选 A

【点评】此题考查了整式的混合运算 - 化简求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

4. (3 分) (2017•恩施州) 下列图标是轴对称图形的是 ()



【考点】P3: 轴对称图形.

【分析】根据轴对称图形的概念求解.

【解答】解: A、不是轴对称图形, 不合题意;

B、不是轴对称图形, 不合题意;

C、是轴对称图形, 符合题意;

D、不是轴对称图形, 不合题意.

故选: C.

【点评】此题主要考查了轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴,

图形两部分折叠后可重合.

5. (3分) (2017•恩施州) 小明和他的爸爸妈妈共3人站成一排拍照, 他的爸爸妈妈相邻的概率是 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【考点】X6: 列表法与树状图法.

【分析】根据题意可以写出所有的可能性, 从而可以解答本题.

【解答】解: 设小明为A, 爸爸为B, 妈妈为C,

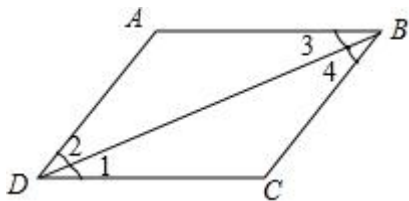
则所有的可能性是: (ABC), (ACB), (BAC), (BCA), (CAB), (CBA),

∴ 他的爸爸妈妈相邻的概率是: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,

故选D.

【点评】本题考查列表法与树状图法, 解答本题的关键是明确题意, 写出所有的可能性.

6. (3分) (2017•恩施州) 如图, 若 $\angle A + \angle ABC = 180^\circ$, 则下列结论正确的是 ()



- A. $\angle 1 = \angle 2$ B. $\angle 2 = \angle 3$ C. $\angle 1 = \angle 3$ D. $\angle 2 = \angle 4$

【考点】JB: 平行线的判定与性质.

【分析】先根据题意得出 $AD \parallel BC$, 再由平行线的性质即可得出结论.

【解答】解: $\because \angle A + \angle ABC = 180^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle 2 = \angle 4$.

故选D.

【点评】本题考查的是平行线的判定与性质, 熟知平行线的判定定理是解答此题的关键.

7. (3分) (2017•恩施州) 函数 $y = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x-1}$ 的自变量 x 的取值范围是 ()

A. $x \geq 1$ B. $x \geq 1$ 且 $x \neq 3$ C. $x \neq 3$ D. $1 \leq x \leq 3$

【考点】E4: 函数自变量的取值范围.

【分析】根据被开方数是非负数, 分母不能为零, 可得答案.

【解答】解: 由题意, 得

$$x - 1 \geq 0 \text{ 且 } x - 3 \neq 0,$$

$$\text{解得 } x \geq 1 \text{ 且 } x \neq 3,$$

故选: B.

【点评】本题考查了函数自变量的取值范围, 利用被开方数是非负数, 分母不能为零是解题关键.

8. (3分) (2017•恩施州) 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x - m < 0 \\ 3x - 1 > 2(x - 1) \end{cases}$ 无解, 那么 m

的取值范围为 ()

A. $m \leq -1$ B. $m < -1$ C. $-1 < m \leq 0$ D. $-1 \leq m < 0$

【考点】CB: 解一元一次不等式组.

【分析】分别求出每一个不等式的解集, 根据不等式组无解, 依据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了可得答案.

【解答】解: 解不等式 $x - m < 0$, 得: $x < m$,

$$\text{解不等式 } 3x - 1 > 2(x - 1), \text{ 得: } x > -1,$$

$\therefore$ 不等式组无解,

$$\therefore m \leq -1,$$

故选: A

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组, 正确求出每一个不等式解集是基础, 熟知“同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到”的原则是解答此题的关键

9. (3分) (2017•恩施州) 中国讲究五谷丰登, 六畜兴旺, 如图是一个正方体展

开图，图中的六个正方形内分别标有六畜：“猪”、“牛”、“羊”、“马”、“鸡”、“狗”. 将其围成一个正方体后，则与“牛”相对的是（ ）



A. 羊 B. 马 C. 鸡 D. 狗

【考点】 I8: 专题：正方体相对两个面上的文字.

【分析】 正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔一个正方形，根据这一特点作答.

【解答】 解：正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔一个正方形，“猪”相对的字是“羊”；

“马”相对的字是“狗”；

“牛”相对的字是“鸡”.

故选：C.

【点评】 本题主要考查了正方体的平面展开图，解题的关键是掌握立方体的 11 种展开图的特征.

10. (3 分) (2017•恩施州) 某服装进货价 80 元/件，标价为 200 元/件，商店将此服装打 x 折销售后仍获利 50%，则 x 为（ ）

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【考点】 8A: 一元一次方程的应用.

【分析】 根据利润=售价-进价，即可得出关于 x 的一元一次方程，解之即可得出结论.

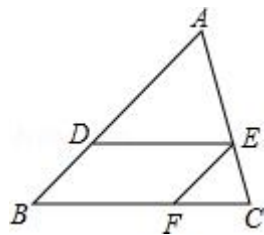
【解答】 解：根据题意得： $200 \times \frac{x}{10} - 80 = 80 \times 50\%$,

解得：x=6.

故选 B.

【点评】 本题考查了一元一次方程的应用，根据利润=售价-进价，列出关于 x 的一元一次方程是解题的关键.

11. (3 分) (2017•恩施州) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $\angle ADE = \angle EFC$ ， $AD:BD=5:3$ ， $CF=6$ ，则 DE 的长为 ()



A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】由 $DE \parallel BC$ 可得出 $\angle ADE = \angle B$ ，结合 $\angle ADE = \angle EFC$ 可得出 $\angle B = \angle EFC$ ，进而可得出 $BD \parallel EF$ ，结合 $DE \parallel BC$ 可证出四边形 $BDEF$ 为平行四边形，根据平行四边形的性质可得出 $DE = BF$ ，由 $DE \parallel BC$ 可得出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，根据相似三角形的性质可得出 $BC = \frac{8}{5}DE$ ，再根据 $CF = BC - BF = \frac{3}{5}DE = 6$ ，即可求出 DE 的长度.

【解答】解： $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \angle ADE = \angle B.$$

$$\because \angle ADE = \angle EFC,$$

$$\therefore \angle B = \angle EFC,$$

$$\therefore BD \parallel EF,$$

$$\because DE \parallel BF,$$

$\therefore$ 四边形 $BDEF$ 为平行四边形,

$$\therefore DE = BF.$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

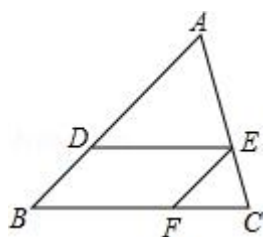
$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD+BD} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore BC = \frac{8}{5}DE,$$

$$\therefore CF = BC - BF = \frac{3}{5}DE = 6,$$

$$\therefore DE = 10.$$

故选 C.

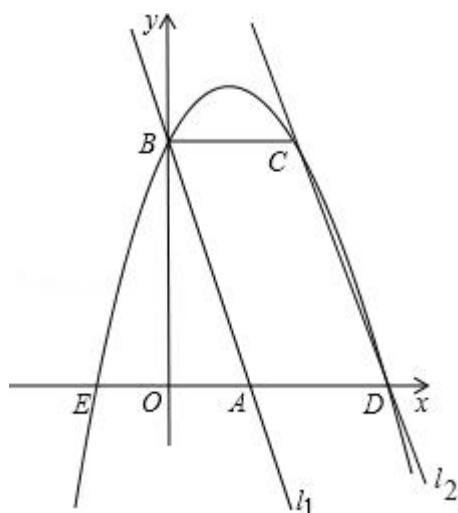


【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、平行线的性质以及平行四边形的判定与性质，根据相似三角形的性质找出 $BC = \frac{8}{5}DE$ 是解题的关键.

12. (3 分) (2017•恩施州) 如图，在平面直角坐标系中 2 条直线为 $l_1: y = -3x + 3$, $l_2: y = -3x + 9$, 直线 l_1 交 x 轴于点 A, 交 y 轴于点 B, 直线 l_2 交 x 轴于点 D, 过点 B 作 x 轴的平行线交 l_2 于点 C, 点 A、E 关于 y 轴对称, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过 E、B、C 三点, 下列判断中:

- ① $a - b + c = 0$; ② $2a + b + c = 5$; ③ 抛物线关于直线 $x = 1$ 对称; ④ 抛物线过点 (b, c) ; ⑤ $S_{\text{四边形 ABCD}} = 5$,

其中正确的个数有 ()



A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

【考点】 HA: 抛物线与 x 轴的交点; F8: 一次函数图象上点的坐标特征; H5: 二次函数图象上点的坐标特征; P5: 关于 x 轴、 y 轴对称的点的坐标.

【分析】 根据直线 l_1 的解析式求出 $A(1, 0)$, $B(0, 3)$, 根据关于 y 轴对称的两点坐标特征求出 $E(-1, 0)$. 根据平行于 x 轴的直线上任意两点纵坐标相同得出 C 点纵坐标与 B 点纵坐标相同都是 3, 再根据二次函数图象上点的坐标特征求出 $C(2, 3)$. 利用待定系数法求出抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$, 进而判断各选项即可.

【解答】 解: $\because$ 直线 $l_1: y = -3x + 3$ 交 x 轴于点 A , 交 y 轴于点 B ,
 $\therefore A(1, 0)$, $B(0, 3)$,
 $\because$ 点 A 、 E 关于 y 轴对称,
 $\therefore E(-1, 0)$.
 $\because$ 直线 $l_2: y = -3x + 9$ 交 x 轴于点 D , 过点 B 作 x 轴的平行线交 l_2 于点 C ,
 $\therefore D(3, 0)$, C 点纵坐标与 B 点纵坐标相同都是 3,
 把 $y = 3$ 代入 $y = -3x + 9$, 得 $3 = -3x + 9$, 解得 $x = 2$,
 $\therefore C(2, 3)$.

∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 E、B、C 三点,

$$\therefore \begin{cases} a-b+c=0 \\ c=3 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$$

$$\therefore y=-x^2+2x+3.$$

① ∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 E (-1, 0),

∴ $a-b+c=0$, 故①正确;

② ∵ $a=-1$, $b=2$, $c=3$,

∴ $2a+b+c=-2+2+3=3 \neq 5$, 故②错误;

③ ∵ 抛物线过 B (0, 3), C (2, 3) 两点,

∴ 对称轴是直线 $x=1$,

∴ 抛物线关于直线 $x=1$ 对称, 故③正确;

④ ∵ $b=2$, $c=3$, 抛物线过 C (2, 3) 点,

∴ 抛物线过点 (b, c), 故④正确;

⑤ ∵ 直线 $l_1 \parallel l_2$, 即 $AB \parallel CD$, 又 $BC \parallel AD$,

∴ 四边形 ABCD 是平行四边形,

∴ $S_{\text{四边形 ABCD}} = BC \cdot OB = 2 \times 3 = 6 \neq 5$, 故⑤错误.

综上所述, 正确的结论有 3 个.

故选 C.

【点评】 本题考查了抛物线与 x 轴的交点, 一次函数、二次函数图象上点的坐标

特征, 关于 y 轴对称的两点坐标特征, 平行于 x 轴的直线上任意两点坐标特征,

待定系数法求抛物线的解析式, 平行四边形的判定及面积公式, 综合性较强, 求出抛物线的解析式是解题的关键.

二、填空题 (每题 3 分, 满分 12 分, 将答案填在答题纸上)

13. (3 分) (2017•恩施州) 16 的平方根是 ± 4 .

【考点】21: 平方根.

【专题】11 : 计算题.

【分析】根据平方根的定义, 求数 a 的平方根, 也就是求一个数 x , 使得 $x^2=a$, 则 x 就是 a 的平方根, 由此即可解决问题.

【解答】解: $\because (\pm 4)^2=16$,

$\therefore 16$ 的平方根是 ± 4 .

故答案为: ± 4 .

【点评】本题考查了平方根的定义. 注意一个正数有两个平方根, 它们互为相反数; 0 的平方根是 0; 负数没有平方根.

14. (3 分) (2017•恩施州) 分解因式: $3ax^2 - 6axy + 3ay^2 =$ $3a(x - y)^2$.

【考点】55: 提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】先提取公因式 $3a$, 再对余下的多项式利用完全平方公式继续分解.

【解答】解: $3ax^2 - 6axy + 3ay^2$,

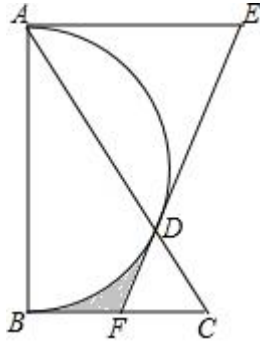
$= 3a(x^2 - 2xy + y^2)$,

$= 3a(x - y)^2$,

故答案为: $3a(x - y)^2$.

【点评】此题主要考查了用提公因式法和公式法进行因式分解, 一个多项式有公因式首先提取公因式, 然后再用其他方法进行因式分解, 同时因式分解要彻底, 直到不能分解为止.

15. (3 分) (2017•恩施州) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=30^\circ$, 以直角边 AB 为直径作半圆交 AC 于点 D , 以 AD 为边作等边 $\triangle ADE$, 延长 ED 交 BC 于点 F , $BC=2\sqrt{3}$, 则图中阴影部分的面积为 $3\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi$. (结果不取近似值)



【考点】MO：扇形面积的计算；KQ：勾股定理；M5：圆周角定理.

【分析】根据题意结合等边三角形的性质分别得出 AB , AC , AD , DC 的长, 进而利用 $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOD} - S_{\text{扇形} DOB} - S_{\triangle DCF}$ 求出答案.

【解答】解: 如图所示: 设半圆的圆心为 O , 连接 DO , 过 D 作 $DG \perp AB$ 于点 G , 过 D 作 $DN \perp CB$ 于点 N ,

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 30^\circ$,

$\therefore \angle ACB = 60^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\because$ 以 AD 为边作等边 $\triangle ADE$,

$\therefore \angle EAD = 60^\circ$,

$\therefore \angle EAB = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$,

可得: $AE \parallel BC$,

则 $\triangle ADE \sim \triangle CDF$,

$\therefore \triangle CDF$ 是等边三角形,

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 2\sqrt{3}$,

$\therefore AC = 4\sqrt{3}$, $AB = 6$, $\angle DOG = 60^\circ$,

则 $AO = BO = 3$,

故 $DG = DO \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

则 $AD = 3\sqrt{3}$, $DC = AC - AD = \sqrt{3}$,

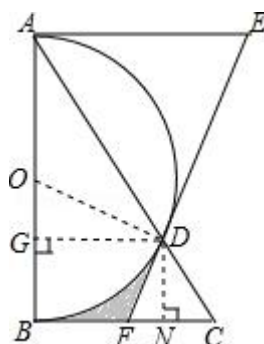
$$\text{故 } DN = DC \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{则 } S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOD} - S_{\text{扇形 } DOB} - S_{\triangle DCF}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 - \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{60\pi \times 3^2}{360} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi.$$

$$\text{故答案为: } 3\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi.$$



【点评】此题主要考查了扇形面积求法以及等边三角形的性质和锐角三角函数关系等知识，正确分割图形是解题关键.

16. (3分) (2017•恩施州) 如图，在 6×6 的网格内填入 1 至 6 的数字后，使每行、每列、每个小粗线宫中的数字不重复，则 $a \times c = \underline{2}$.

1			3		
5		3		2	
			4		
		2			
	3		6	c	5
		5	a	b	3

【考点】 37: 规律型: 数字的变化类.

【分析】粗线把这个数独分成了 6 块，为了便于解答，对各部分进行编号：甲、乙、丙、丁、戊、己，先从各部分中数字最多的己出发，找出其各个小方格里面的数，再根据每行、每列、每小宫格都不出现重复的数字进行推算.

【解答】解：对各个小宫格编号如下：

1	甲		3	乙	
5		3		2	
	丙		4	丁	
		2			
	3		6	c	5
	戊	5	a	b	3

先看己：已经有了数字 3、5、6，缺少 1、2、4；观察发现：4 不能在第四列，2 不能在第五列，而 2 不能在第六列；所以 2 只能在第六行第四列，即 $a=2$ ；则 b 和 c 有一个是 1，有一个是 4，不确定，如下：

1			3		
5		3		2	
			4		
		2			
	3		6	c	5
		5	2	b	3

观察上图发现：第四列已经有数字 2、3、4、6，缺少 1 和 5，由于 5 不能在第二行，所以 5 在第四行，那么 1 在第二行；如下：

1			3		
5		3	1	2	
			4		
		2	5		
	3		6	c	5
		5	2	b	3

再看乙部分：已经有了数字 1、2、3，缺少数字 4、5、6，观察上图发现：5 不能在第六列，所以 5 在第五列的第一行；4 和 6 在第六列的第一行和第二行，不确定，
分两种情况：

①当 4 在第一行时，6 在第二行；那么第二行第二列就是 4，如下：

1			3	5	4
5	4	3	1	2	6
			4		
		2	5		
	3		6	c	5
		5	2	b	3

再看甲部分：已经有了数字 1、3、4、5，缺少数字 2、6，观察上图发现：2 不能在第三列，所以 2 在第二列，则 6 在第三列的第一行，如下：

1	2	6	3	5	4
5	4	3	1	2	6
			4		
		2	5		
	3		6	c	5
		5	2	b	3

观察上图可知：第三列少 1 和 4，4 不能在第三行，所以 4 在第五行，则 1 在第三行，如下：

1	2	6	3	5	4
5	4	3	1	2	6
		1	4		
		2	5		
	3	4	6	c	5
		5	2	b	3

观察上图可知：第五行缺少 1 和 2，1 不能在第 1 列，所以 1 在第五列，则 2 在第一列，即 $c=1$ ，所以 $b=4$ ，如下：

1	2	6	3	5	4
5	4	3	1	2	6
		1	4		
		2	5		
2	3	4	6	1	5
		5	2	4	3

观察上图可知：第六列缺少 1 和 2，1 不能在第三行，则在第四行，所以 2 在第三行，如下：

1	2	6	3	5	4
5	4	3	1	2	6
		1	4		2
		2	5		1
2	3	4	6	1	5
		5	2	4	3

再看戊部分：已经有了数字 2、3、4、5，缺少数字 1、6，观察上图发现：1 不能在第一列，所以 1 在第二列，则 6 在第一列，如下：

1	2	6	3	5	4
5	4	3	1	2	6
		1	4		2
		2	5		1
2	3	4	6	1	5
6	1	5	2	4	3

观察上图可知：第一列缺少 3 和 4，4 不能在第三行，所以 4 在第四行，则 3 在第三行，如下：

1	2	6	3	5	4
5	4	3	1	2	6
3		1	4		2
4		2	5		1
2	3	4	6	1	5
6	1	5	2	4	3

观察上图可知：第二列缺少 5 和 6，5 不能在第四行，所以 5 在第三行，则 6 在第四行，如下：

1	2	6	3	5	4
5	4	3	1	2	6
3	5	1	4		2
4	6	2	5		1
2	3	4	6	1	5
6	1	5	2	4	3

观察上图可知：第三行第五列少 6，第四行第五列少 3，如下：

1	2	6	3	5	4
5	4	3	1	2	6
3	5	1	4	6	2
4	6	2	5	3	1
2	3	4	6	1	5
6	1	5	2	4	3

所以， $a=2$ ， $c=1$ ， $ac=2$ ；

②当 6 在第一行，4 在第二行时，那么第二行第二列就是 6，如下：

1			3	5	6
5	6	3	1	2	4
			4		
		2	5		
	3		6	c	5
		5	2	b	3

再看甲部分：已经有了数字 1、3、5、6，缺少数字 2、4，观察上图发现：2 不能在第三列，所以 2 在第 2 列，4 在第三列，如下：

1	2	4	3	5	6
5	6	3	1	2	4
			4		
		2	5		
	3		6	c	5
		5	2	b	3

观察上图可知：第三列缺少数字 1 和 6，6 不能在第五行，所以 6 在第三行，则 1 在第五行，所以 c=4，b=1，如下：

1	2	4	3	5	6
5	6	3	1	2	4
		6	4		
		2	5		
	3	1	6	4	5
		5	2	1	3

观察上图可知：第五列缺少数字 3 和 6，6 不能在第三行，所以 6 在第四行，则 3 在第三行，如下：

1	2	4	3	5	6
5	6	3	1	2	4
		6	4	3	
		2	5	6	
	3	1	6	4	5
		5	2	1	3

观察上图可知：第六列缺少数字 1 和 2，2 不能在第四行，所以 2 在第三行，则 1 在第四行，如下：

1	2	4	3	5	6
5	6	3	1	2	4
		6	4	3	2
		2	5	6	1
	3	1	6	4	5
		5	2	1	3

观察上图可知：第三行缺少数字 1 和 5，1 和 5 都不能在第一列，所以此种情况不成立；

综上所述：a=2，c=1，a×c=2；

故答案为：2.

【点评】 本题是六阶数独，比较复杂，关键是找出突破口，先推算出一个区域或者一行、一列，再逐步的进行推算.

三、解答题 (本大题共 8 小题，共 72 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (8 分) (2017•恩施州) 先化简，再求值： $\frac{x-2}{x^2+2x} \div \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} - \frac{1}{2x}$ ，其中 $x=\sqrt{3}$.

【考点】 6D：分式的化简求值.

【分析】 先化简分式，然后将 x 的值代入即可求出答案.

【解答】 解：当 $x=\sqrt{3}$ 时，

$$\therefore \text{原式} = \frac{x-2}{x(x+2)} \div \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{2x}$$

$$= \frac{x-2}{x(x+2)} \times \frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{2x}$$

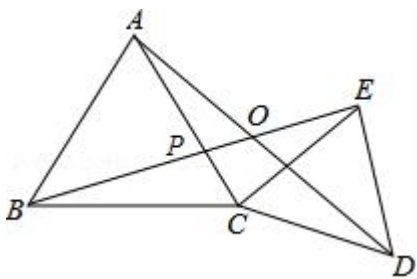
$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x}$$

$$= \frac{1}{2x}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}$$

【点评】 本题考查分式的运算，解题的关键是熟练运用分式的运算法则，本题属于基础题型.

18. (8分) (2017•恩施州) 如图, $\triangle ABC$ 、 $\triangle CDE$ 均为等边三角形, 连接 BD 、 AE 交于点 O , BC 与 AE 交于点 P . 求证: $\angle AOB = 60^\circ$.



【考点】 KD: 全等三角形的判定与性质; KK: 等边三角形的性质.

【分析】 利用“边角边”证明 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 全等, 可得 $\angle CAD = \angle CBE$, 然后求出 $\angle OAB + \angle OBA = 120^\circ$, 再根据“八字型”证明 $\angle AOP = \angle PCB = 60^\circ$ 即可.

【解答】 解: $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 都是等边三角形,

$$\therefore AC = BC, CD = CE, \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB + \angle ACE = \angle DCE + \angle ACE,$$

即 $\angle ACD = \angle BCE$,

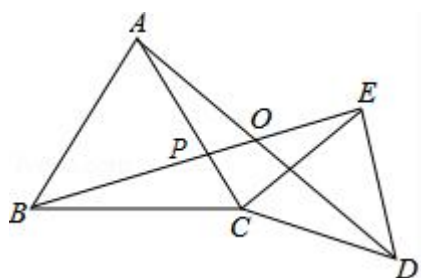
$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 和 } \triangle BCE \text{ 中, } \begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE, \\ CD = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$ (SAS),

$\therefore \angle CAD = \angle CBE$,

$\therefore \angle APO = \angle BPC$,

$\therefore \angle AOP = \angle BCP = 60^\circ$, 即 $\angle AOB = 60^\circ$.



【点评】 本题考查等边三角形的性质、全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，属于中考常考题型.

19. (8分) (2017•恩施州) 某校决定加强羽毛球、篮球、乒乓球、排球、足球五项球类运动，每位同学必须且只能选择一项球类运动，对该校学生随机抽取10%进行调查，根据调查结果绘制了如下不完整的频数分布表和扇形统计图：

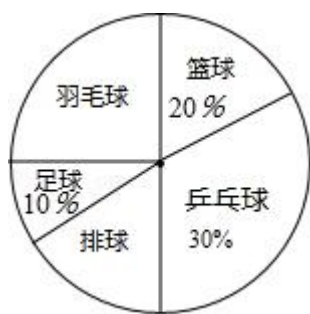
运动项目	频数 (人数)
羽毛球	30
篮球	a
乒乓球	36
排球	b
足球	12

请根据以上图表信息解答下列问题：

(1) 频数分布表中的 $a = \underline{24}$ ， $b = \underline{48}$ ；

(2) 在扇形统计图中，“排球”所在的扇形的圆心角为 $\underline{72}$ 度；

(3) 全校有多少名学生选择参加乒乓球运动？



【考点】 VB：扇形统计图； V7：频数（率）分布表.

【分析】 (1) 根据选择乒乓球运动的人数是 36 人，对应的百分比是 30%，即可求得总人数，然后利用百分比的定义求得 a，用总人数减去其它组的人数求得 b；

(2) 利用 360° 乘以对应的百分比即可求得；

(3) 求得全校总人数，然后利用总人数乘以对应的百分比求解.

【解答】 解：(1) 抽取的人数是 $36 \div 30\% = 120$ (人)，

则 $a = 120 \times 20\% = 24$,

$b = 120 - 30 - 24 - 36 - 12 = 48$.

故答案是：24，48；

(2) “排球”所在的扇形的圆心角为 $360^\circ \times \frac{48}{120} = 72^\circ$,

故答案是：72；

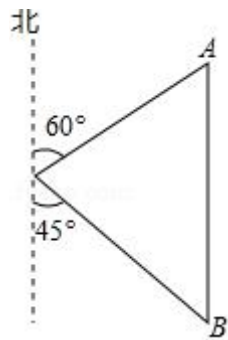
(3) 全校总人数是 $120 \div 10\% = 1200$ (人)，

则选择参加乒乓球运动的人数是 $1200 \times 30\% = 360$ (人).

【点评】 本题考查读扇形统计图获取信息的能力，扇形统计图是用整个圆表示总数用圆内各个扇形的大小表示各部分数量占总数的百分数. 通过扇形统计图可以很清楚地表示出各部分数量同总数之间的关系. 用整个圆的面积表示总数 (单位 1)，用圆的扇形面积表示各部分占总数的百分数.

20. (8 分) (2017•恩施州) 如图，小明家在学校 O 的北偏东 60° 方向，距离学校 80 米的 A 处，小华家在学校 O 的南偏东 45° 方向的 B 处，小华家在小明家的

正南方向，求小华家到学校的距离．（结果精确到 1 米，参考数据： $\sqrt{2}\approx 1.41$ ， $\sqrt{3}\approx 1.73$ ， $\sqrt{6}\approx 2.45$ ）



【考点】 TB: 解直角三角形的应用 – 方向角问题; KU: 勾股定理的应用.

【分析】 作 $OC \perp AB$ 于 C , 由已知可得 $\triangle ABO$ 中 $\angle A=60^\circ$, $\angle B=45^\circ$ 且 $OA=80\text{m}$, 要求 OB 的长, 可以先求出 OC 和 BC 的长.

【解答】 解: 由题意可知: 作 $OC \perp AB$ 于 C ,

$$\angle ACO = \angle BCO = 90^\circ, \angle AOC = 30^\circ, \angle BOC = 45^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACO$ 中,

$$\because \angle ACO = 90^\circ, \angle AOC = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = \frac{1}{2}AO = 40\text{m}, OC = \sqrt{3}AC = 40\sqrt{3}\text{m}.$$

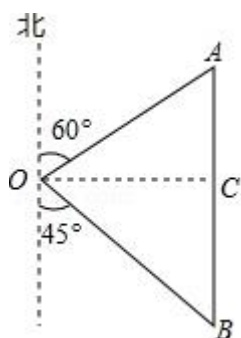
在 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中,

$$\because \angle BCO = 90^\circ, \angle BOC = 45^\circ,$$

$$\therefore BC = OC = 40\sqrt{3}\text{m}.$$

$$\therefore OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} = 40\sqrt{6} \approx 40 \times 2.45 \approx 82 \text{ (米)}.$$

答: 小华家到学校的距离大约为 82 米.

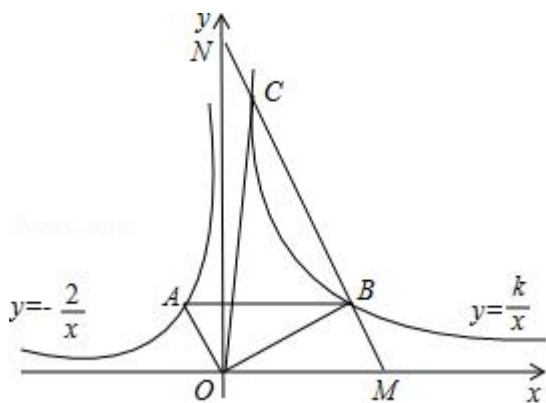


【点评】 本题考查了解直角三角形的应用，对于解一般三角形，求三角形的边或高的问题一般可以转化为解直角三角形的问题，解决的方法就是作高线.

21. (8 分) (2017•恩施州) 如图， $\angle AOB=90^\circ$ ，反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ ($x<0$) 的图象过点 A ($-1, a$)，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0, x>0$) 的图象过点 B，且 $AB \parallel x$ 轴.

(1) 求 a 和 k 的值;

(2) 过点 B 作 $MN \parallel OA$ ，交 x 轴于点 M，交 y 轴于点 N，交双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 于另一点，求 $\triangle OBC$ 的面积.



【考点】 G5: 反比例函数系数 k 的几何意义; G6: 反比例函数图象上点的坐标特征.

【分析】 (1) 把 A ($-1, a$) 代入反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 得到 A ($-1, 2$), 过 A 作 $AE \perp x$ 轴于 E, $BF \perp x$ 轴于 F, 根据相似三角形的性质得到 B ($4, 2$), 于是得到 $k=4 \times 2=8$;

(2) 求的直线 AO 的解析式为 $y = -2x$, 设直线 MN 的解析式为 $y = -2x + b$, 得到直线 MN 的解析式为 $y = -2x + 10$, 解方程组得到 C (1, 8), 于是得到结论.

【解答】 解: (1) $\because$ 反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ ($x < 0$) 的图象过点 A (-1, a),

$$\therefore a = -\frac{2}{-1} = 2,$$

$$\therefore A (-1, 2),$$

过 A 作 $AE \perp x$ 轴于 E, $BF \perp x$ 轴于 F,

$$\therefore AE = 2, OE = 1,$$

$$\because AB \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore BF = 2,$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAO + \angle AOE = \angle AOE + \angle BOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAO = \angle BOF,$$

$$\therefore \triangle AEO \sim \triangle OFB,$$

$$\therefore \frac{AE}{OF} = \frac{OE}{BF},$$

$$\therefore OF = 4,$$

$$\therefore B (4, 2),$$

$$\therefore k = 4 \times 2 = 8;$$

$$(2) \because \text{直线 OA 过 A } (-1, 2),$$

$$\therefore \text{直线 AO 的解析式为 } y = -2x,$$

$$\because MN \parallel OA,$$

$$\therefore \text{设直线 MN 的解析式为 } y = -2x + b,$$

$$\therefore 2 = -2 \times 4 + b,$$

$$\therefore b=10,$$

$$\therefore \text{直线 MN 的解析式为 } y = -2x + 10,$$

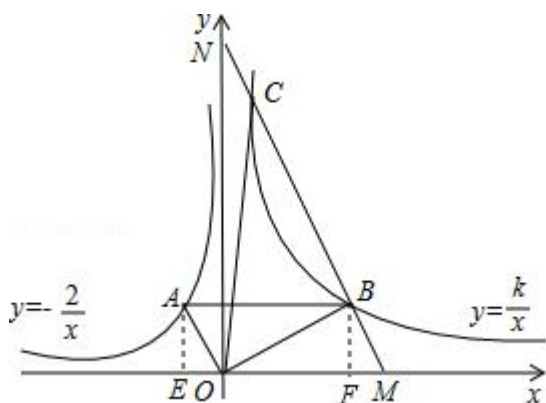
$\therefore$ 直线 MN 交 x 轴于点 M, 交 y 轴于点 N,

$$\therefore M(5, 0), N(0, 10),$$

$$\text{解} \begin{cases} y = -2x + 10 \\ y = \frac{8}{x} \end{cases} \text{ 得, } \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases},$$

$$\therefore C(1, 8),$$

$$\therefore \triangle OBC \text{ 的面积} = S_{\triangle OMN} - S_{\triangle OCN} - S_{\triangle OBM} = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 - \frac{1}{2} \times 10 \times 1 - \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 15.$$



【点评】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 相似三角形的判定和性质, 求函数的解析式, 三角形的面积的计算, 正确的作出辅助线是解题的关键.

22. (10 分) (2017•恩施州) 为积极响应政府提出的“绿色发展•低碳出行”号召, 某社区决定购置一批共享单车. 经市场调查得知, 购买 3 辆男式单车与 4 辆女式单车费用相同, 购买 5 辆男式单车与 4 辆女式单车共需 16000 元.

(1) 求男式单车和女式单车的单价;

(2) 该社区要求男式单比女式单车多 4 辆, 两种单车至少需要 22 辆, 购置两种单车的费用不超过 50000 元, 该社区有几种购置方案? 怎样购置才能使所需总费用最低, 最低费用是多少?

【考点】 CE: 一元一次不等式组的应用; 9A: 二元一次方程组的应用.

【分析】 (1) 设男式单车 x 元/辆, 女式单车 y 元/辆, 根据“购买 3 辆男式单车

与 4 辆女式单车费用相同，购买 5 辆男式单车与 4 辆女式单车共需 16000 元”
列方程组求解可得；

(2) 设购置女式单车 m 辆，则购置男式单车 $(m+4)$ 辆，根据“两种单车至少需要 22 辆、购置两种单车的费用不超过 50000 元”列不等式组求解，得出 m 的范围，即可确定购置方案；再列出购置总费用关于 m 的函数解析式，利用一次函数性质结合 m 的范围可得其最值情况.

【解答】解：(1) 设男式单车 x 元/辆，女式单车 y 元/辆，

根据题意，得：
$$\begin{cases} 3x = 4y \\ 5x + 4y = 16000 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x = 2000 \\ y = 1500 \end{cases}$$

答：男式单车 2000 元/辆，女式单车 1500 元/辆；

(2) 设购置女式单车 m 辆，则购置男式单车 $(m+4)$ 辆，

根据题意，得：
$$\begin{cases} m + m + 4 \geq 22 \\ 2000(m + 4) + 1500m \leq 50000 \end{cases}$$

解得： $9 \leq m \leq 12$,

$\therefore m$ 为整数，

$\therefore m$ 的值可以是 9、10、11、12，即该社区有四种购置方案；

设购置总费用为 W ，

则 $W = 2000(m+4) + 1500m = 3500m + 8000$,

$\therefore W$ 随 m 的增大而增大，

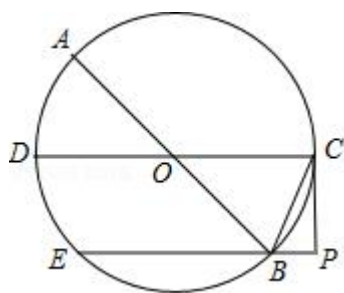
$\therefore$ 当 $m=9$ 时， W 取得最小值，最小值为 39500，

答：该社区共有 4 种购置方案，其中购置男式单车 13 辆、女式单车 9 辆时所需总费用最低，最低费用为 39500 元.

【点评】 本题主要考查二元一次方程组、一元一次不等式组及一次函数的应用，理解题意找到题目蕴含的相等关系或不等关系列出方程组或不等式组是解题的关键.

23. (10 分) (2017•恩施州) 如图, AB 、 CD 是 $\odot O$ 的直径, BE 是 $\odot O$ 的弦, 且 $BE \parallel CD$, 过点 C 的切线与 EB 的延长线交于点 P , 连接 BC .

- (1) 求证: BC 平分 $\angle ABP$;
- (2) 求证: $PC^2 = PB \cdot PE$;
- (3) 若 $BE - BP = PC = 4$, 求 $\odot O$ 的半径.



【考点】 MC: 切线的性质; KD: 全等三角形的判定与性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 由 $BE \parallel CD$ 知 $\angle 1 = \angle 3$, 根据 $\angle 2 = \angle 3$ 即可得 $\angle 1 = \angle 2$;

(2) 连接 EC 、 AC , 由 PC 是 $\odot O$ 的切线且 $BE \parallel DC$, 得 $\angle 1 + \angle 4 = 90^\circ$, 由 $\angle A + \angle 2 = 90^\circ$ 且 $\angle A = \angle 5$ 知 $\angle 5 + \angle 2 = 90^\circ$, 根据 $\angle 1 = \angle 2$ 得 $\angle 4 = \angle 5$, 从而证得 $\triangle PBC \sim \triangle PCE$ 即可;

(3) 由 $PC^2 = PB \cdot PE$ 、 $BE - BP = PC = 4$ 求得 $BP = 2$ 、 $BE = 6$, 作 $EF \perp CD$ 可得 $PC = FE = 4$ 、 $FC = PE = 8$, 再 $Rt\triangle DEF \cong Rt\triangle BCP$ 得 $DF = BP = 2$, 据此得出 CD 的长即可.

【解答】 解: (1) $\because BE \parallel CD$,

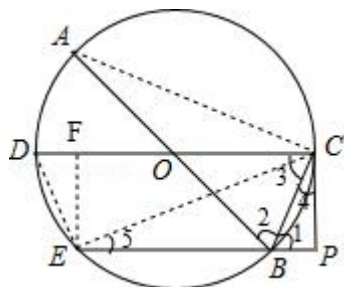
$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

又 $\because OB = OC$,

$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$, 即 BC 平分 $\angle ABP$;

(2) 如图, 连接 EC、AC,



$\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle PCD = 90^\circ$,

又 $\because BE \parallel DC$,

$\therefore \angle P = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 + \angle 4 = 90^\circ$,

$\because AB$ 为 $\odot O$ 直径,

$\therefore \angle A + \angle 2 = 90^\circ$,

又 $\angle A = \angle 5$,

$\therefore \angle 5 + \angle 2 = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \angle 5 = \angle 4$,

$\therefore \angle P = \angle P$,

$\therefore \triangle PBC \sim \triangle PCE$,

$\therefore \frac{PC}{PE} = \frac{PB}{PC}$, 即 $PC^2 = PB \cdot PE$;

(3) $\because BE - BP = PC = 4$,

$$\therefore BE=4+BP,$$

$$\therefore PC^2=PB \cdot PE=PB \cdot (PB+BE),$$

$$\therefore 4^2=PB \cdot (PB+4+PB), \text{ 即 } PB^2+2PB-8=0,$$

$$\text{解得: } PB=2,$$

$$\text{则 } BE=4+PB=6,$$

$$\therefore PE=PB+BE=8,$$

作 $EF \perp CD$ 于点 F ,

$$\therefore \angle P = \angle PCF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $PCFE$ 为矩形,

$$\therefore PC=FE=4, FC=PE=8, \angle EFD = \angle P = 90^\circ,$$

$$\therefore BE \parallel CD,$$

$$\therefore \widehat{DE} = \widehat{BC},$$

$$\therefore DE=BC,$$

在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 和 $\text{Rt}\triangle BCP$ 中,

$$\therefore \begin{cases} DE = BC \\ EF = CP \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DEF \cong \text{Rt}\triangle BCP \text{ (HL)},$$

$$\therefore DF=BP=2,$$

$$\text{则 } CD=DF+CF=10,$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 5.$$

【点评】 本题主要考查切线的性质、相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质, 熟练掌握平行线的性质、切线的性质、圆周角定理、相似三角形的判定与性质及全等三角形的判定与性质等知识点是解题的关键.

24. (12 分) (2017•恩施州) 如图, 已知抛物线 $y=ax^2+c$ 过点 $(-2, 2)$, $(4,$

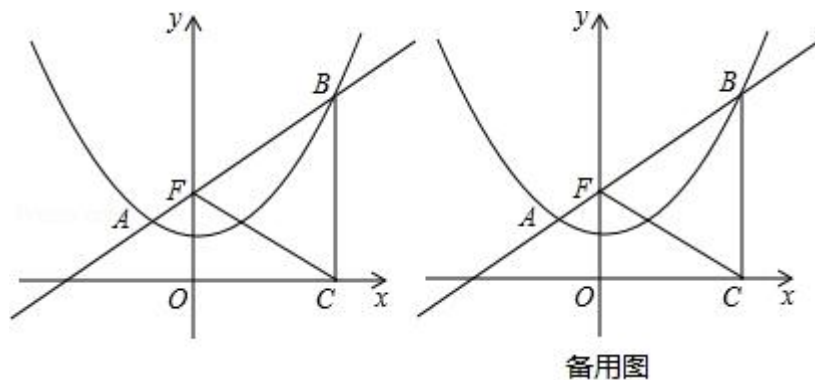
5), 过定点 $F(0, 2)$ 的直线 $l: y=kx+2$ 与抛物线交于 A 、 B 两点, 点 B 在点 A 的右侧, 过点 B 作 x 轴的垂线, 垂足为 C .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 当点 B 在抛物线上运动时, 判断线段 BF 与 BC 的数量关系 ($>$ 、 $<$ 、 $=$), 并证明你的判断;

(3) P 为 y 轴上一点, 以 B 、 C 、 F 、 P 为顶点的四边形是菱形, 设点 $P(0, m)$, 求自然数 m 的值;

(4) 若 $k=1$, 在直线 l 下方的抛物线上是否存在点 Q , 使得 $\triangle QBF$ 的面积最大? 若存在, 求出点 Q 的坐标及 $\triangle QBF$ 的最大面积; 若不存在, 请说明理由.



【考点】HF: 二次函数综合题.

【专题】15 : 综合题.

【分析】(1) 利用待定系数法求抛物线解析式;

(2) 设 $B(x, \frac{1}{4}x^2+1)$, 而 $F(0, 2)$, 利用两点间的距离公式得到 $BF^2=x^2+(\frac{1}{4}x^2+1-2)^2$, 再利用配方法可得到 $BF=\frac{1}{4}x^2+1$, 由于 $BC=\frac{1}{4}x^2+1$, 所以 $BF=BC$;

(3) 如图 1, 利用菱形的性质得到 $CB=CF=PF$, 加上 $CB=FB$, 则可判断 $\triangle BCF$ 为等边三角形, 所以 $\angle BCF=60^\circ$, 则 $\angle OCF=30^\circ$, 于是可计算出 $CF=4$, 所以 $PF=CF=4$, 从而得到自然数 m 的值为 6;

(4) 作 $QE \parallel y$ 轴交 AB 于 E , 如图 2, 先解方程组 $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \end{cases}$ 得 $B(1+\sqrt{5}, 3+\sqrt{5})$, 设 $Q(t, \frac{1}{4}t^2+1)$, 则 $E(t, t+2)$, 则 $EQ = -\frac{1}{4}t^2+t+1$, 则 $S_{\triangle QBF} = S_{\triangle EQF} + S_{\triangle EQB} = \frac{1}{2} \cdot (1+\sqrt{5}) \cdot EQ = \frac{1}{2} \cdot (1+\sqrt{5}) \cdot (-\frac{1}{4}t^2+t+1)$, 然后根据二次函数的性质解决问题.

【解答】 解: (1) 把点 $(-2, 2)$, $(4, 5)$ 代入 $y = ax^2 + c$ 得 $\begin{cases} 4a + c = 2 \\ 16a + c = 5 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ c = 1 \end{cases}$

所以抛物线解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$;

(2) $BF = BC$.

理由如下:

设 $B(x, \frac{1}{4}x^2+1)$, 而 $F(0, 2)$,

$$\therefore BF^2 = x^2 + (\frac{1}{4}x^2 + 1 - 2)^2 = x^2 + (\frac{1}{4}x^2 - 1)^2 = (\frac{1}{4}x^2 + 1)^2,$$

$$\therefore BF = \frac{1}{4}x^2 + 1,$$

$\therefore BC \perp x$ 轴,

$$\therefore BC = \frac{1}{4}x^2 + 1,$$

$$\therefore BF = BC;$$

(3) 如图 1, m 为自然数, 则点 P 在 F 点上方,

$\therefore$ 以 B 、 C 、 F 、 P 为顶点的四边形是菱形,

$$\therefore CB = CF = PF,$$

而 $CB = FB$,

$$\therefore BC = CF = BF,$$

$\therefore \triangle BCF$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle BCF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OCF=30^{\circ},$$

在 $Rt\triangle OCF$ 中, $CF=2OF=4$,

$$\therefore PF=CF=4,$$

$$\therefore P(0, 6),$$

即自然数 m 的值为 6;

(4) 作 $QE \parallel y$ 轴交 AB 于 E , 如图 2,

当 $k=1$ 时, 一次函数解析式为 $y=x+2$,

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = x + 2 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = 1 + \sqrt{5} \\ y = 3 + \sqrt{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 - \sqrt{5} \\ y = 1 + \sqrt{5} \end{cases} \text{ 则 } B(1 + \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}),$$

设 $Q(t, \frac{1}{4}t^2 + 1)$, 则 $E(t, t+2)$,

$$\therefore EQ = t + 2 - (\frac{1}{4}t^2 + 1) = -\frac{1}{4}t^2 + t + 1,$$

$$\therefore S_{\triangle QBF} = S_{\triangle EQF} + S_{\triangle EQB} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}) \cdot EQ = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}) \cdot (-\frac{1}{4}t^2 + t + 1) = -\frac{\sqrt{5} + 1}{8} (t - 2)^2 + \sqrt{5} + 1,$$

当 $t=2$ 时, $S_{\triangle QBF}$ 有最大值, 最大值为 $\sqrt{5} + 1$, 此时 Q 点坐标为 $(2, 2)$.

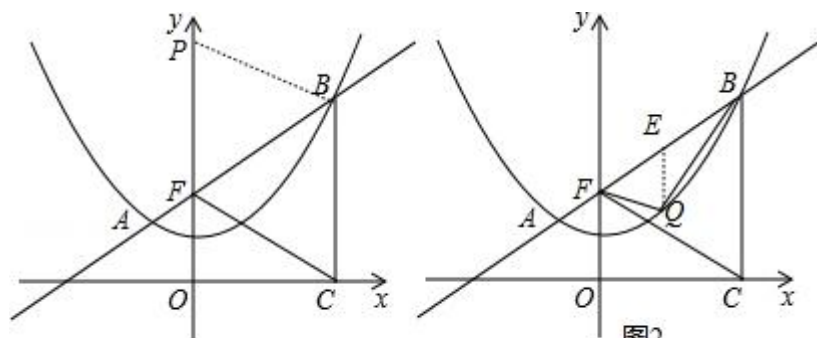


图1

图2

【点评】本题考查了二次函数的综合题: 熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的性质和菱形的性质; 会利用待定系数法求函数解析式; 理解坐标与图形性质, 记住两点间的距离公式.