

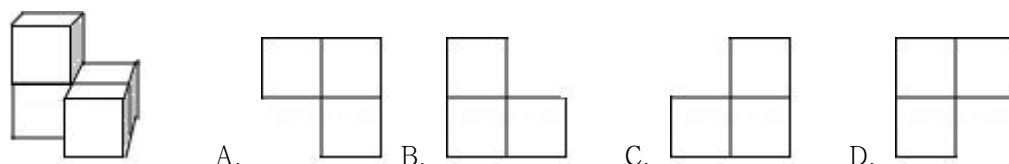
2017 年湖北省十堰市中考数学试卷

一、选择题:

1. (3 分) 气温由 -2°C 上升 3°C 后是 () $^{\circ}\text{C}$.

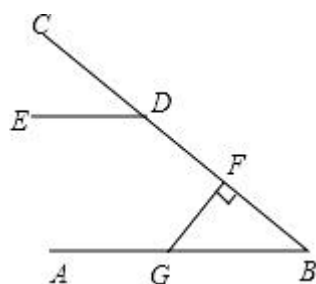
A. 1 B. 3 C. 5 D. -5

2. (3 分) 如图的几何体, 其左视图是 ()

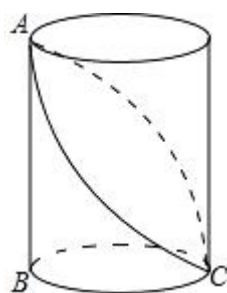


3. (3 分) 如图, $AB \parallel DE$, $FG \perp BC$ 于 F , $\angle CDE = 40^{\circ}$, 则 $\angle FGB =$ ()

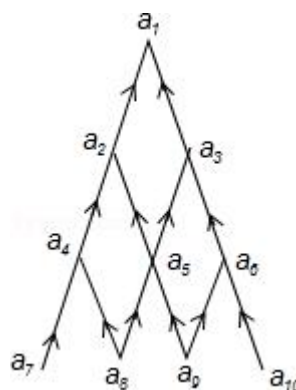
A. 40° B. 50° C. 60° D. 70°



第 3 题图



第 8 题图



第 9 题图

4. (3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ C. $\sqrt{8} \div \sqrt{2} = 2$ D. $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3$

5. (3 分) 某交警在一个路口统计的某时段来往车辆的车速情况如表:

车速 (km/h)	48	49	50	51	52
车辆数 (辆)	5	4	8	2	1

则上述车速的中位数和众数分别是 ()

A. 50, 8 B. 50, 50 C. 49, 50 D. 49, 8

6. (3 分) 下列命题错误的是 ()

- A. 对角线互相平分的四边形是平行四边形
- B. 对角线相等的平行四边形是矩形
- C. 一条对角线平分一组对角的四边形是菱形
- D. 对角线互相垂直的矩形是正方形

7. (3分) 甲、乙二人做某种机械零件, 甲每小时比乙多做6个, 甲做90个所用的时间与做60个所用的时间相等. 设甲每小时做 x 个零件, 下面所列方程正确的是 ()

A. $\frac{90}{x} = \frac{60}{x-6}$ B. $\frac{90}{x} = \frac{60}{x+6}$ C. $\frac{90}{x-6} = \frac{60}{x}$ D. $\frac{90}{x+6} = \frac{60}{x}$

8. (3分) 如图, 已知圆柱的底面直径 $BC = \frac{6}{\pi}$, 高 $AB = 3$, 小虫在圆柱表面爬行, 从 C 点爬到 A 点, 然后再沿另一面爬回 C 点, 则小虫爬行的最短路程为 ()

A. $3\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{5}$ C. $6\sqrt{5}$ D. $6\sqrt{2}$

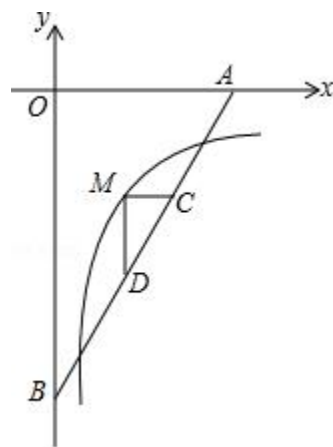
9. (3分) 如图, 10个不同的正偶数按下图排列, 箭头上方的每个数都等于其下方两数的和,

如 $\begin{matrix} & a_1 & \\ a_2 \nearrow & & \nwarrow a_3 \\ & a_1 & \end{matrix}$, 表示 $a_1 = a_2 + a_3$, 则 a_1 的最小值为 ()

A. 32 B. 36 C. 38 D. 40

10. (3分) 如图, 直线 $y = \sqrt{3}x - 6$ 分别交 x 轴, y 轴于 A , B , M 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象上位于直线上方的点, $MC \parallel x$ 轴交 AB 于 C , $MD \perp MC$ 交 AB 于 D , $AC \cdot BD = 4\sqrt{3}$, 则 k 的值为 ()

A. -3 B. -4 C. -5 D. -6

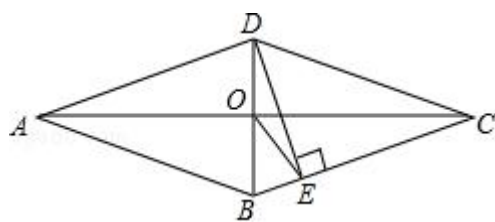


二、填空题

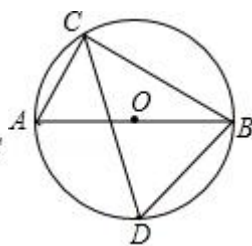
11. (3分) 某颗粒物的直径是0.0000025, 把0.0000025用科学记数法表示为_____.

12. (3分) 若 $a - b = 1$, 则代数式 $2a - 2b - 1$ 的值为_____.

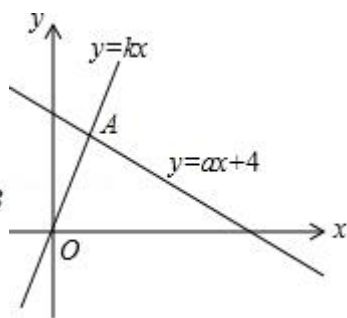
13. (3分) 如图, 菱形 $ABCD$ 中, AC 交 BD 于 O , $OE \perp BC$ 于 E , 连接 OE , 若 $\angle ABC = 140^\circ$, 则 $\angle OED =$ _____.



第 13 题图



第 14 题图

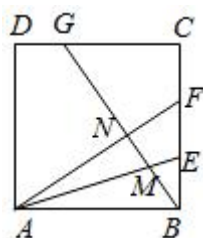


第 15 题图

14. (3 分) 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle ACB$ 的角平分线交 $\odot O$ 于 D . 若 $AC=6$, $BD=5\sqrt{2}$, 则 BC 的长为_____.

15. (3 分) 如图, 直线 $y=kx$ 和 $y=ax+4$ 交于 $A(1, k)$, 则不等式 $kx-6 < ax+4 < kx$ 的解集为_____.

16. (3 分) 如图, 正方形 $ABCD$ 中, $BE=EF=FC$, $CG=2GD$, BG 分别交 AE , AF 于 M , N . 下列结论: ① $AF \perp BG$; ② $BN = \frac{4}{3}NF$; ③ $\frac{BM}{MG} = \frac{3}{8}$; ④ $S_{\text{四边形} CGNF} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形} ANG D}$. 其中正确的结论的序号是_____.

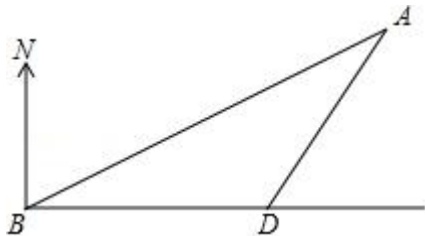


三、解答题 (本大题共 9 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

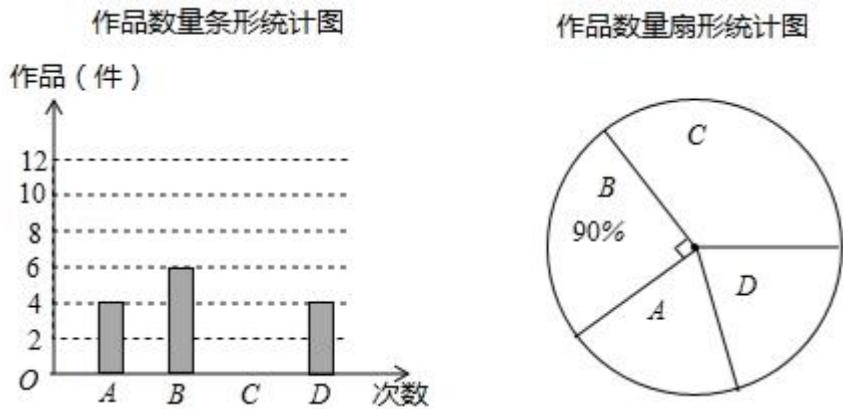
17. (5 分) 计算: $|-2| + \sqrt[3]{-8} - (-1)^{2017}$.

18. (6 分) 化简: $\left(\frac{2}{a+1} + \frac{a+2}{a^2-1}\right) \div \frac{a}{a-1}$

19. (7 分) 如图，海中有一小岛 A，它周围 8 海里内有暗礁，渔船跟踪鱼群由西向东航行，在 B 点测得小岛 A 在北偏东 60° 方向上，航行 12 海里到达 D 点，这时测得小岛 A 在北偏东 30° 方向上. 如果渔船不改变航线继续向东航行，有没有触礁的危险？



20. (9 分) 某中学艺术节期间，学校向学生征集书画作品，杨老师从全校 30 个班中随机抽取了 4 个班（用 A，B，C，D 表示），对征集到的作品的数量进行了分析统计，制作了两幅不完整的统计图.



- 请根据以上信息，回答下列问题：
- 杨老师采用的调查方式是_____（填“普查”或“抽样调查”）；
 - 请你将条形统计图补充完整，并估计全校共征集多少件作品？
 - 如果全校征集的作品中有 5 件获得一等奖，其中有 3 名作者是男生，2 名作者是女生，现要在获得一等奖的作者中选取两人参加表彰座谈会，请你用列表或树状图的方法，求恰好选取的两名学生性别相同的概率.

21. (7分) 已知关于 x 的方程 $x^2 + (2k - 1)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 .

(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 若 x_1, x_2 满足 $x_1^2 + x_2^2 = 16 + x_1x_2$, 求实数 k 的值.

22. (8分) 某超市销售一种牛奶, 进价为每箱 24 元, 规定售价不低于进价. 现在的售价为每箱 36 元, 每月可销售 60 箱. 市场调查发现: 若这种牛奶的售价每降价 1 元, 则每月的销量将增加 10 箱, 设每箱牛奶降价 x 元 (x 为正整数), 每月的销量为 y 箱.

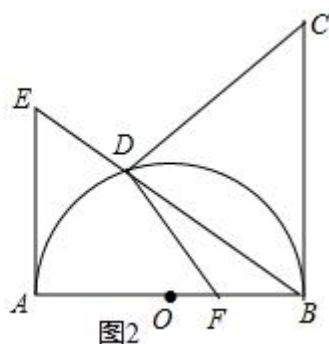
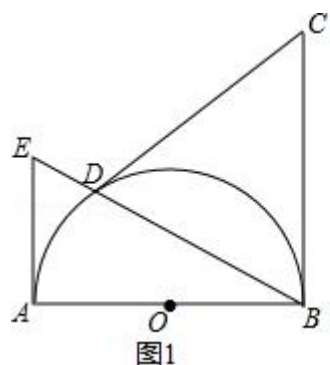
(1) 写出 y 与 x 中间的函数关系式和自变量 x 的取值范围;

(2) 超市如何定价, 才能使每月销售牛奶的利润最大? 最大利润是多少元?

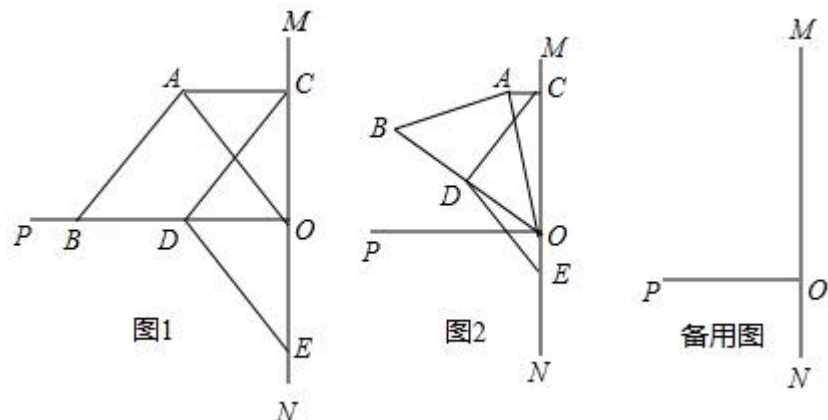
23. (8分) 已知 AB 为 $\odot O$ 的直径, $BC \perp AB$ 于 B , 且 $BC = AB$, D 为半圆 $\odot O$ 上的一点, 连接 BD 并延长交半圆 $\odot O$ 的切线 AE 于 E .

(1) 如图 1, 若 $CD = CB$, 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 如图 2, 若 F 点在 OB 上, 且 $CD \perp DF$, 求 $\frac{AE}{AF}$ 的值.



24. (10 分) 已知 O 为直线 MN 上一点, $OP \perp MN$, 在等腰 $Rt\triangle ABO$ 中, $\angle BAO=90^\circ$, $AC \parallel OP$ 交 OM 于 C , D 为 OB 的中点, $DE \perp DC$ 交 MN 于 E .



(1) 如图 1, 若点 B 在 OP 上, 则

① AC _____ OE (填 “ $<$ ”, “ $=$ ” 或 “ $>$ ”);

② 线段 CA 、 CO 、 CD 满足的等量关系式是_____;

(2) 将图 1 中的等腰 $Rt\triangle ABO$ 绕 O 点顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$), 如图 2, 那么 (1) 中的结论②是否成立? 请说明理由;

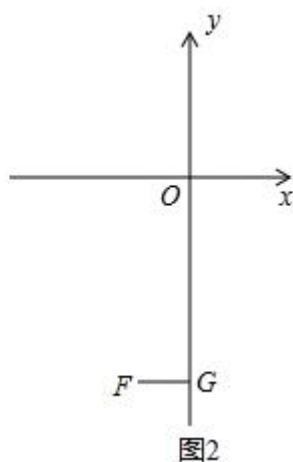
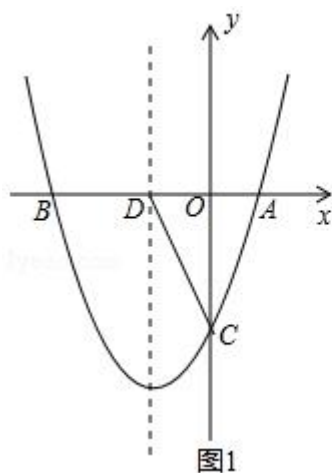
(3) 将图 1 中的等腰 $Rt\triangle ABO$ 绕 O 点顺时针旋转 α ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$), 请你在图 3 中画出图形, 并直接写出线段 CA 、 CO 、 CD 满足的等量关系式_____.

25. (12 分) 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(1, 0)$, $B(m, 0)$, 与 y 轴交于 C .

(1) 若 $m=-3$, 求抛物线的解析式, 并写出抛物线的对称轴;

(2) 如图 1, 在 (1) 的条件下, 设抛物线的对称轴交 x 轴于 D , 在对称轴左侧的抛物线上有一点 E , 使 $S_{\triangle ACE}=\frac{10}{3}S_{\triangle ACD}$, 求点 E 的坐标;

(3) 如图 2, 设 $F(-1, -4)$, $FG \perp y$ 于 G , 在线段 OG 上是否存在点 P , 使 $\angle OBP=\angle FPG$? 若存在, 求 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.



2017 年湖北省十堰市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题:

1. (3 分) (2017•十堰) 气温由 -2°C 上升 3°C 后是 () $^{\circ}\text{C}$.

A. 1 B. 3 C. 5 D. -5

【考点】19: 有理数的加法.

【分析】根据有理数的加法, 可得答案.

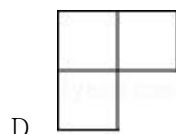
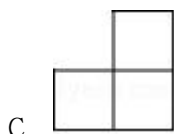
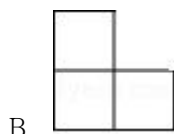
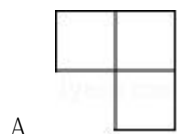
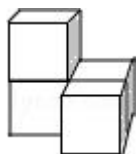
【解答】解: 由题意, 得

$$-2+3=+(3-2)=1,$$

故选: A.

【点评】本题考查了有理数的加法, 异号两数相加, 取绝对值较大的加数的符号, 并用较大的绝对值减较小的绝对值.

2. (3 分) (2017•十堰) 如图的几何体, 其左视图是 ()



【考点】U2: 简单组合体的三视图.

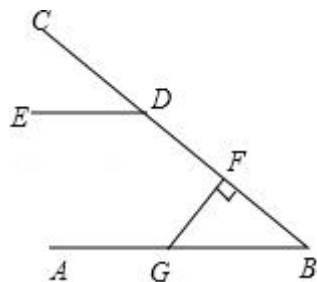
【分析】根据从左边看得到的图象是左视图, 可得答案.

【解答】解: 从左边看第一层是两个小正方形, 第二层左边一个小正方形,

故选: B.

【点评】本题考查了简单组合体的三视图, 从左边看得到的图象是左视图.

3. (3 分) (2017•十堰) 如图, $AB \parallel DE$, $FG \perp BC$ 于 F , $\angle CDE=40^{\circ}$, 则 $\angle FGB=$ ()



A. 40° B. 50° C. 60° D. 70°

【考点】JA: 平行线的性质; J3: 垂线.

【分析】先根据平行线的性质, 得到 $\angle B=\angle CDE=40^{\circ}$, 直观化 $FG \perp BC$, 即可得出 $\angle FGB$ 的度数.

【解答】解: $\because AB \parallel DE$, $\angle CDE=40^{\circ}$,

$$\therefore \angle B=\angle CDE=40^{\circ},$$

又 $\because FG \perp BC$,
 $\therefore \angle FGB = 90^\circ - \angle B = 50^\circ$,
 故选: B.

【点评】本题主要考查了平行线的性质, 解题时注意: 两直线平行, 同位角相等.

4. (3分) (2017•十堰) 下列运算正确的是 ()

A. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ C. $\sqrt{8} \div \sqrt{2} = 2$ D. $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3$

【考点】79: 二次根式的混合运算.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据二次根式的加减法对 A、D 进行判断; 根据二次根式的乘法法则对 B 进行判断; 根据二次根式的除法法则对 D 进行判断.

【解答】解: A、 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不能合并, 所以 A 选项错误;

B、原式 $= 6 \times 2 = 12$, 所以 B 选项错误;

C、原式 $= \sqrt{8 \div 2} = 2$, 所以 C 选项准确;

D、原式 $= 2\sqrt{2}$, 所以 D 选项错误.

故选 C.

【点评】本题考查了二次根式的混合运算: 先把二次根式化为最简二次根式, 然后进行二次根式的乘除运算, 再合并即可. 在二次根式的混合运算中, 如能结合题目特点, 灵活运用二次根式的性质, 选择恰当的解题途径, 往往能事半功倍.

5. (3分) (2017•十堰) 某交警在一个路口统计的某时段来往车辆的车速情况如表:

车速 (km/h)	48	49	50	51	52
车辆数 (辆)	5	4	8	2	1

则上述车速的中位数和众数分别是 ()

A. 50, 8 B. 50, 50 C. 49, 50 D. 49, 8

【考点】W5: 众数; W4: 中位数.

【分析】把这组数据按照从小到大的顺序排列, 第 10、11 个数的平均数是中位数, 在这组数据中出现次数最多的是 50, 得到这组数据的众数.

【解答】解: 要求一组数据的中位数,

把这组数据按照从小到大的顺序排列, 第 10、11 两个数的平均数是 50,

所以中位数是 50,

在这组数据中出现次数最多的是 50,

即众数是 50.

故选: B.

【点评】本题考查一组数据的中位数和众数, 在求中位数时, 首先要把这列数字按照从小到大或从的大到小排列, 找出中间一个数字或中间两个数字的平均数即为所求.

6. (3分) (2017•十堰) 下列命题错误的是 ()

A. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

B. 对角线相等的平行四边形是矩形

C. 一条对角线平分一组对角的四边形是菱形

D. 对角线互相垂直的矩形是正方形

【考点】O1: 命题与定理.

【分析】利用平行四边形、矩形、菱形及正方形的判定定理分别判断后即可确定正确的选项.

【解答】解：A、对角线互相平分的四边形是平行四边形，正确，不符合题意；
 B、对角线相等的平行四边形是矩形，正确，不符合题意；
 C、一条对角线平分一组对角的四边形可能是菱形或者正方形，错误，符合题意；
 D、对角线互相垂直的矩形是正方形，正确，不符合题意，
 故选 C.

【点评】本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解平行四边形、矩形、菱形及正方形的判定定理，难度不大.

7. (3 分) (2017•十堰) 甲、乙二人做某种机械零件，甲每小时比乙多做 6 个，甲做 90 个所用的时间与做 60 个所用的时间相等. 设甲每小时做 x 个零件，下面所列方程正确的是 ()

A. $\frac{90}{x} = \frac{60}{x-6}$ B. $\frac{90}{x} = \frac{60}{x+6}$ C. $\frac{90}{x-6} = \frac{60}{x}$ D. $\frac{90}{x+6} = \frac{60}{x}$

【考点】B6: 由实际问题抽象出分式方程.

【分析】设甲每小时做 x 个零件，根据题意可得，甲做 90 个所用的时间与乙做 60 个所用的时间相等，据此列方程.

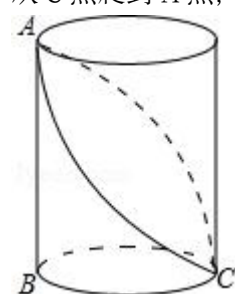
【解答】解：设甲每小时做 x 个零件，则乙每小时做 $(x-6)$ 个零件，

由题意得， $\frac{90}{x} = \frac{60}{x-6}$.

故选 A.

【点评】本题考查了由实际问题抽象出分式方程，解答本题的关键是读懂题意，设出未知数，找出合适的等量关系，列方程.

8. (3 分) (2017•十堰) 如图，已知圆柱的底面直径 $BC = \frac{6}{\pi}$ ，高 $AB = 3$ ，小虫在圆柱表面爬行，从 C 点爬到 A 点，然后再沿另一面爬回 C 点，则小虫爬行的最短路程为 ()



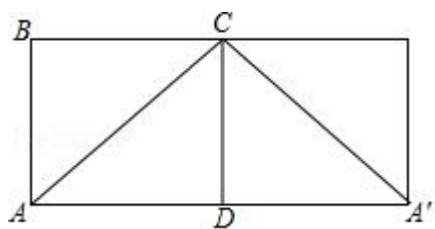
A. $3\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{5}$ C. $6\sqrt{5}$ D. $6\sqrt{2}$

【考点】KV: 平面展开 - 最短路径问题.

【分析】要求最短路径，首先要把圆柱的侧面展开，利用两点之间线段最短，然后利用勾股定理即可求解.

【解答】解：把圆柱侧面展开，展开图如右图所示，点 A、C 的最短距离为线段 AC 的长. 在 $RT\triangle ADC$ 中， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $CD = AB = 3$ ，AD 为底面半圆弧长， $AD = 3$ ，
 所以 $AC = 3\sqrt{2}$ ，

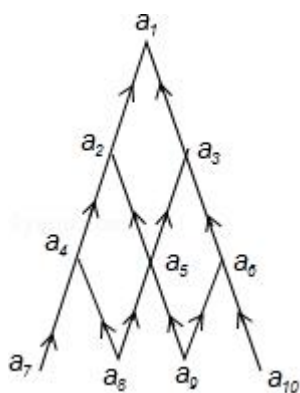
$\therefore$ 从 C 点爬到 A 点，然后再沿另一面爬回 C 点，则小虫爬行的最短路程为 $2AC = 6\sqrt{2}$ ，
 故选 D.



【点评】本题考查了平面展开 - 最短路径问题，解题的关键是会将圆柱的侧面展开，并利用勾股定理解答。

9. (3分) (2017•十堰) 如图，10个不同的正偶数按下图排列，箭头上方的每个数都等于其

下方两数的和，如 $a_1 = a_2 + a_3$ ，表示 a_1 的最小值为 ()



A. 32 B. 36 C. 38 D. 40

【考点】37: 规律型: 数字的变化类.

【分析】由 $a_1 = a_7 + 3(a_8 + a_9) + a_{10}$ 知要使 a_1 取得最小值，则 $a_8 + a_9$ 应尽可能的小，取 $a_8 = 2$ 、 $a_9 = 4$ ，根据 $a_5 = a_8 + a_9 = 6$ ，则 a_7 、 a_{10} 中不能有 6，据此对于 a_7 、 a_8 ，分别取 8、10、12 检验可得，从而得出答案。

【解答】解: $\because a_1 = a_2 + a_3$

$$= a_4 + a_5 + a_5 + a_6$$

$$= a_7 + a_8 + a_8 + a_9 + a_8 + a_9 + a_9 + a_{10}$$

$$= a_7 + 3(a_8 + a_9) + a_{10},$$

$\therefore$ 要使 a_1 取得最小值，则 $a_8 + a_9$ 应尽可能的小，

取 $a_8 = 2$ 、 $a_9 = 4$ ，

$$\because a_5 = a_8 + a_9 = 6,$$

则 a_7 、 a_{10} 中不能有 6，

若 $a_7 = 8$ 、 $a_{10} = 10$ ，则 $a_4 = 10 = a_{10}$ ，不符合题意，舍去；

若 $a_7 = 10$ 、 $a_{10} = 8$ ，则 $a_4 = 12$ 、 $a_6 = 4 + 8 = 12$ ，不符合题意，舍去；

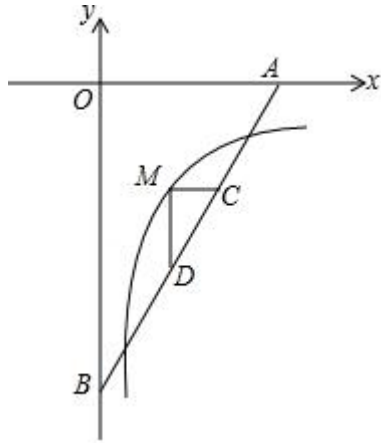
若 $a_7 = 10$ 、 $a_{10} = 12$ ，则 $a_4 = 10 + 2 = 12$ 、 $a_6 = 4 + 12 = 16$ 、 $a_2 = 12 + 6 = 18$ 、 $a_3 = 6 + 16 = 22$ 、 $a_1 = 18 + 22 = 40$ ，符合题意；

综上， a_1 的最小值为 40，

故选: D.

【点评】本题主要考查数字的变化类，根据题目要求得出 a_1 取得最小值的切入点是解题的关键。

10. (3分) (2017•十堰) 如图, 直线 $y=\sqrt{3}x-6$ 分别交 x 轴, y 轴于 A , B , M 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象上位于直线上方的点, $MC\parallel x$ 轴交 AB 于 C , $MD\perp MC$ 交 AB 于 D , $AC\cdot BD=4\sqrt{3}$, 则 k 的值为 ()



A. -3 B. -4 C. -5 D. -6

【考点】 G8: 反比例函数与一次函数的交点问题.

【分析】 过点 D 作 $DE\perp y$ 轴于点 E , 过点 C 作 $CF\perp x$ 轴于点 F , 然后求出 OA 与 OB 的长度, 即可求出 $\angle OAB$ 的正弦值与余弦值, 再设 $M(x, y)$, 从而可表示出 BD 与 AC 的长度, 根据 $AC\cdot BD=4\sqrt{3}$ 列出即可求出 k 的值.

【解答】 解: 过点 D 作 $DE\perp y$ 轴于点 E , 过点 C 作 $CF\perp x$ 轴于点 F ,

令 $x=0$ 代入 $y=\sqrt{3}x-6$,

$\therefore y=-6$,

$\therefore B(0, -6)$,

$\therefore OB=6$,

令 $y=0$ 代入 $y=\sqrt{3}x-6$,

$\therefore x=2\sqrt{3}$,

$\therefore (2\sqrt{3}, 0)$,

$\therefore OA=2\sqrt{3}$,

$\therefore$ 勾股定理可知: $AB=4\sqrt{3}$,

$\therefore \sin \angle OAB = \frac{OB}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \angle OAB = \frac{OA}{AB} = \frac{1}{2}$

设 $M(x, y)$,

$\therefore CF=-y$, $ED=x$,

$\therefore \sin \angle OAB = \frac{CF}{AC}$,

$\therefore AC = -\frac{2\sqrt{3}}{3}y$,

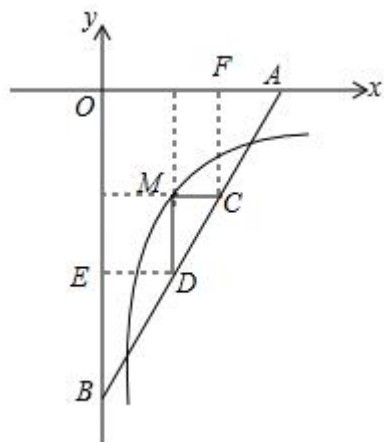
$\because \cos \angle OAB = \cos \angle EDB = \frac{ED}{BD}$,

$\therefore BD=2x$,

$\therefore AC\cdot BD=4\sqrt{3}$,

$\therefore -\frac{2\sqrt{3}}{3}y \times 2x=4\sqrt{3}$,

$\therefore xy = -3$,
 $\therefore M$ 在反比例函数的图象上,
 $\therefore k = xy = -3$,
 故选 (A)



【点评】 本题考查反比例函数与一次函数的综合问题，解题的关键是根据 $\angle OAB$ 的锐角三角函数值求出 BD 、 AC ，本题属于中等题型.

二、填空题

11. (3分) (2017•十堰) 某颗粒物的直径是 0.0000025，把 0.0000025 用科学记数法表示为 2.5×10^{-6} .

【考点】 1J: 科学记数法—表示较小的数.

【分析】 绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂，指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

【解答】 解：0.0000025 用科学记数法表示为 2.5×10^{-6} ，
故答案为： 2.5×10^{-6} .

【点评】 本题考查用科学记数法表示较小的数，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

12. (3分) (2017•十堰) 若 $a - b = 1$ ，则代数式 $2a - 2b - 1$ 的值为 1.

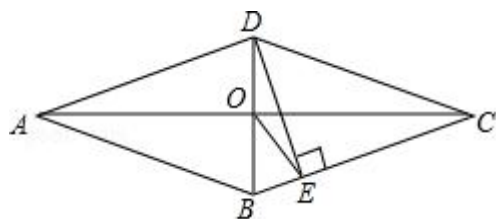
【考点】 33: 代数式求值.

【分析】 原式前两项提取 2 变形后，将 $a - b = 1$ 代入计算即可求出值.

【解答】 解： $\because a - b = 1$ ，
 $\therefore$ 原式 $= 2(a - b) - 1 = 2 - 1 = 1$.
 故答案为： 1.

【点评】 此题考查了代数式求值，利用了整体代入的思想，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

13. (3分) (2017•十堰) 如图，菱形 $ABCD$ 中， AC 交 BD 于 O ， $OE \perp BC$ 于 E ，连接 OE ，若 $\angle ABC = 140^\circ$ ，则 $\angle OED =$ 20° .



【考点】L8: 菱形的性质.

【分析】由菱形的性质可知 O 为 BD 中点, 所以 OE 为直角三角形 BED 斜边上的中线, 由此可得 $OE=OB$, 根据等腰三角形的性质和已知条件即可求出 $\angle OED$ 的度数.

【解答】解:

$\because$ 四边形 ABCD 是菱形,

$\therefore DO=OB$,

$\because DE \perp BC$ 于 E,

$\therefore OE$ 为直角三角形 BED 斜边上的中线,

$\therefore OE = \frac{1}{2}BD$,

$\therefore OB=OE$,

$\therefore \angle OBE = \angle OEB$,

$\because \angle ABC = 140^\circ$,

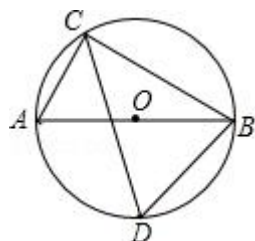
$\therefore \angle OBE = 70^\circ$,

$\therefore \angle OED = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$,

故答案为: 20° .

【点评】本题考查了菱形的性质、直角三角形斜边上中线的性质, 得到 OE 为直角三角形 BED 斜边上的中线是解题的关键.

14. (3 分) (2017•十堰) 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ACB$ 的角平分线交 $\odot O$ 于 D. 若 $AC=6$, $BD=5\sqrt{2}$, 则 BC 的长为 8.



【考点】M5: 圆周角定理; KQ: 勾股定理.

【分析】连接 BD, 根据 CD 是 $\angle ACB$ 的平分线可知 $\angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$, 故可得出 $AD=BD$, 再由 AB 是 $\odot O$ 的直径可知 $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形, 利用勾股定理求出 AB 的长, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 利用勾股定理可得出 BC 的长.

【解答】解: 连接 BD,

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径.

$\because \angle ACB$ 的角平分线交 $\odot O$ 于 D,

$\therefore \angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$,

$\therefore AD=BD=5\sqrt{2}$.

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

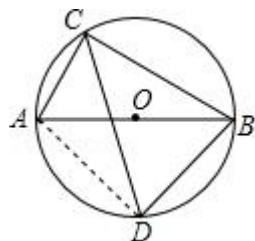
∴ △ABD 是等腰直角三角形,

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2} = 10.$$

$$\therefore AC = 6,$$

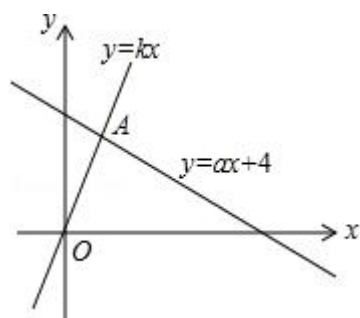
$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

故答案为: 8.



【点评】 本题考查的是圆周角定理, 熟知直径所对的圆周角是直角是解答此题的关键.

15. (3 分) (2017·十堰) 如图, 直线 $y=kx$ 和 $y=ax+4$ 交于 A (1, k), 则不等式 $kx - 6 < ax + 4 < kx$ 的解集为 $1 < x \leq \frac{5}{2}$.



【考点】 FD: 一次函数与一元一次不等式.

【分析】 根据题意得由 $OB=4$, $OC=6$, 根据直线 $y=kx$ 平行于直线 $y=kx-6$, 得到 $\frac{BA}{AD} = \frac{BO}{OC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, 分别过 A, D 作 $AM \perp x$ 轴于 M, $DN \perp x$ 轴于 N, 则 $AM \parallel DN \parallel y$ 轴, 根据平行线分线段成比例定理得到 $\frac{OM}{MN} = \frac{BA}{AD} = \frac{2}{3}$, 得到 $ON = \frac{5}{2}$, 求得 D 点的横坐标是 $\frac{5}{2}$, 于是得到结论.

【解答】 解: 如图, 由 $y=kx-6$ 与 $y=ax+4$ 得 $OB=4$, $OC=6$,
∵ 直线 $y=kx$ 平行于直线 $y=kx-6$,

$$\therefore \frac{BA}{AD} = \frac{BO}{OC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

分别过 A, D 作 $AM \perp x$ 轴于 M, $DN \perp x$ 轴于 N,
则 $AM \parallel DN \parallel y$ 轴,

$$\therefore \frac{OM}{MN} = \frac{BA}{AD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore A (1, k),$$

$$\therefore OM=1,$$

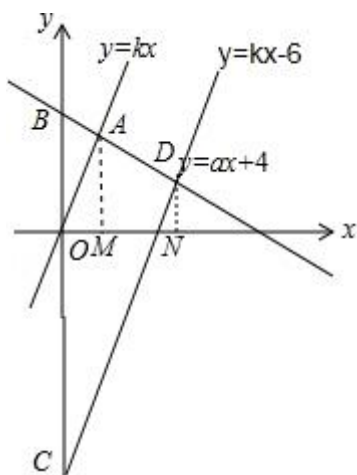
$$\therefore MN = \frac{3}{2},$$

$$\therefore ON = \frac{5}{2},$$

$$\therefore D \text{ 点的横坐标是 } \frac{5}{2},$$

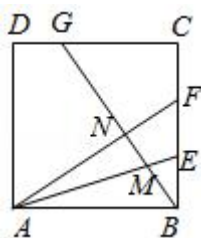
$$\therefore 1 < x < \frac{5}{2} \text{ 时, } kx - 6 < ax + 4 < kx,$$

$$\text{故答案为: } 1 < x < \frac{5}{2}.$$



【点评】 本题考查了一次函数与一元一次不等式，此类题目，利用数形结合的思想求解是解题的关键.

16. (3 分) (2017•十堰) 如图，正方形 ABCD 中，BE=EF=FC，CG=2GD，BG 分别交 AE，AF 于 M，N. 下列结论：①AF ⊥ BG；②BN = $\frac{4}{3}$ NF；③ $\frac{BM}{MG} = \frac{3}{8}$ ；④S_{四边形 CGNF} = $\frac{1}{2}$ S_{四边形 ANG D}. 其中正确的结论的序号是 ①③.



【考点】 S9：相似三角形的判定与性质；KD：全等三角形的判定与性质；LE：正方形的性质.

【分析】 ①易证 $\triangle ABF \cong \triangle BCG$ ，即可解题；

②易证 $\triangle BNF \sim \triangle BCG$ ，即可求得 $\frac{BN}{NF}$ 的值，即可解题；

③作 $EH \perp AF$ ，令 $AB=3$ ，即可求得 MN，BM 的值，即可解题；

④连接 AG，FG，根据③中结论即可求得 S_{四边形 CGNF} 和 S_{四边形 ANG D}，即可解题.

【解答】 解：① $\because$ 四边形 ABCD 为正方形，

$$\therefore AB=BC=CD,$$

$$\therefore BE=EF=FC, \quad CG=2GD,$$

$$\therefore BF=CG,$$

$$\therefore \text{在} \triangle ABF \text{ 和 } \triangle BCG \text{ 中, } \begin{cases} AB = BC \\ \angle ABF = \angle BCG = 90^\circ, \\ BF = CG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle BCG,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle CBG,$$

$$\therefore \angle BAF + \angle BFA = 90^\circ,$$

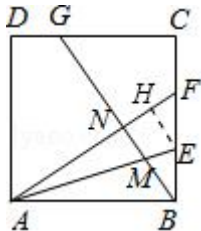
$$\therefore \angle CBG + \angle BFA = 90^\circ, \text{ 即 } AF \perp BG; \text{ ①正确;}$$

$$\text{②} \therefore \text{在} \triangle BNF \text{ 和 } \triangle BCG \text{ 中, } \begin{cases} \angle CBG = \angle NBF \\ \angle BCG = \angle BNF = 90^\circ, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BNF \sim \triangle BCG, \therefore \frac{BN}{NF} = \frac{BC}{CG} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore BN = \frac{2}{3}NF; \text{ ②错误;}$$

$$\text{③作 } EH \perp AF, \text{ 令 } AB=3, \text{ 则 } BF=2, BE=EF=CF=1,$$



$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2}AF \cdot BN = \frac{1}{2}AB \cdot BF,$$

$$\therefore BN = \frac{6\sqrt{13}}{13}, NF = \frac{2}{3}BN = \frac{4\sqrt{13}}{13},$$

$$\therefore AN = AF - NF = \frac{9\sqrt{13}}{13},$$

$$\therefore E \text{ 是 } BF \text{ 中点,}$$

$$\therefore EH \text{ 是 } \triangle BFN \text{ 的中位线,}$$

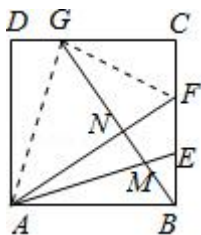
$$\therefore EH = \frac{3\sqrt{13}}{13}, NH = \frac{2\sqrt{13}}{13}, BN \parallel EH,$$

$$\therefore AH = \frac{11\sqrt{13}}{13}, \frac{AN}{AH} = \frac{MN}{EH}, \text{ 解得: } MN = \frac{27\sqrt{13}}{143},$$

$$\therefore BM = BN - MN = \frac{3\sqrt{13}}{11}, MG = BG - BM = \frac{8\sqrt{13}}{11},$$

$$\therefore \frac{BM}{MG} = \frac{3}{8}; \text{ ③正确;}$$

$$\text{④连接 } AG, FG, \text{ 根据③中结论,}$$



则 $NG = BG - BN = \frac{7\sqrt{13}}{13}$,

$$\therefore S_{\text{四边形CGNF}} = S_{\triangle CFG} + S_{\triangle GNF} = \frac{1}{2}CG \cdot CF + \frac{1}{2}NF \cdot NG = 1 + \frac{14}{13} = \frac{27}{13},$$

$$S_{\text{四边形ANGD}} = S_{\triangle ANG} + S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2}AN \cdot GN + \frac{1}{2}AD \cdot DG = \frac{27}{13} + \frac{3}{2} = \frac{93}{26},$$

$\therefore S_{\text{四边形CGNF}} \neq \frac{1}{2}S_{\text{四边形ANGD}}$, ④错误;

故答案为 ①③.

【点评】 本题考查了全等三角形的判定和性质, 考查了相似三角形的判定和对应边比例相等的性质, 本题中令 $AB=3$ 求得 AN , BN , NG , NF 的值是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 9 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (5 分) (2017·十堰) 计算: $|-2| + \sqrt[3]{-8} - (-1)^{2017}$.

【考点】 2C: 实数的运算.

【专题】 11: 计算题; 511: 实数.

【分析】 原式利用绝对值的代数意义, 立方根定义, 以及乘方的意义计算即可得到结果.

【解答】 解: 原式 $= 2 - 2 + 1 = 1$.

【点评】 此题考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

18. (6 分) (2017·十堰) 化简: $(\frac{2}{a+1} + \frac{a+2}{a^2-1}) \div \frac{a}{a-1}$.

【考点】 6C: 分式的混合运算.

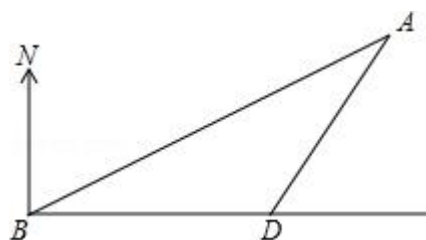
【分析】 根据分式的加法和除法可以解答本题.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: } & (\frac{2}{a+1} + \frac{a+2}{a^2-1}) \div \frac{a}{a-1} \\ &= \frac{2(a-1)+a+2}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a-1}{a} \\ &= \frac{2a-2+a+2}{a(a+1)} \\ &= \frac{3a}{a(a+1)} \\ &= \frac{3}{a+1} \end{aligned}$$

【点评】 本题考查分式的混合运算, 解答本题的关键是明确分式混合运算的计算方法.

19. (7 分) (2017·十堰) 如图, 海中有一小岛 A, 它周围 8 海里内有暗礁, 渔船跟踪鱼群由西向东航行, 在 B 点测得小岛 A 在北偏东 60° 方向上, 航行 12 海里到达 D 点, 这时测得

小岛 A 在北偏东 30° 方向上. 如果渔船不改变航线继续向东航行, 有没有触礁的危险?



【考点】 TB: 解直角三角形的应用 – 方向角问题; KU: 勾股定理的应用.

【分析】 过 A 作 $AC \perp BD$ 于点 C, 求出 $\angle CAD$ 、 $\angle CAB$ 的度数, 求出 $\angle BAD$ 和 $\angle ABD$, 根据等边对等角得出 $AD=BD=12$, 根据含 30° 度角的直角三角形性质求出 CD , 根据勾股定理求出 AC 即可.

【解答】 解: 只要求出 A 到 BD 的最短距离是否在以 A 为圆心, 以 8 海里的圆内或圆上即可,

如图, 过 A 作 $AC \perp BD$ 于点 C, 则 AC 的长是 A 到 BD 的最短距离,

$$\because \angle CAD=30^\circ, \angle CAB=60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD=60^\circ - 30^\circ = 30^\circ, \angle ABD=90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD=\angle BAD,$$

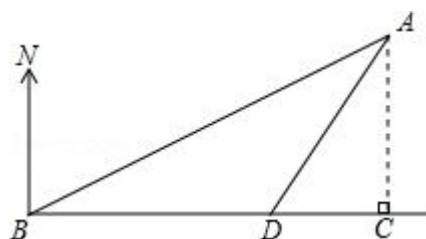
$$\therefore BD=AD=12 \text{ 海里},$$

$$\because \angle CAD=30^\circ, \angle ACD=90^\circ,$$

$$\therefore CD=\frac{1}{2}AD=6 \text{ 海里},$$

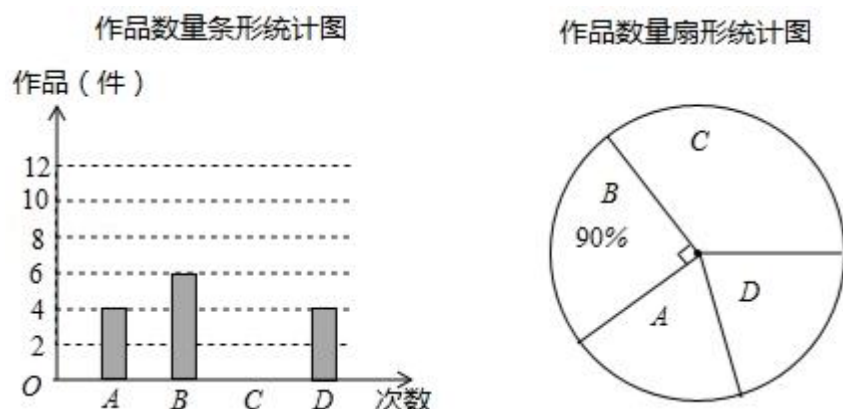
$$\text{由勾股定理得: } AC=\sqrt{12^2 - 6^2}=6\sqrt{3} \approx 10.392 > 8,$$

即渔船继续向正东方向行驶, 没有触礁的危险.



【点评】 考查了勾股定理的应用和解直角三角形, 此题是一道方向角问题, 结合航海中的实际问题, 将解直角三角形的相关知识有机结合, 体现了数学应用于实际生活的思想.

20. (9 分) (2017•十堰) 某中学艺术节期间, 学校向学生征集书画作品, 杨老师从全校 30 个班中随机抽取了 4 个班 (用 A, B, C, D 表示), 对征集到的作品的数量进行了分析统计, 制作了两幅不完整的统计图.



请根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 杨老师采用的调查方式是 抽样调查 (填“普查”或“抽样调查”)；
- (2) 请你将条形统计图补充完整，并估计全校共征集多少件作品？
- (3) 如果全校征集的作品中有 5 件获得一等奖，其中有 3 名作者是男生，2 名作者是女生，现要在获得一等奖的作者中选取两人参加表彰座谈会，请你用列表或树状图的方法，求恰好选取的两名学生性别相同的概率.

【考点】 X6: 列表法与树状图法; V2: 全面调查与抽样调查; V5: 用样本估计总体; VB: 扇形统计图; VC: 条形统计图.

【分析】 (1) 杨老师从全校 30 个班中随机抽取了 4 个班，属于抽样调查.

(2) 由题意得：所调查的 4 个班征集到的作品数为： $6 \div \frac{90}{360} = 24$ (件)，C 班作品的件数为： $24 - 4 - 6 - 4 = 10$ (件)；继而可补全条形统计图；

(3) 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与恰好抽中一男一女的情况，再利用概率公式即可求得答案.

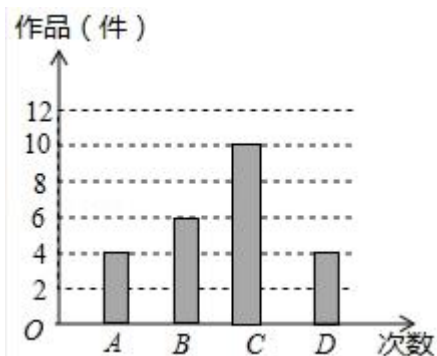
【解答】 解：(1) 杨老师从全校 30 个班中随机抽取了 4 个班，属于抽样调查.
故答案为抽样调查.

(2) 所调查的 4 个班征集到的作品数为： $6 \div \frac{90}{360} = 24$ 件，

平均每个班 $\frac{24}{4} = 6$ 件，C 班有 10 件，

$\therefore$ 估计全校共征集作品 $6 \times 30 = 180$ 件.

条形图如图所示，



(3) 画树状图得：



∴共有 20 种等可能的结果，两名学生性别相同的有 8 种情况，

∴恰好抽中一男一女的概率为： $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

【点评】 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键。条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小。同时考查了概率公式。

21. (7 分) (2017•十堰) 已知关于 x 的方程 $x^2 + (2k - 1)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 。

(1) 求实数 k 的取值范围；

(2) 若 x_1, x_2 满足 $x_1^2 + x_2^2 = 16 + x_1x_2$ ，求实数 k 的值。

【考点】 AB: 根与系数的关系；AA: 根的判别式。

【分析】 (1) 根据方程的系数结合根的判别式，即可得出 $\Delta = -4k + 5 \geq 0$ ，解之即可得出实数 k 的取值范围；

(2) 由根与系数的关系可得 $x_1 + x_2 = 1 - 2k$ 、 $x_1 \cdot x_2 = k^2 - 1$ ，将其代入 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 16 + x_1 \cdot x_2$ 中，解之即可得出 k 的值。

【解答】 解：(1) ∵关于 x 的方程 $x^2 + (2k - 1)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 ，

∴ $\Delta = (2k - 1)^2 - 4(k^2 - 1) = -4k + 5 \geq 0$ ，

解得： $k \leq \frac{5}{4}$ ，

∴实数 k 的取值范围为 $k \leq \frac{5}{4}$ 。

(2) ∵关于 x 的方程 $x^2 + (2k - 1)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 ，

∴ $x_1 + x_2 = 1 - 2k$ ， $x_1 \cdot x_2 = k^2 - 1$ 。

∴ $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 16 + x_1 \cdot x_2$ ，

∴ $(1 - 2k)^2 - 2 \times (k^2 - 1) = 16 + (k^2 - 1)$ ，即 $k^2 - 4k - 12 = 0$ ，

解得： $k = -2$ 或 $k = 6$ (不符合题意，舍去)。

∴实数 k 的值为 -2 。

【点评】 本题考查了根与系数的关系以及根的判别式，解题的关键是：(1) 根据方程的系数结合根的判别式，找出 $\Delta = -4k + 5 \geq 0$ ；(2) 根据根与系数的关系结合 $x_1^2 + x_2^2 = 16 + x_1x_2$ ，找出关于 k 的一元二次方程。

22. (8 分) (2017•十堰) 某超市销售一种牛奶，进价为每箱 24 元，规定售价不低于进价。现在的售价为每箱 36 元，每月可销售 60 箱。市场调查发现：若这种牛奶的售价每降价 1 元，则每月的销量将增加 10 箱，设每箱牛奶降价 x 元 (x 为正整数)，每月的销量为 y 箱。

(1) 写出 y 与 x 中间的函数关系式和自变量 x 的取值范围；

(2) 超市如何定价，才能使每月销售牛奶的利润最大？最大利润是多少元？

【考点】 HE: 二次函数的应用。

【分析】(1) 根据价格每降低 1 元, 平均每天多销售 10 箱, 由每箱降价 x 元, 多卖 $10x$, 据此可以列出函数关系式;

(2) 由利润 = (售价 - 成本) $\times$ 销售量列出函数关系式, 求出最大值.

【解答】解: (1) 根据题意, 得: $y = 60 + 10x$,

由 $36 - x \geq 24$ 得 $x \leq 12$,

$\therefore 1 \leq x \leq 12$, 且 x 为整数;

(2) 设所获利润为 W ,

则 $W = (36 - x - 24)(10x + 60)$

$= -10x^2 + 60x + 720$

$= -10(x - 3)^2 + 810$,

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时, W 取得最大值, 最大值为 810,

答: 超市定价为 33 元时, 才能使每月销售牛奶的利润最大, 最大利润是 810 元.

【点评】本题主要考查二次函数的应用, 由利润 = (售价 - 成本) $\times$ 销售量列出函数关系式求最值, 用二次函数解决实际问题解题的关键.

23. (8 分) (2017•十堰) 已知 AB 为 $\odot O$ 的直径, $BC \perp AB$ 于 B , 且 $BC = AB$, D 为半圆 $\odot O$ 上的一点, 连接 BD 并延长交半圆 $\odot O$ 的切线 AE 于 E .

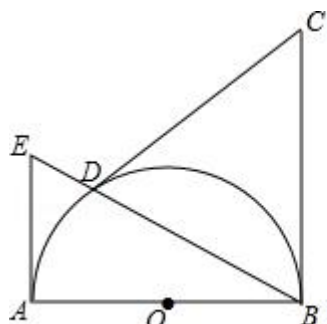


图1

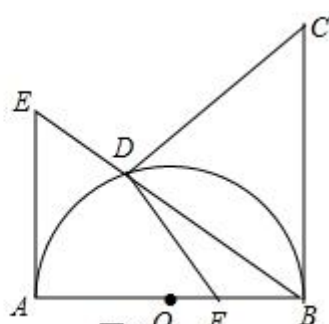


图2

(1) 如图 1, 若 $CD = CB$, 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 如图 2, 若 F 点在 OB 上, 且 $CD \perp DF$, 求 $\frac{AE}{AF}$ 的值.

【考点】S9: 相似三角形的判定与性质; M2: 垂径定理; ME: 切线的判定与性质.

【分析】(1) 连接 DO , CO , 易证 $\triangle CDO \cong \triangle CBO$, 即可解题;

(2) 连接 AD , 易证 $\triangle ADF \sim \triangle BDC$ 和 $\triangle ADE \sim \triangle BDA$, 根据相似三角形对应边比例相等的性质即可解题.

【解答】解: (1) 连接 DO , CO ,

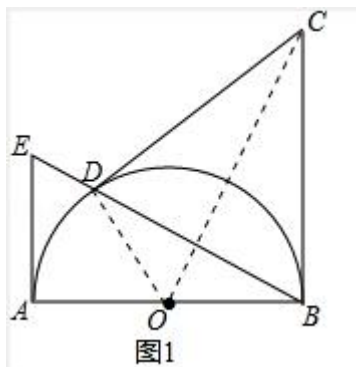


图1

$\because BC \perp AB$ 于 B ,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,

在 $\triangle CDO$ 与 $\triangle CBO$ 中,
$$\begin{cases} CD = CB \\ OD = OB, \\ OC = OC \end{cases}$$

$\therefore \triangle CDO \cong \triangle CBO$,

$\therefore \angle CDO = \angle CBO = 90^\circ$,

$\therefore OD \perp CD$,

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 连接 AD ,

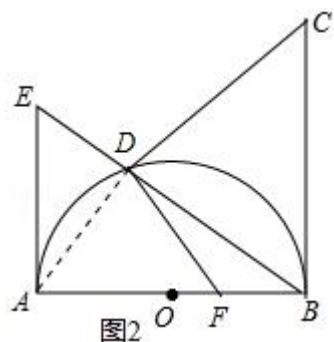


图2

$\because AB$ 是直径, $\therefore \angle ADB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADF + \angle BDF = 90^\circ$, $\angle DAB + \angle DBA = 90^\circ$,

$\because \angle BDF + \angle BDC = 90^\circ$, $\angle CBD + \angle DBA = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADF = \angle BDC$, $\angle DAB = \angle CBD$,

$\therefore$ 在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle BDC$ 中,
$$\begin{cases} \angle ADF = \angle BDC \\ \angle DAB = \angle CBD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle BDC$,

$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AF}{BC}$,

$\because \angle DAE + \angle DAB = 90^\circ$, $\angle E + \angle DAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle E = \angle DAB$,

$\therefore$ 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BDA$ 中,
$$\begin{cases} \angle ADE = \angle BDA = 90^\circ \\ \angle E = \angle DAB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BDA$,

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{BD},$$

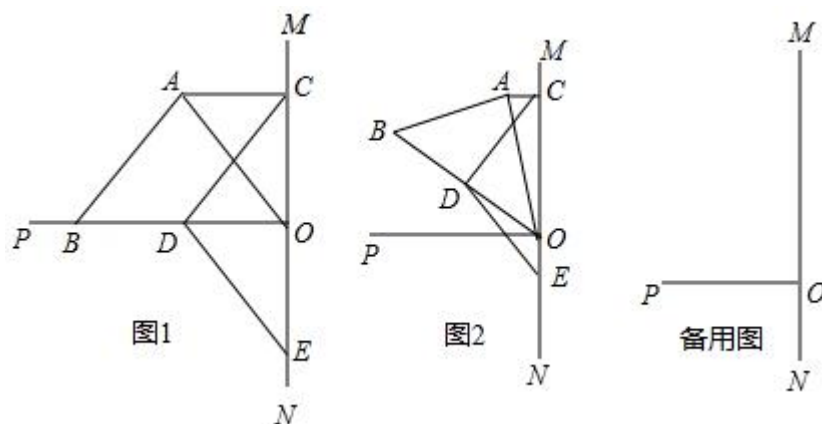
$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{BC}, \text{ 即 } \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{BC},$$

$$\therefore AB=BC,$$

$$\therefore \frac{AE}{AF}=1.$$

【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，考查了全等三角形的判定和性质，本题中求证 $\triangle ADF \sim \triangle BDC$ 和 $\triangle ADE \sim \triangle BDA$ 是解题的关键。

24. (10分) (2017•十堰) 已知O为直线MN上一点, $OP \perp MN$, 在等腰Rt $\triangle ABO$ 中, $\angle BAO=90^\circ$, $AC \parallel OP$ 交OM于C, D为OB的中点, $DE \perp DC$ 交MN于E.



(1) 如图1, 若点B在OP上, 则

① AC = OE (填“<”, “=”或“>”);

② 线段CA、CO、CD满足的等量关系式是 $AC^2 + CO^2 = CD^2$;

(2) 将图1中的等腰Rt $\triangle ABO$ 绕O点顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$), 如图2, 那么(1)中的结论②是否成立? 请说明理由;

(3) 将图1中的等腰Rt $\triangle ABO$ 绕O点顺时针旋转 α ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$), 请在图3中画出图形, 并直接写出线段CA、CO、CD满足的等量关系式 $CO - CA = \sqrt{2}CD$.

【考点】RB: 几何变换综合题.

【分析】(1) ①如图1, 证明 $AC=OC$ 和 $OC=OE$ 可得结论;

②根据勾股定理可得: $AC^2 + CO^2 = CD^2$;

(2) 如图2, (1)中的结论②不成立, 作辅助线, 构建全等三角形, 证明A、D、O、C四点共圆, 得 $\angle ACD = \angle AOB$, 同理得: $\angle EFO = \angle EDO$, 再证明 $\triangle ACO \cong \triangle EOF$, 得 $OE = AC$, $AO = EF$, 根据勾股定理得: $AC^2 + OC^2 = FO^2 + OE^2 = EF^2$, 由直角三角形中最长边为斜边可得结论;

(3) 如图3, 连接AD, 则 $AD=OD$ 证明 $\triangle ACD \cong \triangle OED$, 根据 $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形, 得 $CE^2 = 2CD^2$, 等量代换可得结论 $(OC - OE)^2 = (OC - AC)^2 = 2CD^2$, 开方后是: $OC - AC = \sqrt{2}CD$.

【解答】解: (1) ① $AC=OE$,

理由: 如图1, $\therefore$ 在等腰Rt $\triangle ABO$ 中, $\angle BAO=90^\circ$,

$$\therefore \angle ABO = \angle AOB = 45^\circ,$$

$$\therefore OP \perp MN,$$

$$\therefore \angle COP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 45^\circ,$$

$\because AC \parallel OP$,
 $\therefore \angle CAO = \angle AOB = 45^\circ$, $\angle ACO = \angle POE = 90^\circ$,
 $\therefore AC = OC$,
 连接 AD,
 $\because BD = OD$,
 $\therefore AD = OD$, $AD \perp OB$,
 $\therefore AD \parallel OC$,
 $\therefore$ 四边形 ADOC 是正方形,
 $\therefore \angle DCO = 45^\circ$,
 $\therefore AC = OD$,
 $\therefore \angle DEO = 45^\circ$,
 $\therefore CD = DE$,
 $\therefore OC = OE$,
 $\therefore AC = OE$;

②在 $Rt\triangle CDO$ 中,

$$\therefore CD^2 = OC^2 + OD^2,$$

$$\therefore CD^2 = AC^2 + OC^2;$$

故答案为: $AC^2 + CO^2 = CD^2$;

(2) 如图 2, (1) 中的结论②不成立, 理由是:

连接 AD, 延长 CD 交 OP 于 F, 连接 EF,

$\because AB = AO$, D 为 OB 的中点,

$\therefore AD \perp OB$,

$$\therefore \angle ADO = 90^\circ,$$

$$\because \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle CDE,$$

$$\therefore \angle ADO - \angle CDO = \angle CDE - \angle CDO,$$

即 $\angle ADC = \angle EDO$,

$$\because \angle ADO = \angle ACO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADO + \angle ACO = 180^\circ,$$

$\therefore$ A、D、O、C 四点共圆,

$$\therefore \angle ACD = \angle AOB,$$

同理得: $\angle EFO = \angle EDO$,

$$\therefore \angle EFO = \angle AOC,$$

$\because \triangle ABO$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle AOB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCO = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle COF$ 和 $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore OC = OF,$$

$$\because \angle ACO = \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACO \cong \triangle EOF,$$

$$\therefore OE = AC, AO = EF,$$

$$\therefore AC^2 + OC^2 = FO^2 + OE^2 = EF^2,$$

$Rt\triangle DEF$ 中, $EF > DE = DC$,

$$\therefore AC^2 + OC^2 > DC^2,$$

所以 (1) 中的结论②不成立;

(3) 如图 3, 结论: $OC - CA = \sqrt{2}CD$,

理由是: 连接 AD, 则 $AD = OD$,

同理: $\angle ADC = \angle EDO$,

$\because \angle CAB + \angle CAO = \angle CAO + \angle AOC = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAB = \angle AOC$,

$\because \angle DAB = \angle AOD = 45^\circ$,

$\therefore \angle DAB - \angle CAB = \angle AOD - \angle AOC$,

即 $\angle DAC = \angle DOE$,

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle OED$,

$\therefore AC = OE, CD = DE$,

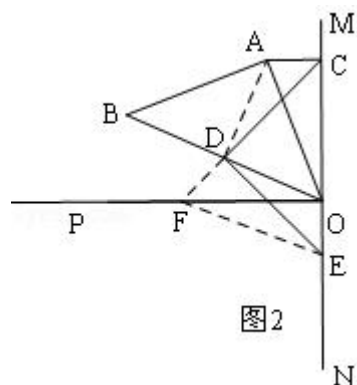
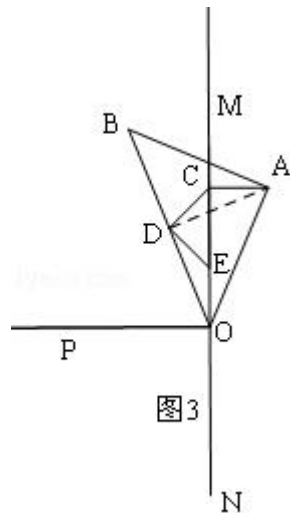
$\therefore \triangle CDE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore CE^2 = 2CD^2$,

$\therefore (OC - OE)^2 = (OC - AC)^2 = 2CD^2$,

$\therefore OC - AC = \sqrt{2}CD$,

故答案为: $OC - AC = \sqrt{2}CD$.



围;

②当 B 在原点的右侧时, 只有 $\triangle OBP$ 是等腰直角三角形, $\triangle FPG$ 也是等腰直角三角形时满足条件, 直接计算即可.

【解答】解: (1) 当 $m = -3$ 时, $B(-3, 0)$,

把 $A(1, 0)$, $B(-3, 0)$ 代入到抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 中得:

$$\begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ 9 - 3b + c = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为: $y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$;

对称轴是: 直线 $x = -1$;

(2) 如图 1, 设 $E(m, m^2 + 2m - 3)$,

由题意得: $AD = 1 + 1 = 2$, $OC = 3$,

$$S_{\triangle ACE} = \frac{10}{3} S_{\triangle ACD} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{2} AD \cdot OC = \frac{5}{3} \times 2 \times 3 = 10,$$

设直线 AE 的解析式为: $y = kx + b$,

把 $A(1, 0)$ 和 $E(m, m^2 + 2m - 3)$ 代入得,

$$\begin{cases} k + b = 0 \\ mk + b = m^2 + 2m - 3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = m + 3 \\ b = -m - 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AE 的解析式为: $y = (m+3)x - m - 3$,

$\therefore F(0, -m-3)$,

$\therefore C(0, -3)$,

$\therefore FC = -m - 3 + 3 = -m$,

$$\therefore S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} FC \cdot (1 - m) = 10,$$

$$-m(1 - m) = 20,$$

$$m^2 - m - 20 = 0,$$

$$(m+4)(m-5) = 0,$$

$$m_1 = -4, m_2 = 5 \text{ (舍)},$$

$\therefore E(-4, 5)$;

(3) 如图 2, 当 B 在原点的左侧时, 连接 BF, 以 BF 为直径作圆 E, 当 $\odot E$ 与 y 轴相切时, 设切点为 P,

$$\therefore \angle BPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FPG + \angle OPB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OPB + \angle OBP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBP = \angle FPG,$$

连接 EP, 则 $EP \perp OG$,

$$\therefore BE = EF,$$

$\therefore EP$ 是梯形的中位线,

$$\therefore OP = PG = 2,$$

$$\therefore FG = 1,$$

$$\tan \angle FPG = \tan \angle OBP = \frac{FG}{PG} = \frac{OP}{OB},$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{2}{-m},$$

$\therefore m = -4$,

$\therefore$ 当 $-4 \leq m < 0$ 时, 在线段 OG 上存在点 P, 使 $\angle OBP = \angle FPG$;

如图 3, 当 B 在原点的右侧时, 要想满足 $\angle OBP = \angle FPG$,

则 $\angle OBP = \angle OPB = \angle FPG$,

$\therefore OB = OP$,

$\therefore \triangle OBP$ 是等腰直角三角形, $\triangle FPG$ 也是等腰直角三角形,

$\therefore FG = PG = 1$,

$\therefore OB = OP = 3$,

$\therefore m = 3$,

综上所述, 当 $-4 \leq m < 0$ 或 $m = 3$ 时, 在线段 OG 上存在点 P, 使 $\angle OBP = \angle FPG$.

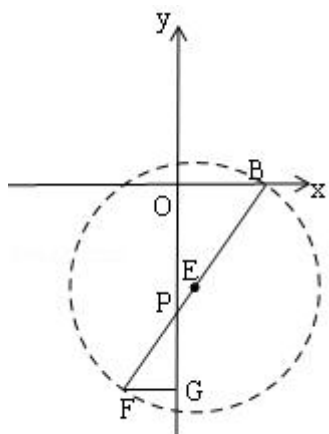


图3

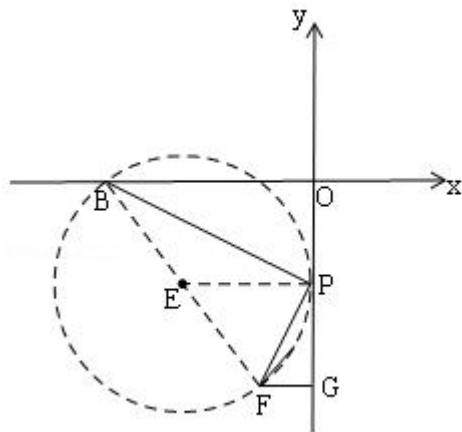
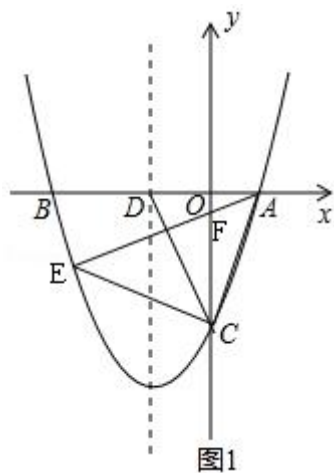


图2



【点评】本题是二次函数的综合题，考查了利用待定系数法求函数的解析式、配方法求对称轴、等腰直角三角形的性质和判定、三角形面积的求法，并与圆相结合，根据同角的余角相等解决第 3 问更简单.